

Системы счисления

2013 г.

Определение

Система счисления — символический метод записи чисел, представление чисел с помощью письменных знаков.

Система счисления:

- даёт представления множества чисел (целых и/или вещественных);
- даёт каждому числу уникальное представление
- отражает алгебраическую и арифметическую структуру чисел.

Виды систем счисления

- **Системы счисления подразделяются на:**
 - позиционные
 - смешанные

Позиционные системы счисления

- **В позиционных системах счисления одна и та же цифра в записи числа имеет различные значения в зависимости от того места (разряда), где она расположена.**
- **К числу таких систем относится современная десятичная система счисления**
- **В позиционных системах чем больше основание системы, тем меньшее количество разрядов (то есть записываемых цифр) требуется при записи числа.**

Позиционные системы счисления

- Под позиционной системой счисления обычно понимается ***b-ричная*** система счисления, которая определяется целым числом $b > 1$, называемым **основанием системы счисления**.
- Целое число без знака в ***b-ричной*** системе счисления представляется в виде конечной линейной комбинации степеней числа.
- Например, число ***сто три*** представляется в десятичной системе счисления в виде:

$$103 = 1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0.$$

Позиционные системы счисления

Формула представления позиционных чисел:

$$x = \sum_{k=0}^{n-1} a_k b^k$$

- где a_k — это целые числа, называемые цифрами, удовлетворяющие неравенству: $0 \leq a_k \leq (b - 1)$
- Каждая степень b^k в такой записи называется весовым коэффициентом разряда.
- Старшинство разрядов определяется значением показателя k (номером разряда).

Позиционные системы счисления

Наиболее употребляемыми в настоящее время позиционными системами являются:

- **2 — двоичная** (в информатике, программировании)
- **3 — троичная**
- **8 — восьмеричная**
- **10 — десятичная** (используется повсеместно)
- **12 — двенадцатеричная** (счёт дюжинами)
- **13 — тринадцатеричная**
- **16 — шестнадцатеричная** (в программировании)
- **60 — шестидесятеричная** (единицы измерения времени, измерение углов и, в частности, координат, долготы и широты).

Непозиционные системы счисления

- В непозиционных системах счисления величина, которую обозначает цифра, не зависит от положения в числе.
- При этом система может накладывать ограничения на положение цифр, например, чтобы они были расположены в порядке убывания.

Непозиционные системы

счисления

- Каноническим примером *почти непозиционной* системы счисления является римская, в которой в качестве цифр используются латинские буквы:

I — 1

V — 5

X — 10

L — 50

C — 100

D — 500

M — 1000

- Например, $II = 1 + 1 = 2$
здесь символ I обозначает 1 независимо от места в числе.
- На самом деле, римская система не является полностью непозиционной, так как меньшая цифра, идущая перед большей, вычитается из неё, например:
- $IV = 4$, в то время как: $VI = 6$

Двоичная система счисления

- Двоичная система счисления — позиционная система счисления с основанием 2.
- В этой системе счисления числа записываются с помощью двух символов (0 и 1).
- Чтобы не путать в какой системе счисления записано число, его снабжают указателем справа внизу.
- Например, число в десятичной системе 5_{10} будет в двоичной 101_2 .
- Иногда двоичное число обозначают префиксом **0b** (ноль b), например **0b101**.

Двоичная система счисления

Произношение

- Во всех системах счисления (кроме десятичной) знаки читаются по одному. Например число 101_2 произносится «один ноль один».
- **Отрицательные двоичные числа** обозначаются так же как и десятичные: знаком «-» перед числом.
- Однако в вычислительной технике широко используется запись отрицательных двоичных чисел в **дополнительном коде**, что может вносить путаницу.
- Например число -5_{10} может быть записано как -101_2 но в компьютере будет храниться как:
 $11111111\ 11111111\ 11111111\ 1111011_2$ (в 4 байтах)

Двоичная система счисления

- Двоичная система счисления является комбинацией двоичной системы кодирования и показательной весовой функции с **основанием 2**.
- Положительные целые числа (без знака) записываются в виде суммы степеней двойки от **0** до числа **n-1**:

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k 2^k,$$

- $49 = 1 * 2^5 + 1 * 2^4 + 0 * 2^3 + 0 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0 = 110001$

Преобразование десятичных чисел в двоичные

- Допустим, нам нужно перевести число **19** в двоичное. Вы можете воспользоваться следующей процедурой :
- $19 / 2 = 9$ с остатком **1**
 $9 / 2 = 4$ с остатком **1**
 $4 / 2 = 2$ без остатка **0**
 $2 / 2 = 1$ без остатка **0**
 $1 / 2 = 0$ с остатком **1**
- Делим каждое частное на **2** и записываем остаток в конец двоичной записи.
- Продолжаем деление до тех пор, пока в частном не будет **0**.
- Результат записываем справа налево. То есть нижняя цифра (1) будет самой левой и т.д.
- В результате получаем число **19** в двоичной записи: **10011**.

Преобразование дробных десятичных чисел в двоичные

- Если в исходном числе есть **целая часть** то она преобразуется **отдельно от дробной**.
- **Дробь умножается** на основание двоичной системы счисления (**2**)
- В полученном произведении **выделяется целая часть**, которая принимается в качестве старшего разряда числа в двоичной системе счисления;
- **Алгоритм завершается**, если дробная часть полученного произведения равна нулю или если достигнута требуемая точность вычислений. В противном случае вычисления продолжаются над дробной частью произведения.

Преобразование дробных десятичных чисел в двоичные

- Требуется перевести дробное десятичное число $15,25_{10}$ в дробное двоичное число.
- Тогда нужно отдельно перевести целую часть и отдельно – дробную.
- Дробную часть $0,25$ умножаем на основание 2 , занося целые части произведения в разряды после запятой искомого дробного двоичного числа:
- Ответ: $15,25_{10} = 1111,01_2$

$$\begin{array}{r|l} 15 & 2 \\ \hline 14 & 7 \\ \hline 1 & 6 \\ & 3 \\ & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 2 & \\ \hline 3 & 2 \\ \hline 2 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 2 & \\ \hline 3 & 2 \\ \hline 2 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 0, & 25 \\ \hline & 2 \\ \hline 0 & 50 \\ & 2 \\ \hline 1 & 00 \end{array}$$

Преобразование двоичных чисел в десятичные

- Для преобразования из двоичной системы в десятичную используют следующую таблицу степеней основания 2:

512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

- Начиная с цифры 1 все цифры умножаются на два. Точка, которая стоит после 1, называется двоичной точкой.

Преобразование двоичных чисел в десятичные

- Допустим, дано двоичное число 110001_2 .
- Для перевода в десятичное запишите его как сумму по разрядам следующим образом:

$$1 * 2^5 + 1 * 2^4 + 0 * 2^3 + 0 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0 = 49$$

- То же самое чуть иначе:

$$1 * 32 + 1 * 16 + 0 * 8 + 0 * 4 + 0 * 2 + 1 * 1 = 49$$

- То есть:

$$32 + 16 + 1 = 49$$

Преобразование дробных двоичных чисел в десятичные

- Нужно перевести число $1011010,101_2$ в десятичную систему. Запишем это число следующим образом:

$$1*2^6 + 0*2^5 + 1*2^4 + 1*2^3 + 0*2^2 + 1*2^1 + 0*2^0 + 1*2^{-1} + 0*2^{-2} + 1*2^{-3} = 90,625$$

- То же самое чуть иначе:

$$1*64 + 0*32 + 1*16 + 1*8 + 0*4 + 1*2 + 0*1 + 1*0,5 + 0*0,25 + 1*0,125 = 90,625$$

- То есть:

$$64 + 16 + 8 + 2 + 0,5 + 0,125 = 90,625$$

Сложение, вычитание двоичных чисел

- Таблицы сложения и вычитания

+	0	1
0	0	1
1	1	10

-	0	1
0	0	-1
1	1	0

- Пример сложения «столбиком» ($14_{10} + 5_{10} = 19_{10}$ или $1110_2 + 101_2 = 10011_2$):

		1	1	1	0
+			1	0	1

	1	0	0	1	1

Умножение двоичных чисел

- Таблица умножения

*	0	1
0	0	0
1	0	1

- Пример умножения «столбиком»

$$(14_{10} * 5_{10} = 70_{10} \text{ или } 110_2 * 101_2 = 1000110_2):$$

x				1	1	1	0
					1	0	1
+				1	1	1	0
		1	1	1	0		
	1	0	0	0	1	1	0

Шестнадцатеричная система счисления

- **Шестнадцатеричная система счисления** — позиционная система счисления по целочисленному основанию **16**.
- Обычно в качестве шестнадцатеричных цифр используются десятичные **цифры от 0 до 9** и латинские **буквы от A до F** для обозначения цифр от 10_{10} до 15_{10} ,
- то есть (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F).

Шестнадцатеричная система счисления

Применение

- Широко используется в низкоуровневом программировании и компьютерной документации, поскольку в современных компьютерах минимальной единицей памяти является 8-битный байт, значения которого удобно записывать двумя шестнадцатеричными цифрами.

Перевод чисел из десятичной в шестнадцатеричную систему

- Перевод осуществляется так же, как и в двоичной системе, но с основанием 16.
- Переведём число $56,567_{10}$ в шестнадцатеричное:

Целая часть от деления	Остаток от деления
$56 / 16 = 3$	8
$3 / 16 = 0$	3
$0 / 16 = 0$	0

- Остаток от деления записываем в обратном порядке.
- Получаем $56_{10} = 038_{16}$

Перевод чисел из десятичной в шестнадцатеричную систему

- Для перевода дробной части числа последовательно умножаем дробную часть на основание 16. В результате каждый раз записываем целую часть произведения.

$$0.567 * 16 = 9.072 \text{ (целая часть 9)}$$

$$0.072 * 16 = 1.152 \text{ (целая часть 1)}$$

$$0.152 * 16 = 2.432 \text{ (целая часть 2)}$$

$$0.432 * 16 = 6.912 \text{ (целая часть 6)}$$

- Получаем $0.567 = 9126_{16}$
- Таким образом, число $56,567_{10}$ в шестнадцатеричной системе счисления записывается как $38,9126_{16}$.

Перевод чисел из 16-ой системы в 10-ую

- Для перевода шестнадцатеричного числа в десятичное необходимо это число представить в виде суммы произведений степеней основания шестнадцатеричной системы счисления на соответствующие цифры в разрядах шестнадцатеричного числа.
- Например, требуется перевести шестнадцатеричное число **5A3** в десятичное. В этом числе 3 цифры. В соответствии с вышеуказанным правилом представим его в виде суммы степеней с основанием **16**:
- $$5A3_{16} = 3 \cdot 16^0 + 10 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^2 = 3 \cdot 1 + 10 \cdot 16 + 5 \cdot 256 = 3 + 160 + 1280 = 1443_{10}$$

Перевод чисел из 2-ой системы в 16-ую и наоборот

- Для перевода многозначного двоичного числа в шестнадцатеричную систему нужно разбить его на **тетрады** справа налево и заменить каждую тетраду соответствующей **шестнадцатеричной цифрой**.
- Для перевода числа из шестнадцатеричной системы в двоичную нужно заменить каждую его цифру на соответствующую **тетраду** из нижеприведенной таблицы перевода.
- **Например:**
- $0101101000112 = 0101\ 1010\ 0011 = 5A316$

Таблица перевода чисел

hex – шестнадцатеричная
dec – десятичная
oct – восьмеричная

0 _{hex}	=	0 _{dec}	=	0 _{oct}	0	0	0	0
1 _{hex}	=	1 _{dec}	=	1 _{oct}	0	0	0	1
2 _{hex}	=	2 _{dec}	=	2 _{oct}	0	0	1	0
3 _{hex}	=	3 _{dec}	=	3 _{oct}	0	0	1	1
4 _{hex}	=	4 _{dec}	=	4 _{oct}	0	1	0	0
5 _{hex}	=	5 _{dec}	=	5 _{oct}	0	1	0	1
6 _{hex}	=	6 _{dec}	=	6 _{oct}	0	1	1	0
7 _{hex}	=	7 _{dec}	=	7 _{oct}	0	1	1	1
8 _{hex}	=	8 _{dec}	=	10 _{oct}	1	0	0	0
9 _{hex}	=	9 _{dec}	=	11 _{oct}	1	0	0	1
A _{hex}	=	10 _{dec}	=	12 _{oct}	1	0	1	0
B _{hex}	=	11 _{dec}	=	13 _{oct}	1	0	1	1
C _{hex}	=	12 _{dec}	=	14 _{oct}	1	1	0	0
D _{hex}	=	13 _{dec}	=	15 _{oct}	1	1	0	1
E _{hex}	=	14 _{dec}	=	16 _{oct}	1	1	1	0
F _{hex}	=	15 _{dec}	=	17 _{oct}	1	1	1	1

Представление отрицательных чисел

- **Дополнительный код** (англ. two's complement) — наиболее распространённый способ представления отрицательных целых чисел в компьютерах.
- **Он позволяет заменить операцию вычитания на операцию сложения и сделать операции сложения и вычитания одинаковыми для знаковых и беззнаковых чисел, чем упрощает архитектуру ЭВМ.**
- **Дополнительный код отрицательного числа можно получить инвертированием модуля двоичного числа (первое дополнение) и прибавлением к инверсии единицы (второе дополнение), либо вычитанием числа из нуля.**

Представление отрицательных чисел

- При записи числа в дополнительном коде **старший разряд является знаковым.**
- Если его значение равно **0**, то в остальных разрядах записано положительное двоичное число, совпадающее с прямым кодом.
- Если число, записанное в прямом коде, отрицательное, то все разряды числа инвертируются, а к результату прибавляется 1. К получившемуся числу дописывается старший (знаковый) разряд, равный 1.

Представление отрицательных чисел

- Двоичное 8-ми разрядное число со знаком в дополнительном коде может представлять любое целое в диапазоне от -128 до $+127$.
- Если старший разряд равен нулю, то наибольшее целое число, которое может быть записано в оставшихся 7 разрядах равно , что равно 127 .

Десятичное представление	Код двоичного представления (8 бит)		
	прямой	обратный	дополнительный
127	01111111	01111111	01111111
1	00000001	00000001	00000001
0	00000000	00000000	00000000
-0	10000000	11111111	---
-1	10000001	11111110	11111111
-2	10000010	11111101	11111110
-3	10000011	11111100	11111101
-4	10000100	11111011	11111100
-5	10000101	11111010	11111011
-6	10000110	11111001	11111010
-7	10000111	11111000	11111001
-8	10001000	11110111	11111000
-9	10001001	11110110	11110111
-10	10001010	11110101	11110110
-11	10001011	11110100	11110101
-127	11111111	10000000	10000001
-128	---	---	10000000

Преобразование в дополнительный код

- Преобразуем отрицательное число -5 , записанное в прямом коде, в дополнительный.
- Прямой код числа -5 , взятого по модулю:
101
- Инвертируем все разряды числа, получая таким образом обратный код:
010
- Добавим к результату 1:
011
- Допишем слева знаковый единичный разряд:
1011

Экспоненциальная запись

- **Экспоненциальная запись** — представление действительных чисел в виде мантиссы и порядка. Удобна при представлении очень больших и очень малых чисел, а также для унификации их написания.

$$N = M * n^p, \text{ где}$$

- N — записываемое число;
- M — мантисса;
- n — основание показательной функции;
- p (целое) — порядок;
- n^p — характеристика числа.

Пример:

- 1 000 000 (один миллион): $1,0 * 10^6$
- $N = 1\ 000\ 000$, $M = 1,0$, $n = 10$, $p = 6$

Компьютерный способ экспоненциальной записи

- На компьютере (в частности в тексте компьютерных программ) экспоненциальную запись записывают в виде ME_p , где:
- M — мантисса,
- E (exponent) — буква E , означающая « $\cdot 10^{\wedge}$ » («...умножить на десять в степени...»)
- p — порядок.
- Например: $1,602176565E-19 = 1,602176565 \cdot 10^{-19}$

Компьютерный способ экспоненциальной записи

- В программировании часто используют символ «+» для неотрицательного порядка и ведущие нули, а в качестве десятичного разделителя — точку:

$$1,048576E+06 = 1\,048\,576;$$

$$3.14E+00 = 3,14$$

- Для улучшения читаемости иногда используют строчную букву **e**: $6,02214129e23$