# Системы счисления

2013 г.

# Определение

**Система счисле́ния** — символический метод записи чисел, представление чисел с помощью письменных знаков.

**Система счисления:**

- даёт представления множества чисел (целых и/или вещественных);
- даёт каждому числу уникальное представление
- отражает алгебраическую и арифметическую структуру чисел.

# Виды систем счисления

- **Системы счисления подразделяются на:**
  - позиционные
  - смешанные

# Позиционные системы счисления

- **В позиционных системах счисления** одна и та же **цифра** в записи числа имеет различные значения в зависимости от того **места** (разряда), где она расположена.
- К числу таких систем относится современная **десятичная система счисления**
- В позиционных системах **чем больше основание** системы, **тем меньшее количество разрядов** (то есть записываемых цифр) требуется при записи числа.

# Позиционные системы счисления

- Под позиционной системой счисления обычно понимается ***b*-ричная** система счисления, которая определяется целым числом ***b* > 1**, называемым **основанием системы счисления**.
- Целое число без знака в ***b*-ричной** системе счисления представляется в виде конечной линейной комбинации степеней числа.
- **Например, число *сто три*** представляется в десятичной системе счисления в виде:

$$103 = 1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0.$$

# Позиционные системы счисления

**Формула представления позиционных чисел:**

$$x = \sum_{k=0}^{n-1} a_k b^k$$

- где $\boldsymbol{a_k}$ — это целые числа, называемые цифрами, удовлетворяющие неравенству: $0 \leq a_k \leq (b-1)$
- Каждая степень $\boldsymbol{b^k}$ в такой записи называется весовым коэффициентом разряда.
- Старшинство разрядов определяется значением показателя $\boldsymbol{k}$ (номером разряда).

# Позиционные системы счисления

**Наиболее употребляемыми в настоящее время позиционными системами являются:**

- **2 — двоичная** (в информатике, программировании)
- **3 — троичная**
- **8 — восьмеричная**
- **10 — десятичная** (используется повсеместно)
- **12 — двенадцатеричная** (счёт дюжинами)
- **13 — тринадцатеричная**
- **16 —шестнадцатеричная** (в программировании)
- **60 — шестидесятеричная** (единицы измерения времени, измерение углов и, в частности, координат, долготы и широты).

# Непозиционные системы счисления

- **В непозиционных системах счисления** величина, которую обозначает цифра, не зависит от положения в числе.
- При этом система может накладывать ограничения на положение цифр, например, чтобы они были расположены в порядке убывания.

# Непозиционные системы счисления

- Каноническим примером *почти непозиционной* системы счисления является римская, в которой в качестве цифр используются латинские буквы:
  **I — 1**
  **V — 5**
  **X — 10**
  **L — 50**
  **C — 100**
  **D — 500**
  **M — 1000**
- Например, II = 1 + 1 = 2
  здесь символ I обозначает 1 независимо от места в числе.
- На самом деле, римская система не является полностью непозиционной, так как меньшая цифра, идущая перед большей, вычитается из неё, например:
- IV = 4, в то время как: VI = 6

# Двоичная система счисления

- **Двоичная система счисления** — позиционная система счисления с **основанием 2**.
- **В этой системе счисления числа записываются с помощью двух символов (0 и 1).**
- Чтобы не путать в какой системе счисления записано число, его снабжают указателем справа внизу.
- Например, число **в десятичной системе** $\mathbf{5_{10}}$ будет в **двоичной** $\mathbf{101_2}$.
- Иногда двоичное число обозначают префиксом **0b (ноль b)**, например **0b101**.

# Двоичная система счисления

**Произношение**

- Во всех системах счисления (кроме десятичной) знаки читаются по одному. Например число $\mathbf{101_2}$ произносится «**один ноль один**».

- **Отрицательные двоичные числа** обозначаются так же как и десятичные: знаком «–» перед числом.
- Однако в вычислительной технике широко используется запись отрицательных двоичных чисел в **дополнительном коде**, что может вносить путаницу.
- Например число $\mathbf{-5_{10}}$ может быть записано как $\mathbf{-101_2}$ но в компьютере будет храниться как:

  $\mathbf{11111111\ 11111111\ 11111111\ 11111011_2}$ (в 4 байтах)

# Двоичная система счисления

- **Двоичная система счисления** является комбинацией двоичной системы кодирования и показательной весовой функции с **основанием 2**.
- Положительные целые числа (без знака) записываются в виде суммы степеней двойки от **0** до числа **n-1**:

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k 2^k,$$

- 49 = 1 * $\mathbf{2^5}$ + 1 * $\mathbf{2^4}$ + 0 * $\mathbf{2^3}$ + 0 * $\mathbf{2^2}$ + 0 * $\mathbf{2^1}$ + 1 * $\mathbf{2^0}$ = **110001**

# Преобразование десятичных чисел в двоичные

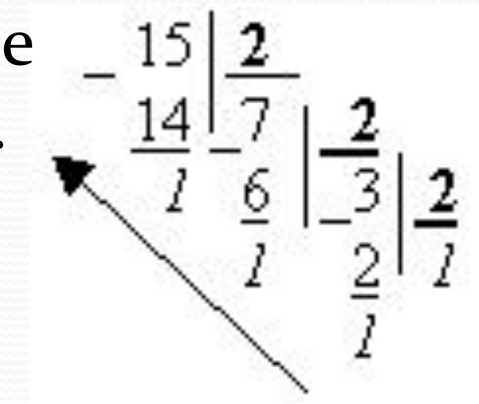
- Допустим, нам нужно перевести число **19** в двоичное. Вы можете воспользоваться следующей процедурой :
- **19 /2 = 9** с остатком **1**<br>**9 /2 = 4** с остатком **1**<br>**4 /2 = 2** без остатка **0**<br>**2 /2 = 1** без остатка **0**<br>**1 /2 = 0** с остатком **1**
- **Делим каждое частное на 2** и записываем остаток в конец двоичной записи.
- Продолжаем деление до тех пор, пока в частном не будет **0**.
- **Результат записываем справа налево.** То есть нижняя цифра (1) будет самой левой и т.д.
- В результате получаем число **19** в двоичной записи: **10011**.

# Преобразование дробных десятичных чисел в двоичные

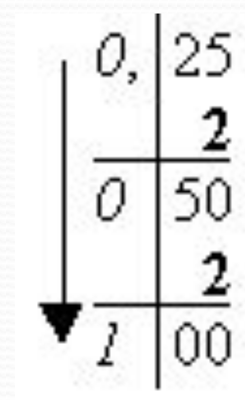
- Если в исходном числе есть **целая часть** то она преобразуется **отдельно от дробной**.
- **Дробь умножается** на основание двоичной системы счисления (**2**)
- В полученном произведении **выделяется целая часть**, которая принимается в качестве старшего разряда числа в двоичной системе счисления;
- **Алгоритм завершается**, если дробная часть полученного произведения равна нулю или если достигнута требуемая точность вычислений. В противном случае вычисления продолжаются над дробной частью произведения.

# Преобразование дробных десятичных чисел в двоичные

- Требуется перевести дробное десятичное число **15,25$_{10}$** в дробное двоичное число.




- Тогда нужно отдельно перевести целую часть и отдельно – дробную.
- Дробную часть **0,25** умножаем на основание **2**, занося целые части произведения в разряды после запятой искомого дробного двоичного числа:




- Ответ: **15,25$_{10}$ = 1111,01$_2$**

# Преобразование двоичных чисел в десятичные

- **Для преобразования из двоичной системы в десятичную** используют следующую таблицу степеней основания **2**:

| **512** | **256** | **128** | **64** | **32** | **16** | **8** | **4** | **2** | **1** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^9$ | $2^8$ | $2^7$ | $2^6$ | $2^5$ | $2^4$ | $2^3$ | $2^2$ | $2^1$ | $2^0$ |

- Начиная с цифры **1** все цифры умножаются на два. Точка, которая стоит после 1, называется двоичной точкой.

# Преобразование двоичных чисел в десятичные

- Допустим, дано двоичное число $\mathbf{110001_2}$.
- Для перевода в десятичное запишите его как сумму по разрядам следующим образом:

$$\mathbf{1} * 2^5 + \mathbf{1} * 2^4 + \mathbf{0} * 2^3 + \mathbf{0} * 2^2 + \mathbf{0} * 2^1 + \mathbf{1} * 2^0 = 49$$

- **То же самое чуть иначе:**

$$\mathbf{1} * 32 + \mathbf{1} * 16 + \mathbf{0} * 8 + \mathbf{0} * 4 + \mathbf{0} * 2 + \mathbf{1} * 1 = 49$$

- **То есть:**

$$\mathbf{32} + \mathbf{16} + \mathbf{1} = 49$$

# Преобразование дробных двоичных чисел в десятичные

- Нужно перевести число **$1011010{,}101_2$** в десятичную систему. Запишем это число следующим образом:

  $\mathbf{1}*2^6 + \mathbf{0}*2^5 + \mathbf{1}*2^4 + \mathbf{1}*2^3 + \mathbf{0}*2^2 + \mathbf{1}*2^1 + \mathbf{0}*2^0 + \mathbf{1}*2^{-1} + \mathbf{0}*2^{-2} + \mathbf{1}*2^{-3} = 90{,}625$

- **То же самое чуть иначе:**

  $\mathbf{1}*64 + \mathbf{0}*32 + \mathbf{1}*16 + \mathbf{1}*8 + \mathbf{0}*4 + \mathbf{1}*2 + \mathbf{0}*1 + \mathbf{1}*0{,}5 + \mathbf{0}*0{,}25 + \mathbf{1}*0{,}125 = 90{,}625$

- **То есть:**

  $64 + 16 + 8 + 2 + 0{,}5 + 0{,}125 = 90{,}625$

# Сложение, вычитание двоичных чисел

- Таблицы сложения и вычитания

| + | 0 | 1 |
|---|---|---|
| **0** | 0 | 1 |
| **1** | 1 | 10 |

| - | 0 | 1 |
|---|---|---|
| **0** | 0 | -1 |
| **1** | 1 | 0 |

- Пример сложения «столбиком» ($14_{10} + 5_{10} = 19_{10}$ или $1110_2 + 101_2 = 10011_2$):

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| + | | 1 | 1 | 1 | 0 |
| | | | 1 | 0 | 1 |
| ----------------------- | | | | | |
| | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

# Умножение двоичных чисел

- Таблица умножения

| * | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

- Пример умножения «столбиком» ($14_{10}$ * $5_{10}$ = $70_{10}$ или $1110_2$ * $101_2$ = $1000110_2$):

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| × | | | | 1 | 1 | 1 | 0 |
| | | | | | 1 | 0 | 1 |
| | | | | | | | |
| + | | | | 1 | 1 | 1 | 0 |
| | | 1 | 1 | 1 | 0 | | |
| | | | | | | | |
| | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |

# Шестнадцатеричная система счисления

- **Шестнадцатеричная система счисления** — позиционная система счисления по целочисленному основанию **16**.
- Обычно в качестве шестнадцатеричных цифр используются десятичные **цифры от 0 до 9** и латинские **буквы от A до F** для обозначения цифр от $10_{10}$до $15_{10}$,
- то есть (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F).

# Шестнадцатеричная система счисления

**Применение**

- Широко используется в низкоуровневом программировании и компьютерной документации, поскольку в современных компьютерах минимальной единицей памяти является 8-битный байт, значения которого удобно записывать двумя шестнадцатеричными цифрами.

# Перевод чисел из десятичной в шестнадцатеричную систему

- Перевод осуществляется так же, как и в двоичной системе, но с основанием **16**.
- Переведём число $\mathbf{56{,}567_{10}}$ в шестнадцатеричное:

| **Целая часть от деления** | **Остаток от деления** |
|---|---|
| 56 /16 = 3 | 8 |
| 3 /16 = 0 | 3 |
| 0 /16 = 0 | 0 |

- Остаток от деления записываем в обратном порядке.
- Получаем $\mathbf{56_{10} = 038_{16}}$

# Перевод чисел из десятичной в шестнадцатеричную систему

- Для перевода дробной части числа последовательно умножаем дробную часть на основание 16. В результате каждый раз записываем целую часть произведения.

**0.567*16** = **9**.072 (целая часть **9**)
**0.072*16** = **1**.152 (целая часть **1**)
**0.152*16** = **2**.432 (целая часть **2**)
**0.432*16** = **6**.912 (целая часть **6**)

- Получаем **0.567** = $\mathbf{9126_{16}}$
- Таким образом, число $\mathbf{56{,}567_{10}}$ в шестнадцатеричной системе счисления записывается как $\mathbf{38{,}9126_{16}}$.

# Перевод чисел из 16-ой системы в 10-ую

- Для перевода шестнадцатеричного числа в десятичное необходимо это число представить в виде суммы произведений степеней основания шестнадцатеричной системы счисления на соответствующие цифры в разрядах шестнадцатеричного числа.
- Например, требуется перевести шестнадцатеричное число **5A3** в десятичное. В этом числе **3** цифры. В соответствии с вышеуказанным правилом представим его в виде суммы степеней с основанием **16**:
- $\mathbf{5A3_{16} = 3 \cdot 16^0 + 10 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^2 = 3 \cdot 1 + 10 \cdot 16 + 5 \cdot 256 = 3 + 160 + 1280 = 1443_{10}}$

# Перевод чисел из 2-ой системы в 16-ую и наоборот

- **Для перевода многозначного двоичного числа** в шестнадцатеричную систему нужно разбить его на **тетрады** справа налево и заменить каждую тетраду соответствующей **шестнадцатеричной цифрой**.
- **Для перевода числа из шестнадцатеричной системы** в двоичную нужно заменить каждую его цифру на соответствующую **тетраду** из нижеприведенной таблицы перевода.

- **Например:**
- **010110100011$_2$ = 0101 1010 0011 = 5A3$_{16}$**

# Таблица перевода чисел

**hex** – шестнадцатеричная
**dec** – десятичная
**oct** – восьмеричная

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{0}_{hex}$ | = | $0_{dec}$ | = | $0_{oct}$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\mathbf{1}_{hex}$ | = | $1_{dec}$ | = | $1_{oct}$ | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $\mathbf{2}_{hex}$ | = | $2_{dec}$ | = | $2_{oct}$ | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $\mathbf{3}_{hex}$ | = | $3_{dec}$ | = | $3_{oct}$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $\mathbf{4}_{hex}$ | = | $4_{dec}$ | = | $4_{oct}$ | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $\mathbf{5}_{hex}$ | = | $5_{dec}$ | = | $5_{oct}$ | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $\mathbf{6}_{hex}$ | = | $6_{dec}$ | = | $6_{oct}$ | 0 | 1 | 1 | 0 |
| $\mathbf{7}_{hex}$ | = | $7_{dec}$ | = | $7_{oct}$ | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $\mathbf{8}_{hex}$ | = | $8_{dec}$ | = | $10_{oct}$ | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $\mathbf{9}_{hex}$ | = | $9_{dec}$ | = | $11_{oct}$ | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $\mathbf{A}_{hex}$ | = | $10_{dec}$ | = | $12_{oct}$ | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $\mathbf{B}_{hex}$ | = | $11_{dec}$ | = | $13_{oct}$ | 1 | 0 | 1 | 1 |
| $\mathbf{C}_{hex}$ | = | $12_{dec}$ | = | $14_{oct}$ | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $\mathbf{D}_{hex}$ | = | $13_{dec}$ | = | $15_{oct}$ | 1 | 1 | 0 | 1 |
| $\mathbf{E}_{hex}$ | = | $14_{dec}$ | = | $16_{oct}$ | 1 | 1 | 1 | 0 |
| $\mathbf{F}_{hex}$ | = | $15_{dec}$ | = | $17_{oct}$ | 1 | 1 | 1 | 1 |

# Представление отрицательных чисел

- **Дополнительный код** (англ. two’s complement) — наиболее распространённый способ представления отрицательных целых чисел в компьютерах.
- **Он позволяет заменить операцию вычитания** на операцию сложения и сделать операции сложения и вычитания одинаковыми для знаковых и беззнаковых чисел, чем упрощает архитектуру ЭВМ.
- **Дополнительный код отрицательного числа можно получить** инвертированием модуля двоичного числа (первое дополнение) и прибавлением к инверсии единицы (второе дополнение), либо вычитанием числа из нуля.

# Представление отрицательных чисел

- При записи числа в дополнительном коде **старший разряд является знаковым**.
- Если его значение равно **0**, то в остальных разрядах записано положительное двоичное число, совпадающее с прямым кодом.
- Если число, записанное в прямом коде, отрицательное, то все разряды числа инвертируются, а к результату прибавляется 1. К получившемуся числу дописывается старший (знаковый) разряд, равный 1.

# Представление отрицательных чисел

- **Двоичное 8-ми разрядное число со знаком** в дополнительном коде может представлять любое целое в диапазоне от –128 до +127.
- Если старший разряд равен нулю, то наибольшее целое число, которое может быть записано в оставшихся 7 разрядах равно , что равно **127**.

| Десятичное представление | Код двоичного представления (8 бит) | | |
|---|---|---|---|
| | прямой | обратный | дополнительный |
| 127 | 01111111 | 01111111 | 01111111 |
| 1 | 00000001 | 00000001 | 00000001 |
| 0 | 00000000 | 00000000 | 00000000 |
| -0 | 10000000 | 11111111 | --- |
| -1 | 10000001 | 11111110 | 11111111 |
| -2 | 10000010 | 11111101 | 11111110 |
| -3 | 10000011 | 11111100 | 11111101 |
| -4 | 10000100 | 11111011 | 11111100 |
| -5 | 10000101 | 11111010 | 11111011 |
| -6 | 10000110 | 11111001 | 11111010 |
| -7 | 10000111 | 11111000 | 11111001 |
| -8 | 10001000 | 11110111 | 11111000 |
| -9 | 10001001 | 11110110 | 11110111 |
| -10 | 10001010 | 11110101 | 11110110 |
| -11 | 10001011 | 11110100 | 11110101 |
| -127 | 11111111 | 10000000 | 10000001 |
| -128 | --- | --- | 10000000 |

# Преобразование в дополнительный код

- **Преобразуем отрицательное число –5, записанное в прямом коде, в дополнительный.**
- **Прямой код числа –5, взятого по модулю:**

  101
- **Инвертируем все разряды числа, получая таким образом обратный код:**

  010
- **Добавим к результату 1:**

  011
- **Допишем слева знаковый единичный разряд:**

  1011

# Экспоненциальная запись

- **Экспоненциа́льная за́пись** — представление действительных чисел в виде мантиссы и порядка. Удобна при представлении очень больших и очень малых чисел, а также для унификации их написания.

$$N = M * n^p$$, где

- **N** — записываемое число;
- **M** — мантисса;
- **n** — основание показательной функции;
- **p** (целое) — порядок;
- $n^p$ — характеристика числа.

**Пример:**

- 1 000 000 (один миллион): **$1{,}0 * 10^6$**
- N = 1 000 000, M = 1,0, n = 10, p = 6

# Компьютерный способ экспоненциальной записи

- На компьютере (в частности в тексте компьютерных программ) экспоненциальную запись записывают в виде **MEp**, где:
- **M** — мантисса,
- **E** (exponent) — буква E, означающая «*10^» («…умножить на десять в степени…»)
- **p** — порядок.

- Например: $1{,}602176565\text{E-}19 = 1{,}602176565 \cdot 10^{-19}$

# Компьютерный способ экспоненциальной записи

- В программировании часто используют символ «+» для неотрицательного порядка и ведущие нули, а в качестве десятичного разделителя — точку:

$$1{,}048576\text{E}{+}06 = 1\,048\,576;$$

$$3.14\text{E}{+}00 = 3,14$$

- Для улучшения читаемости иногда используют строчную букву **e**: $6{,}02214129\text{e}23$