Семинар NAS101 | 2006 | **MSC.Software Corporation** Постоянное представительство в СНГ Москва

Раздел 6

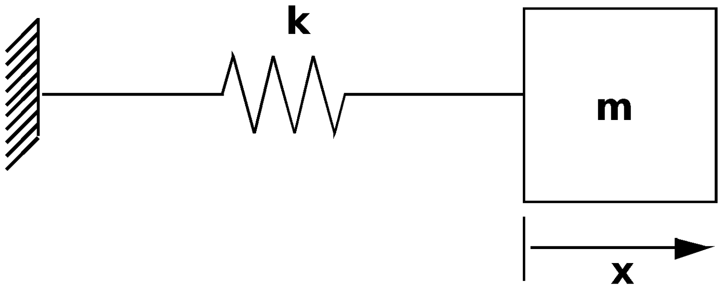
Собственные частоты и формы колебаний

Основные уравнения

- **Рассмотрим систему с одной степенью свободы без демпфирования, как показано на рисунке:**

где m - масса

k - жесткость



- **Уравнение движения при свободных колебаниях (т.е. без внешней нагрузки или демпфирования) выглядит так:**

$$m\ddot{x} = -kx$$

или

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Основные уравнения (продолжение)

- **Для системы с несколькими степенями свободы уравнение примет вид:**

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = 0$$

где [K] - Матрица жесткости (такая же как и в статическом анализе).

[M] - Матрица масс (представляет инерционные свойства конструкции).

- **Матрицы [K] и [M] должны быть вещественными и симметричными.**

- **Запомните:**
  - Число степеней свободы равно числу координат, необходимых для описания деформированной формы конструкции в каждый данный момент времени.

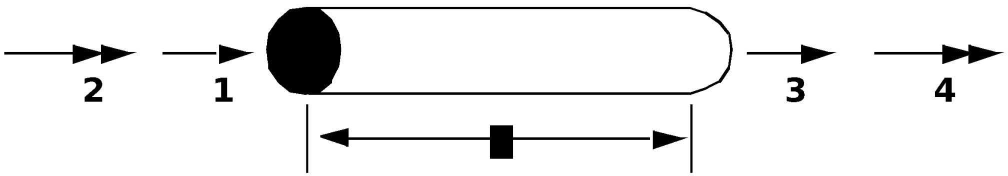
Матрица масс

- **Матрица масс представляет инерционные свойства конструкции.**
- **MSC Nastran предоставляет пользователю две возможности для определения матрицы масс:**

- **Несогласованная матрица масс** (используется по умолчанию)
  - Содержит только диагональные члены, связанные с поступательными степенями свободы.
- **Согласованная матрица масс**
  - Содержит также внедиагональные члены, связывающие поступательные степени свободы и вращательные степени свободы.
    (Примечание: для стержневых элементов связываются только степени свободы поступательного движения.)

Матрица масс (продолжение)

- **Пример матрицы масс**



где ρ - массовая плотность

A - площадь сечения

- **Несогласованная матрица масс**

$$[M] = \rho AL \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Согласованная матрица масс**

$$[M] = \rho AL \begin{bmatrix} 5/12 & 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/12 & 0 & 5/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Матрица масс (продолжение)

- **<u>Согласованная и несогласованная матрицы масс</u>**
- **Согласованная матрица масс, в общем случае, более точная чем несогласованная матрица масс.**
- **Несогласованная матрица масс предпочтительнее с точки зрения скорости расчета при динамическом анализе.**
- **Выбираются пользователем согласованные матрицы масс для элементов:**
  - PARAM,COUPMASS,1 выбирает согласованную матрицу масс для всех элементов BAR, ROD, и PLATE которые включают в себя изгибную жесткость.
  - По умолчанию выбирается несогласованная матрица масс.
- **Элементы, которые могут иметь как согласованную, так и несогласованную матрицу масс:**
  - BAR, BEAM, CONROD, HEXA, PENTA, QUAD4, QUAD8, ROD, TETRA, TRIA3, TRIA6, TRIAX6, TUBE

Матрица масс (продолжение)

- **Элементы имеющие только несогласованную матрицу масс:**
  - CONEAX, SHEAR
- **Элементы имеющие только согласованную матрицу масс:**
  - BEND, HEX20, TRAPRG, TRIARG
- **Несогласованная матрица масс содержит только диагональные компоненты, связанные с поступательным движением (без вращения).**
- **Согласованная матрица масс содержит внедиагональные компоненты, связанные как с поступательным движением, так и с вращательным для элементов типа BAR, BEAM, и BEND.**

Теория

- **Рассмотрим уравнение**

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = 0 \qquad (6\text{-}1)$$

- **Представим гармоническое решение в виде**

$$\{x\} = \{\phi\}e^{i\omega t} \qquad (6\text{-}2)$$

- **(Физический смысл этого в том, что по всем координатам осуществляется синхронное движение и конфигурация системы не меняет свою форму во время движения, меняется только амплитуда.)**
- **Из уравнения 6-2 получим**

$$\{\ddot{x}\} = -\omega^2\{\phi\}e^{i\omega t} \qquad (6\text{-}3)$$

Теория (продолжение)

- **Подставив уравнения (6-2) и (6-3) в уравнение (6-1), получим:**

$$-\omega^2[M]\{\phi\}e^{i\omega t}+[K]\{\phi\}e^{i\omega t}=0$$

которое, после преобразования примет вид:

$$\left([K]-\omega^2[M]\right)\{\phi\}=0 \qquad (6\text{-}4)$$

- **Это обобщенная проблема на собственные значения.**

Теория (продолжение)

- **Поэтому, существует два варианта решения данного уравнения:**

1. Если $\det([K] - \omega^2 [M]) \neq 0$, то из уравнения (6-4) следует, что есть только одно решение:

$$\{\varphi\} = 0$$

- это, так называемое, тривиальное решение, которое с физической точки зрения интереса не представляет

2. Тогда, чтобы получить нетривиальное решение относительно $\{\varphi\}$, необходимо, чтобы:

$$\det([K] - \omega^2 [M]) = 0$$

Теория (продолжение)

- **Проблема собственных значений сводится к решению уравнения**

$$\det\left([\,K\,] - \omega^2 [\,M\,] \right) = 0$$

или

$$\det\left([\,K\,] - \lambda [\,M\,] \right) = 0$$

где

$$\lambda = \omega^2$$

Теория (продолжение)

- Если конструкция имеет *N* динамических степеней свободы (степеней свободы с массой), то имеется *N* чисел ω, которые будут решением проблемы собственных значений.
  Эти ω (ω_1, ω_2, ..., ω_N) и есть собственные частоты, так же известные как резонансные частоты, основные частоты и частотные характеристики.
- Собственный вектор $\{\phi_j\}$ связанный с собственной частотой ω_j и называется собственной формой или формой колебаний. Собственная форма соответствует отклонению модели от состояния покоя.
- Когда конструкция вибрирует, ее форма в каждый момент времени является линейной комбинацией собственных форм колебаний.

Теория (продолжение)

- **Пример:**

Свободно опертая балка

Форма 1

Форма 2

Форма 3

и т. д.

Для чего нужно вычислять собственные частоты и формы колебаний

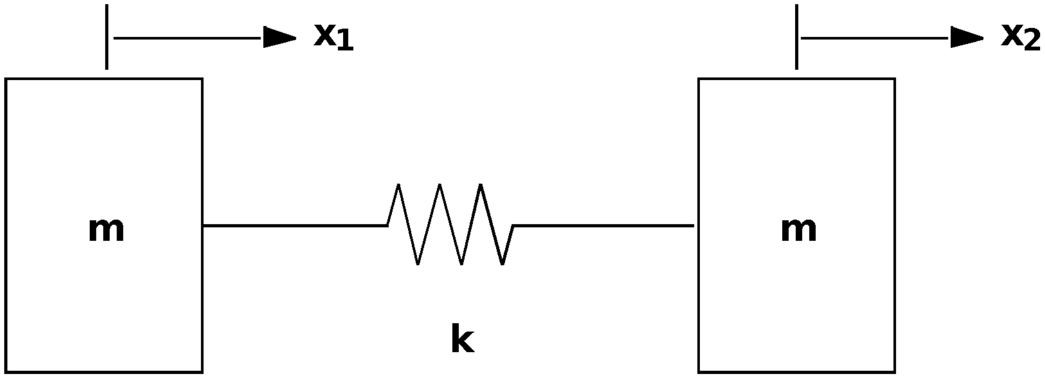
- **Для определения динамических характеристик конструкции.**
  - Например, если вращающийся механизм помещается в некоторую конструкцию, то для избежания чрезмерных вибраций желательно проверить насколько близки его частоты вращения к собственным частотам конструкции.
- **Для определения динамического усиления нагрузки.**
- **Собственные частоты и формы используются для того, чтобы знать как проводить последующий динамический анализ**
  - (нестационарные процессы, спектральный анализ), например, если требуется выбрать подходящий временной шаг δt для интегрирования уравнения движения в нестационарном анализе.

Для чего нужно вычислять собственные частоты и формы колебаний (продолжение)

- Для использования собственных частот и форм при последующем динамическом анализе, например, в анализе нестационарных процессов с использованием модальных методов.
- Для проведения экспериментальных исследований, например, для определения местонахождения акселерометров и т. д.

Важные замечания относительно анализа собственных частот и форм колебаний

- **Если конструкция не полностью закреплена, например, допускается перемещение ее как твердого тела (форма колебаний без напряжений) или механизма, то как минимум одна собственная частота будет равняться нулю.**
- **Пример: Следующая не закрепленная конструкция может перемещаться как твердое тело.**



$$\omega_1 = 0 \{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

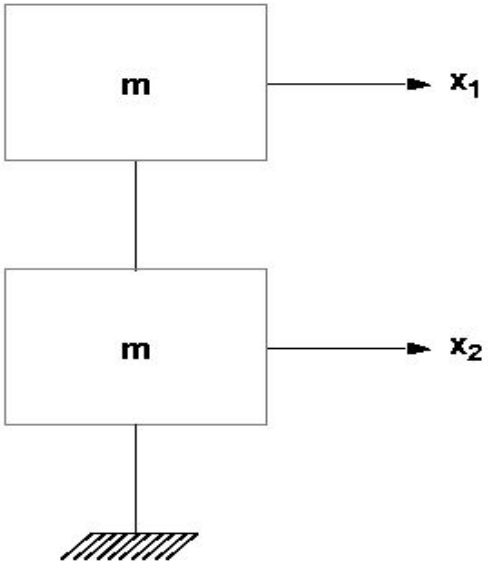
Важные замечания относительно анализа собственных частот и форм колебаний
(продолжение)

- Собственные частоты (ω_1, ω_2, ...,) имеют размерность *радиан/с*. Они также могут быть представлены в герцах (цикл/с), с помощью выражения

$$f_j\left(герц\right)=\frac{\omega_j\left(радиан/c\right)}{2\pi}$$

Важные замечания относительно анализа собственных частот и форм колебаний
(продолжение)

- Масштабирование собственных форм произвольное. Например:



$$\{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{Bmatrix}, \{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} 300 \\ 150 \end{Bmatrix} \quad \{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} .66 \\ .33 \end{Bmatrix}$$

представляют одну и ту же "форму колебаний"

Важные замечания относительно анализа собственных частот и форм колебаний
(продолжение)

- **Определение собственных частот, т. е., решение уравнения**

$$\det\left([K] - \omega^2 [M]\right) = 0$$

является сложной задачей.

- **Для решения этой задачи должны применяться численные методы.**

Методы вычислений

- **MSC Nastran предоставляет пользователю следующие три подхода к нахождению собственных значений:**
- **Метод итераций**
  - Собственные значения (или собственные частоты) определяются одно за другим методом итераций. Имеются два варианта метода INV и SINV. Эти методы наиболее удобны при определении нескольких собственных частот. В общем SINV более надежен, чем INV.
- **Метод трансформаций**
  - Общая проблема собственных значений

$$([K]-\lambda[M])\{\phi\}=0$$

Методы вычислений (продолжение)

преобразуется в форму:

$$[A]\{\phi\} = \lambda\{\phi\}$$

- Затем матрица [A] трансформируется в трехдиагональную матрицу, с использованием методов Гивенса или Хаусхольдера.
  В конце концов, все собственные значения извлекаются одновременно с использованием QR алгоритма.
  Имеются два варианта метода Гивенса и два варианта метода Хаусхольдера: GIV, MGIV, HOU и MHOU.
  Эти методы более эффективны, когда требуется определить большое количество собственных значений

Методы вычислений (продолжение)

- **Метод Ланцоша**
  - Это рекомендуемый метод, который является комбинацией методов итераций и трансформаций. Этот метод наиболее эффективен для расчета малого числа собственных значений в больших разреженных задачах
    (большинство КЭ моделей попадают в эту категорию).

Записи для анализа собственных частот

- **Секция EXECUTIVE CONTROL**
  - SOL 103
- **Секция CASE CONTROL**
  - METHOD=x Номер указывающий на записи EIGR или EIGRL, имеющиеся в секции BULK DATA.
    С дополнительным множителем могут быть использованы сразу несколько SUBCASE
- **Секция BULK DATA**
  - EIGR Запись для нахождения собственных значений

  или

  - EIGRL Запись для метода Ланцоша.
  - Требуются массовые свойства.

Массовые свойства

- **Конструкционная масса**
  - Добавляет массу элементов
    (например, для расчета гравитационного эффекта)

Плотность в записях MATi,
единицы =
("масса"/объем)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
MAT1	**MID**	**E**	**G**	**NU**	**RHO**				
MAT1	**1**	**10.+7**		**0.3**	**0.1**				

- **Не конструкционная масса**
  - Добавляет массу (пример – нагрузка на строительное перекрытие, нагрузка на грузовой корабль)

Массовые свойства (продолжение)

- **Масса на единицу размера (масса на единицу площади в данном случае)**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
PSHELL	**PID**	**MID1**	**T**	**MID2**	**$121/T^3$**	**MID3**	**TS/T**	**NSM**	
PSHELL	**2**	**1**	**0.1**	**1**		**1**		**0.15**	

- **Сосредоточенная масса**
  - Явные массовые свойства в узле (CONM2)
    (отступ центра тяжести сосредоточенной массы от узловой точки, моменты, инерционные характеристики)

Массовые свойства (продолжение)

- **Единицы массы**
  - Программа подразумевает что размерности инерции:

    lb-sec^2/ft (ft-lb-sec система)

    кг-сек^2/м
  - PARAM,WTMASS умножает входные данные для получения размерности инерции. Обычно используется для замены весовых размерностей на массовые.
  - Пример:
    - Плотность (RHO) стали задана как 490.0 lb/ft^3 в MAT1.
    - Используйте PARAM,WTMASS,.031056, который умножит элементы матрицы масс конструкции на 1/g (= 1/32.174 ft/sec^2) для того, чтобы перевести плотность в соответствующие единицы инерции.

Массовые свойства (продолжение)

- **Генератор весов узловых точек** **PARAM,GRDPNT,0**

```
   O U T P U T   F R O M   G R I D   P O I N T   W E I G H T   G E N E R A T O R
                            REFERENCE POINT =         0
                                      M O
 *  4.322800E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  2.417940E+00 -2.161400E+01 *
 *  0.000000E+00  4.322800E+00  0.000000E+00 -2.417940E+00  0.000000E+00  4.322800E+01 *
 *  0.000000E+00  0.000000E+00  4.322800E+00  2.161400E+01 -4.322800E+01  0.000000E+00 *
 *  0.000000E+00 -2.417940E+00  2.161400E+01  1.679263E+02 -2.161400E+02 -2.417940E+01 *
 *  2.417940E+00  0.000000E+00 -4.322800E+01 -2.161400E+02  5.904396E+02 -1.208970E+01 *
 * -2.161400E+01  4.322800E+01  0.000000E+00 -2.417940E+01 -1.208970E+01  7.532883E+02 *
```

Матрица масс жесткого тела (MO) относительно ссылочной точки в основной системе координат.

```
                                      S
                     *  1.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00 *
                     *  0.000000E+00  1.000000E+00  0.000000E+00 *
                     *  0.000000E+00  0.000000E+00  1.000000E+00 *
```

Матрица преобразования из основной системы координат в систему главных осей инерции

```
        DIRECTION
   MASS AXIS SYSTEM (S)     MASS              X-C.G.        Y-C.G.        Z-C.G.
           X             4.322800E+00      0.000000E+00  5.000000E+00  5.593458E-01
           Y             4.322800E+00      1.000000E+01  0.000000E+00  5.593458E-01
           Z             4.322800E+00      1.000000E+01  5.000000E+00  0.000000E+00
```

Главные массы и соответственно центр тяжести

```
                                     I(S)
                     *  5.850388E+01 -2.842171E-14 -3.552714E-15 *
                     * -2.842171E-14  1.568072E+02 -3.552714E-15 *
                     * -3.552714E-15 -3.552714E-15  2.129383E+02 *
```

Матрица инерции I(S) в центре тяжести в системе главных осей масс.

```
                                     I(Q)
                     *  5.850388E+01                              *
                     *                1.568072E+02                *
                     *                              2.129383E+02  *
```

Матрица инерции I(Q) в центре тяжести в системе главных осей инерции.

```
                                      Q
                     *  1.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00 *
                     *  0.000000E+00  1.000000E+00  0.000000E+00 *
                     *  0.000000E+00  0.000000E+00  1.000000E+00 *
```

Матрица преобразования [Q] из S-осей и Q-осей.

<u>Примечание:</u> 1. Это стандартный вывод генератора весов узловых точек. Он получается с помощью задания в параметре GRDPNT целого числа, значение которого определяет номер ссылочного узла сетки. Если это число 0 или несуществующий узел, то в качестве ссылочной точки выбирается начало отсчета базовой системы координат.

Запись SUPORT

- **<u>Запись SUPORT в секции Bulk Data</u>**
- **Для вычисления форм колебаний конструкции как твердого тела используются специальные подпрограммы.**
  - Esthetics Абсолютные нулевые собственные значения вместо вычисления нулей (для всех методов кроме метода Ланцоша, где программа будет "судить": либо собственное значение должно быть 0.0, либо нет).
  - Cost Отдельная подпрограмма, используемая для расчета форм колебаний конструкции как жесткого тела, может значительно уменьшить время CPU

SUPORT	ID	C	ID	C	ID	C	ID	C	
SUPORT	16	125							

Запись SUPORT (продолжение)

- **Замечания:**
  - Статистически определенный набор закреплений
  - Достаточное число закреплений, поддерживающее все моды твердого тела
  - Метод Ланцоша использует вычисленные собственные вектора

Записи для анализа собственных частот (продолжение)

- **EIGRL Рекомендуемая запись для расчета собственных частот**
  - Описывает данные, необходимые для определения собственных частот или анализа устойчивости методом Ланцоша.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
EIGRL	**SID**	**V1**	**V2**	**ND**	**MSGLVL**	**MAXSET**	**SHFSCL**	**NORM**	
EIGRL	**1**	**0.1**	**3.2**	**10**					

Поле **Содержание**

- SID Идентификатор (уникальное целое положительное число)

Записи для анализа собственных частот (продолжение)

- V1, V2 Частотный анализ: интересующий диапазон частот

  Анализ устойчивости: интересующий диапазон λ ($V_1<V_2$, вещественные числа). Если нужны все формы ниже некоторой частоты, задайте V_2 и оставьте поле V_1 пустым. Не рекомендуется задавать 0.0 для V_1 , более эффективно использовать маленькое отрицательное число или поле его пустым
- ND Требуемое число корней (целое положительное число или пробел)
- MSGLVL Уровень диагностики (целое число от 0 до 3 или пробел)
- MAXSET Число векторов в блоке (целое число от 1 до 15 или пробел)

Записи для анализа собственных частот
(продолжение)

- EIGRL Рекомендуемая запись для расчета собственных частот
- SHFSCL Оценка первой из собственных частот (действительное число или пробел)
- NORM Метод нормирования собственных векторов, одно из BCD значений либо "MASS", либо "MAX".
  - MASS Нормирование по обобщенной массе масс (по умолчанию)
  - MAX Нормирование по наибольшей компоненте

Записи для анализа собственных частот
(продолжение)

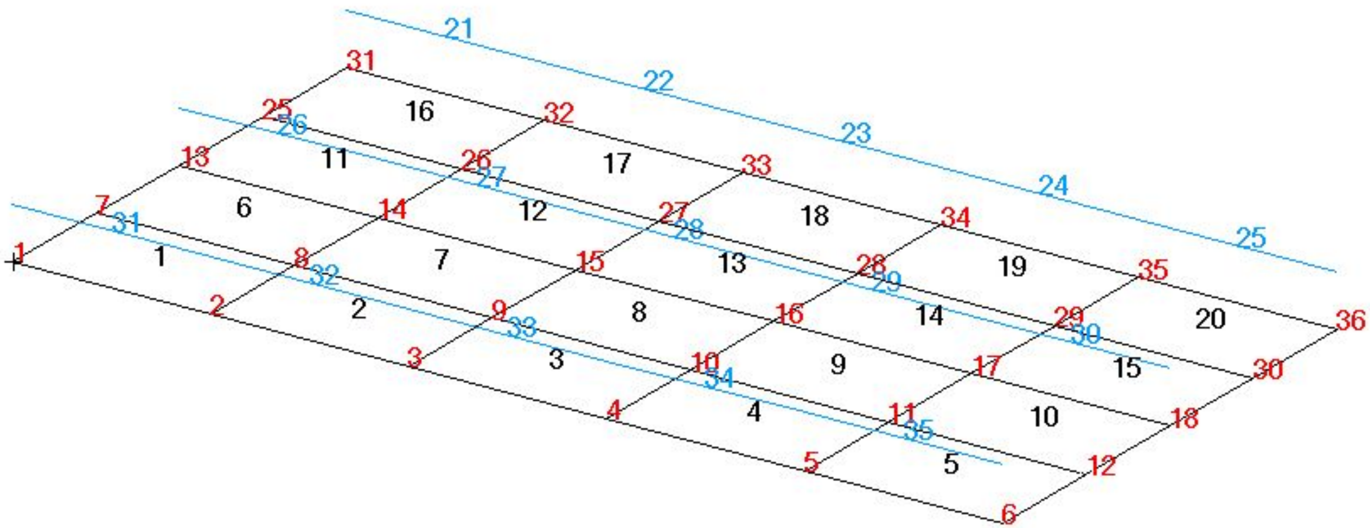
- **Основываясь на входных данных, программа будет:**
  - Рассчитывать все корни ниже V2 (V1 = пустое, V2 = наибольшее интересующее значение собственной частоты, ND - пробел)
  - Рассчитывать максимум ND корней между V1 и V2 (V1, V1, ND - заданы)
  - Рассчитывать ND корней выше V1 (V1 = самое низкое интересующее значение частоты, V2 = пустое, ND = требуемое число корней)
  - Рассчитывать первые ND корней (V1 и V2 пустые, ND = требуемое число корней).
  - Рассчитывать все корни между V1 и V2 (V1 = самое низкое интересующее значение частоты, V2 = наибольшее интересующее значение собственной частоты, ND = пустое)

Семинар NAS101 | 2006 | **MSC.Software Corporation** Постоянное представительство в СНГ Москва

Пример 8

Анализ собственных частот подкрепленной панели

Анализ собственных частот подкрепленной панели (продолжение)



Анализ собственных частот подкрепленной панели (продолжение)

- **Описание модели**
  - Та же самая модель подкрепленной панели, которая была использована в Примере 5.
    - Рассчитайте первые 6 собственных значений частот.
    - Проверьте корректность используемых единиц измерения