

# Современные проблемы информатики

## Лекция 2

### Алгебра поведений

# Что такое поведение? (инвариант бисимуляционной эквивалентности)

В теории автоматов:

**Автомат** есть транзитивная система, размеченная парами вход/выход  
**Поведение** есть автоматное отображение

Или

**Автомат** есть настроенная транзитивная система, размеченная  
входными символами

**Поведение** есть язык

1. **Domain theory approach** (S.Abramsky 1991)
2. **ACP with recursion** (J.A.Bergstra and J.W.Klop, 1984)
3. **Coalgebraic approach** (P.Aczel, 1988, later B.Jacobs and J.Rutten)
4. **Continuous algebras** (A.Letichevsky, D.Gilbert, 1997)

# Алгебра поведений

- Два сорта:  $\langle U, A \rangle$

- $U$  – поведения
- $A$  – действия

- Сигнатура:

- префиксинг  $a.u$
- недетерминированный выбор  $u + v$
- константы  $\Delta, 0, \perp$
- отношение аппроксимации  $\sqsubseteq$

- Аксиомы:

- аксиомы для недетерминированного выбора
- $0$  есть нейтральный элемент недетерминированного выбора
- $\sqsubseteq$  есть отношение частичного порядка с наименьшим элементом  $\perp$
- Обе операции монотонны и непрерывны (сохраняют наименьшие верхние грани)

**Дополнительные структуры:**

Действия: комбинация действий  $\times$ , невозможное и нейтральное действия

Атрибуты: функции на поведении

# МОНОТОННОСТЬ

$$\perp \sqsubseteq u$$

$$u \sqsubseteq v \Rightarrow u + w \sqsubseteq v + w$$

$$u \sqsubseteq v \Rightarrow a.u \sqsubseteq a.v$$

# Непрерывность

Направленное множество

$$\forall (d', d'' \in D) \exists (d \in D) (d' \sqsubseteq d \wedge d'' \sqsubseteq d)$$

Наименьшая верхняя грань  $\bigsqcup D, \bigsqcup_{d \in D} d$

Непрерывность

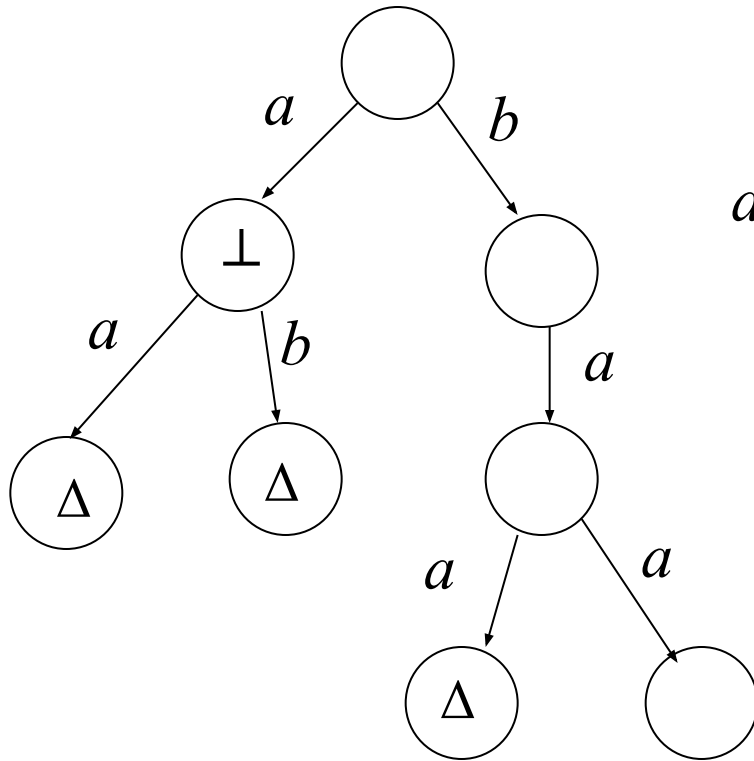
$$a. \bigsqcup_{d \in D} D = \bigsqcup_{d \in D} a.d$$

$$u + \bigsqcup_{d \in D} D = \bigsqcup_{d \in D} (u + d)$$

## Монотонность следует из непрерывности

$$x \sqsubseteq y \Rightarrow x \sqcup y = y \Rightarrow f(x \sqcup y) = f(x) \sqcup f(y) = f(y) \Rightarrow f(x) \sqsubseteq f(y)$$

# Поведение есть элемент алгебры поведений



$$a.(a+b+\perp)+b.a.(a+a.0)$$

$$a. \Delta = a$$

# Как построить алгебру всех поведений произвольных систем над множеством действий $A$ ?

$$F_{fi}^n(A) \subset F_{fi}^\infty(A) \subset F(A)$$

**Алгебра конечных поведений**

**Алгебра поведений конечной высоты**

**Алгебра бесконечных поведений**



# Алгебра конечных поведений

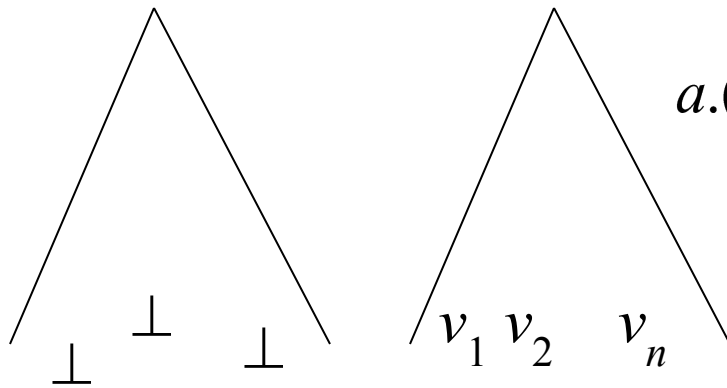
$$F_{fin}(A)$$

Порождается терминальными константами  $0, \Delta, \perp$

Состоит из выражений в сигнатуре  $+, (().())$

Отношение аппроксимации:

$$u \sqsubseteq v \Leftrightarrow \exists \varphi(x_1, \dots, x_n) \exists (v_1, \dots, v_n) (u = \varphi(\perp, \dots, \perp) \wedge v = \varphi(v_1, \dots, v_n))$$



$$a.(b.\Delta + b.(\Delta + \perp)) \sqsubseteq a.(b.\Delta + b.(\Delta + c.\Delta))$$

# Каноническая форма

$$u = \left( \sum_{i \in I} a_i \cdot u_i \right) + \varepsilon_u$$

$I$  – конечное множество индексов,  $\varepsilon_u = 0, \Delta, \perp, \Delta + \perp$

$u$  сходится, если  $\varepsilon_u = 0, \Delta$  и расходится в противном случае

**Если все  $a_i \cdot u_i$  различны и  $u_i$  представлены в такой же форме, то представление  $u$  единственно с точностью до коммутативности недетерминированного выбора.**

Индукция по высоте терма  $h(u)$

$$h(\varepsilon) = 0, h(a.u) = h(u) + 1, h(u + v) = \max(h(u), h(v))$$

# Критерий аппроксимации

$$u \sqsubseteq v \Leftrightarrow$$

$$1. \varepsilon_u \sqsubseteq \varepsilon_v$$

$$2. u = a.u' + u'' \Rightarrow v = a.v' + v'', u' \sqsubseteq v'$$

$$3. v = a.v' + v'', u \downarrow \Rightarrow u = a.u' + u'', u' \sqsubseteq v'$$

Индукция по высоте  $u$

# $F_{fin}(A)$ есть инициальная алгебра поведений

## Свободные алгебры поведений $F_{fin}(A, X)$

.....

$$u = a.u'_m + u''_m \Rightarrow v = a.v'_m + v''_m \Rightarrow$$

.....

$$u = a.u'_k + u''_k \Rightarrow a.v'_k + v''_k$$

$$u = a.u'_m + u''_m \Rightarrow v = a.v'_m + v''_m \Rightarrow$$

$$u'_m \sqsubseteq \dots \sqsubseteq u'_k \sqsubseteq v'_k \sqsubseteq u'_m \Rightarrow$$

$$u'_m = v'_k, u''_m = v''_k \Rightarrow u = v$$

# Алгебра поведений конечной высоты

$$F_{fin}^{\infty}(A) = \prod_{n=0}^{\infty} F^{(n)}$$

$$F^{(0)} = \{0, \Delta, \perp, \Delta + \perp\}$$

$$F^{(n+1)} = \left\{ \sum_{i \in I} a_i \cdot u_i + u' \mid u_i, u' \in F^{(n)} \right\}$$

$I$  произвольное множество (может быть пустое)

$$\sum_{i \in I} a_i \cdot u_i = \sum_{j \in J} b_j \cdot v_j \Leftrightarrow \{a_i \cdot u_i \mid i \in I\} = \{b_j \cdot v_j \mid j \in J\}$$

Критерий аппроксимации – определение. Операции:

$$\left( \sum_{i \in I} a_i \cdot u_i + u' \right) + \left( \sum_{j \in J} b_j \cdot v_j + v' \right) = \sum_{k \in I \cup J} c_k \cdot w_k + (u' + v')$$

# Полная алгебра поведений $F(A)$

Элементы: классы эквивалентности направленных множеств поведений конечной высоты

$$U \sqsubseteq V \Leftrightarrow \forall (u \in U) \exists (v \in V) (u \sqsubseteq v)$$

$$U = V \Leftrightarrow U \sqsubseteq V \sqsubseteq U$$

$$U + V = \{u + v \mid u \in U, v \in V\}$$

$$a.U = \{a.u \mid u \in U\}$$

От классов к представителям.

Предел направленного множества направленных множеств = их объединение.

Бесконечные суммы:

$$\sum_{i \in I} u_i = \left\{ \sum_{i \in I} v_i \mid v_i \in u_i \right\}$$

# Каноническая форма в алгебре $F(A)$

$$u = \left( \sum_{i \in I} a_i \cdot u_i \right) + \varepsilon_u$$

$$u = \sum_{\exists w(u=a \cdot v+w)} a \cdot v + \varepsilon_u$$

$$M_u(a) = \{(x, y) \mid a \cdot x + y = u\}$$

$$S_u(a) = \{x \mid \exists y(x, y) \in M_u(a)\} = \{x \mid \exists y(a \cdot x + y = u)\}$$

$$I = \{(a, v) \mid v \in S_u(a)\}$$

$$a_{(a,v)} = a, u_{(a,v)} = v$$

Такое представление единственно, если все  $a_i \cdot u_i$  различны

# Теорема о неподвижной точке

Добавление переменных:  $F_{fin}^{\infty}(A, X)$

$$x_i = F_i(X), i \in I,$$

$$F_i(X) \in F_{fin}^{\infty}(A, X)$$

$$x_i = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} x_i^{(n)},$$

$$x_i^{(0)} = \perp,$$

$$x_i^{(n+1)} = (F_i(X))\sigma_n,$$

$$\sigma_{n+1} = \{x_i := x_i^{(n)} \mid i \in I\}$$



**Следующая лекция**

# **Поведение транзитивных систем**

**Транзитивная система  $\Rightarrow$  поведение  $\Rightarrow$  транзитивная система**