Вопросы к ГЭК бакалавры 2013

Курс «Моделирование»

ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБСЛУЖИВАНИЯ ЗАЯВОК В СИСТЕМАХ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ (СМО).

Вопрос 17

Основные понятия

Система массового обслуживания (СМО) – динамическая система, предназначенная для эффективного обслуживания случайного потока заявок (требований на обслуживание) <u>при ограничениях на ресурсы системы</u>.

Основные характеристики простейших СМО

1. Коэффициент загрузки устройства или канала

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \bullet \bar{\tau}_{обсл} < 1$$

2. Время пребывания заявки в системе

$$u_c = w + \bar{\tau}_{обсл}$$

w - время ожидания заявки в очереди на обслуживание

$\bar{\tau}_{обсл}$ среднее время обслуживания

Основные характеристики простейших СМО

3. Средняя длина очереди $l = \lambda w$

4. Среднее число заявок в системе

$$n = l + \rho = \lambda\left(w + \bar{\tau}_{обсл}\right)$$

Характеристики эффективности:

1. Вероятность отказа N-канальной СМО (заняты все каналы)

$$P_{отк} = P_N = \rho^N / N! * P_0$$

2. Вероятность простоя

$$P_{прост} = P_0 = [1+\rho+\rho^2/2!+\rho^3/3!+\ldots+\rho^N/N!]^{-1}$$

или $$P_{прост} = 1 \Big/ \sum_{i=0}^{N} \frac{\rho^i}{i!}$$

3. Вероятность пребывания в i-ом состоянии

$$P_i = \frac{\rho^i}{i!} P_0, i = 1,\ldots, N,$$

Характеристики эффективности:

4. Относительная пропускная способность - вероятность того, что заявка будет обслужена:

$$Q = 1 - P_{отк} = 1 - \rho^N / N! * P_0;$$

5. Абсолютная пропускная способность - среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени

$$A = \lambda * Q = \lambda (1 - \rho^N / N! * P_0);$$

6. Среднее число занятых каналов

$$R = 0 * P_0 + 1 * P_1 + \ldots + N * P_N = \rho (1 - \rho^N / N! * P_0).$$

СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ. ФОРМУЛЫ ЛИТТЛА. НОТАЦИЯ СМО.

Вопрос 18

Нотация СМО (Нотация Кэндалла)

Входной поток / время обслуживания/ число каналов/ емкость накопителя/ число заявок в источнике

- Входной поток $\in \{M, E_k, D, G, \ldots\}$
- время обслуживания $\in \{M, E_k, D, G, \ldots\}$
- число каналов $\in \{0, 1, 2, \ldots, N, \ldots\}$
- емкость накопителя $\in \{0, 1, 2, \ldots, N, \ldots\}$
- число заявок в источнике $\in \{0, 1, 2, \ldots, N, \ldots\}$

Распределения:

- M – Марковское (простейший входной поток, экспоненциальное время обслуживания**)**
- E_k – Эрланга k – го порядка
- D – детерминированное (не случайное)
- G – произвольное (General)

Характеристики СМО в стационарном режиме. Формулы Литтла

Рассмотрим любую СМО и связанные с ней два потока событий:

1) поток заявок, прибывающих в СМО;
2) поток заявок, покидающих СМО.

В стационарном режиме интенсивности обеих потоков равны:

$$\lambda_{вх} = \lambda_{вых} = \lambda.$$

Пусть

$X(t)$ – число заявок, прибывших в СМО до момента t;

$Y(t)$ – число заявок, покинувших СМО до момента t.

Для любого момента t можно определить

$Z(t) = X(t) - Y(t)$ - число заявок, находящихся в СМО.

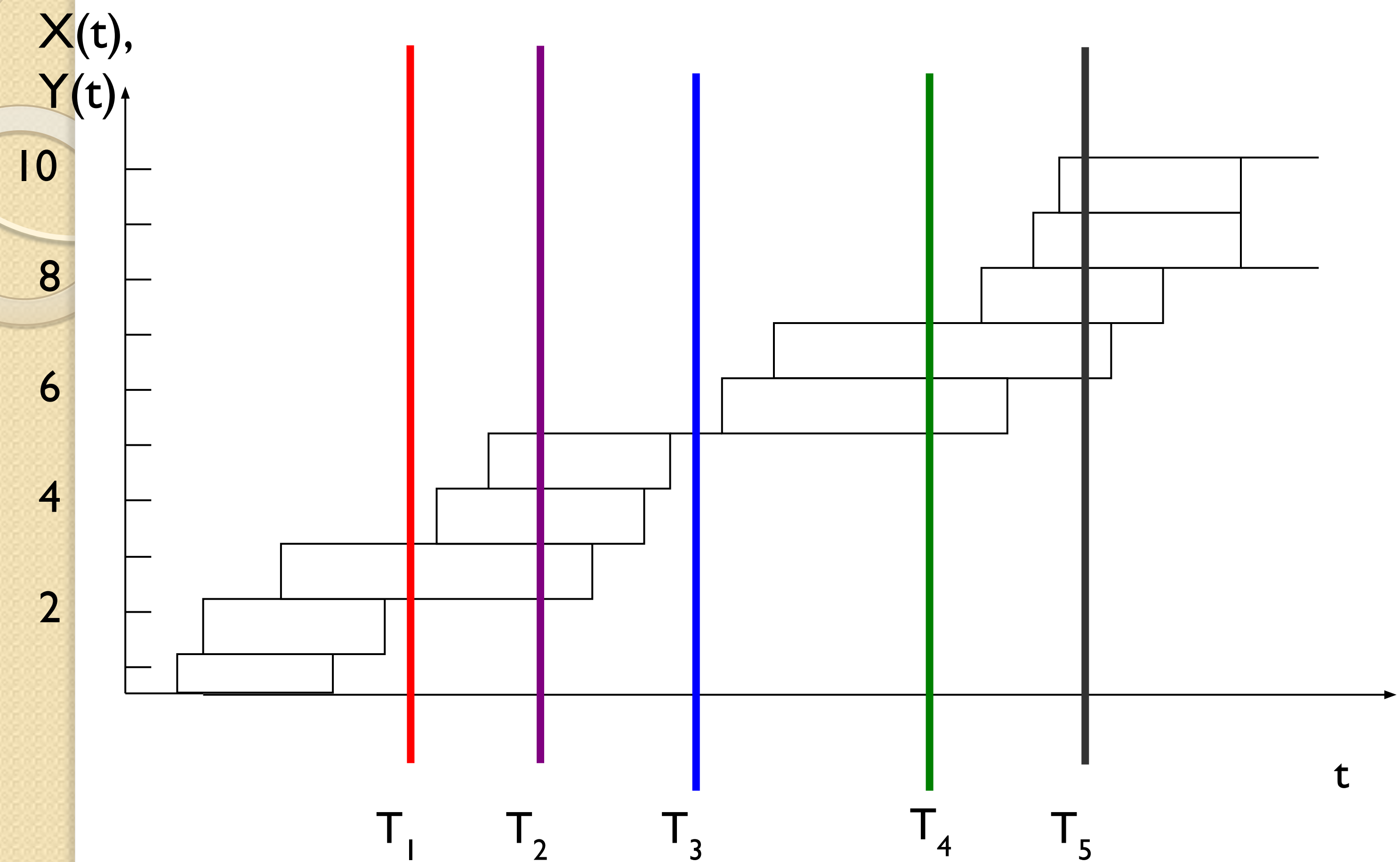


Рис. 1. График распределения $X(t), Y(t)$, где T_1 – 1 заявка в СМО, T_2 – 3 заявки, T_3 – 0 заявок, T_4 – 2 заявки, T_5 – 4 заявки …

Тогда среднее число заявок n, находящихся в СМО за промежуток времени T (площадь фигуры, изображенной на рис. 1), можно определить по формулам:

$$n = \frac{1}{T}\int_0^T Z(t)\,dt, \qquad (1)$$

или

$$n = \frac{1}{T}\int_0^T Z(t)\,dt = \frac{1}{T}\sum_i t_i, \qquad (2)$$

где

$$\int_0^T Z(t)\,dt = \sum_i t_i.$$

Среднее число заявок, пришедших в СМО за время T, определяется как λT. Тогда среднее время пребывания i заявок в системе:

$$(3)\quad n = \frac{1}{\lambda T}\left(\sum_i t_i\right) \cdot \lambda$$

Если в (3)

$$u = \frac{\sum_i t_i}{\lambda T}$$

то справедливо

$$n = u\lambda \quad (4)$$

В соответствии с (4) среднее число заявок в СМО определяется по 1-ой формуле Литтла, т.е.

$$u = \frac{n}{\lambda} \quad (5)$$

1-Я ФОРМУЛА ЛИТТЛА : для любой СМО, при любом характере потока заявок, при любом распределении времени обслуживания, при любой дисциплине обслуживания *среднее время пребывания заявки в системе равно среднему числу заявок в системе, деленному на интенсивность потока заявок.*

2-Я ФОРМУЛА ЛИТТЛА:

w - среднее время пребывания заявок в очереди

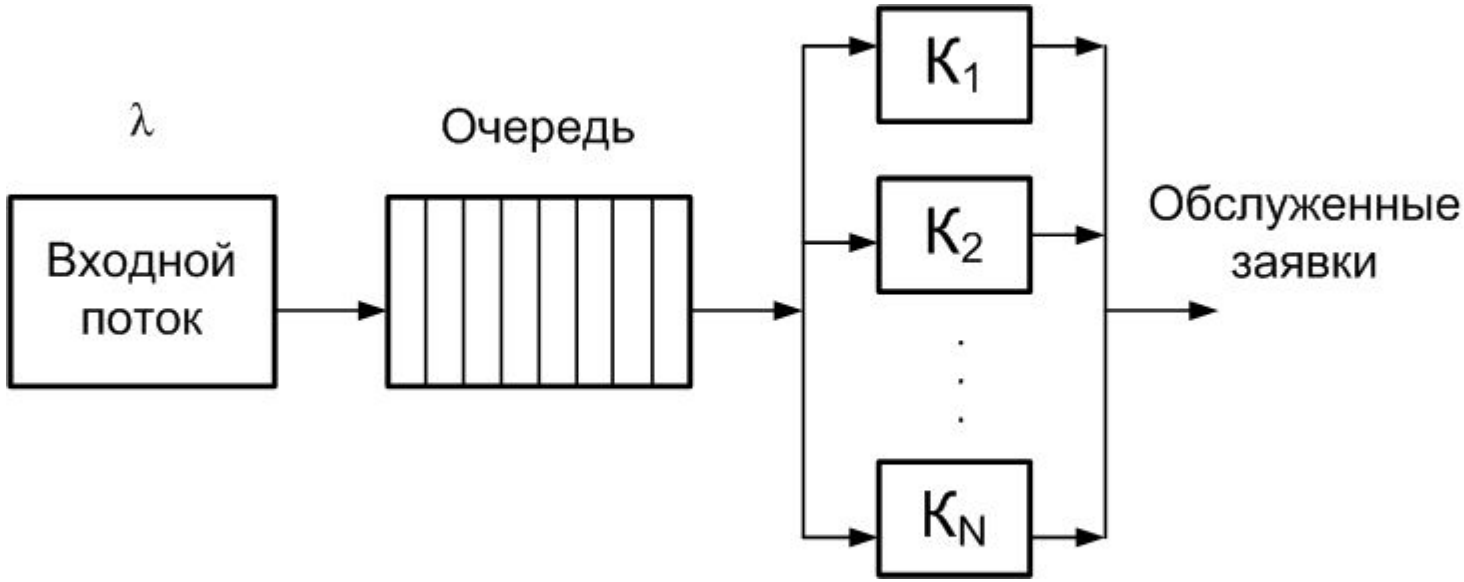
L - среднее число заявок в очереди:

$$w = \frac{L}{\lambda}, L = \lambda \cdot w (6)$$

СМО С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОЧЕРЕДЬЮ. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛЯ МНОГОКАНАЛЬНЫХ И ОДНОКАНАЛЬНЫХ СМО.

Вопрос 19

СМО M/M/N/∞



1) N-канальная СМО;
2) входной поток простейший с интенсивностью λ;
3) время обслуживания экспоненциальное со средним υ, интенсивностью μ = 1/υ
4) очередь не ограничена, дисциплина выбора – FIFO.

Состояния системы (M/M/N/∞)

Состояния системы нумеруются по числу заявок в системе:

S_0 – в СМО заявок нет (все каналы свободны);

S_1 - занят один канал, остальные свободны;

…

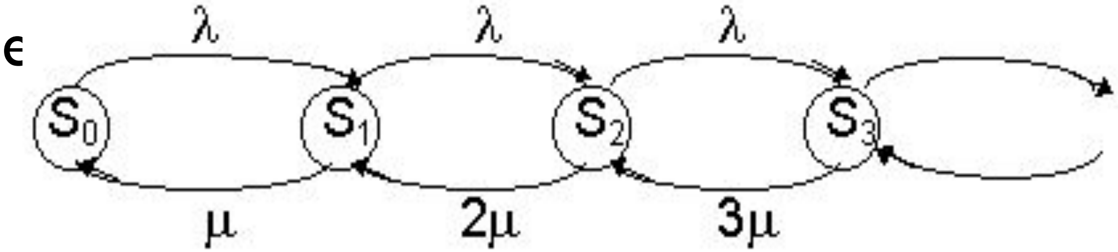
S_n - заняты все n каналов (очереди нет);

S_{n+1} - заняты все n каналов, одна заявка стоит в очереди; …

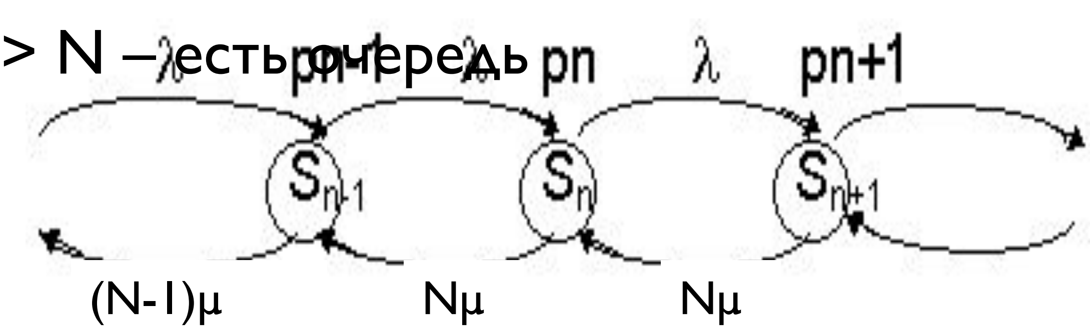
$S_{n+к}$ - заняты все n каналов, K заявок стоит в очереди; …

Граф состояний (M/M/N/∞)

1) n ≤ N (число заявок в СМО ≤ числу каналов N) – нет очере



2) n > N – есть очередь



Условия существования стационарного режима:

1) ρ < 1,   ρ – загрузка одного канала;

2) R < N, R - среднее число занятых каналов;

3) $\rho = \dfrac{\lambda}{N}\upsilon < 1$, где υ – время обслуживания заявки;

4) $$\rho = \frac{\lambda}{\mu \cdot N} < 1$$;

5) λ < μ N.

Решение системы уравнений Колмогорова (Финальные вероятности)

$$P_i = \begin{cases} \dfrac{R^i}{i!} P_0, & i \le N \\ \dfrac{R^i}{N!} \cdot \dfrac{P_0}{N^{i-N}} & i > N \end{cases}$$

M/M/N/∞	M/M/1/∞
1) R – среднее число занятых каналов	
R=λ·ν = λ/μ	ρ = λ·ν = λ/μ
2) $P_{\text{прост}}$ – вероятность простоя	
$P_0 = \left[\sum_{i=0}^{N} \frac{R^i}{i!} + \frac{R^{N+1}}{N!(N-R)} \right]^{-1}$	$P_0 = 1 - \rho$
3) L - среднее число заявок в очереди	
$L = P_0 \frac{R^N}{N!} \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$	$L = \frac{\rho^2}{1-\rho}$

M/M/N/∞	M/M/1/∞
4) n – среднее число заявок в системе	
n = L + R	$n = L + \rho = \dfrac{\rho}{1-\rho}$
5) w - среднее время пребывания заявки в очереди	
$w = \dfrac{L}{\lambda}$	$w = \dfrac{L}{\lambda} = \dfrac{\rho}{\mu(1-\rho)}$
6) u – среднее время пребывания заявки в системе	
$u = n / \lambda$	$u = n / \lambda = 1/(\mu(1-\rho))$

СМО ТИПА G/M/1. ФОРМУЛА ПОЛЯЧЕКА - ХИНЧИНА

Вопрос 20

СМО M/G/1/∞

Время обслуживания заявки распределено по произвольному (General) закону B(t) с плотностью вероятности b(t).

Среднее время обслуживания

$$\upsilon = \int_0^\infty t\, dB(t) = \int_0^\infty t\, b(t)dt$$

Второй начальный момент

$$\upsilon^{(2)} = \int_0^\infty t^2\, dB(t) = \int_0^\infty t^2\, b(t)dt$$

СМО M/G/1/∞ в стационарном режиме: $\rho = \lambda * u < 1$

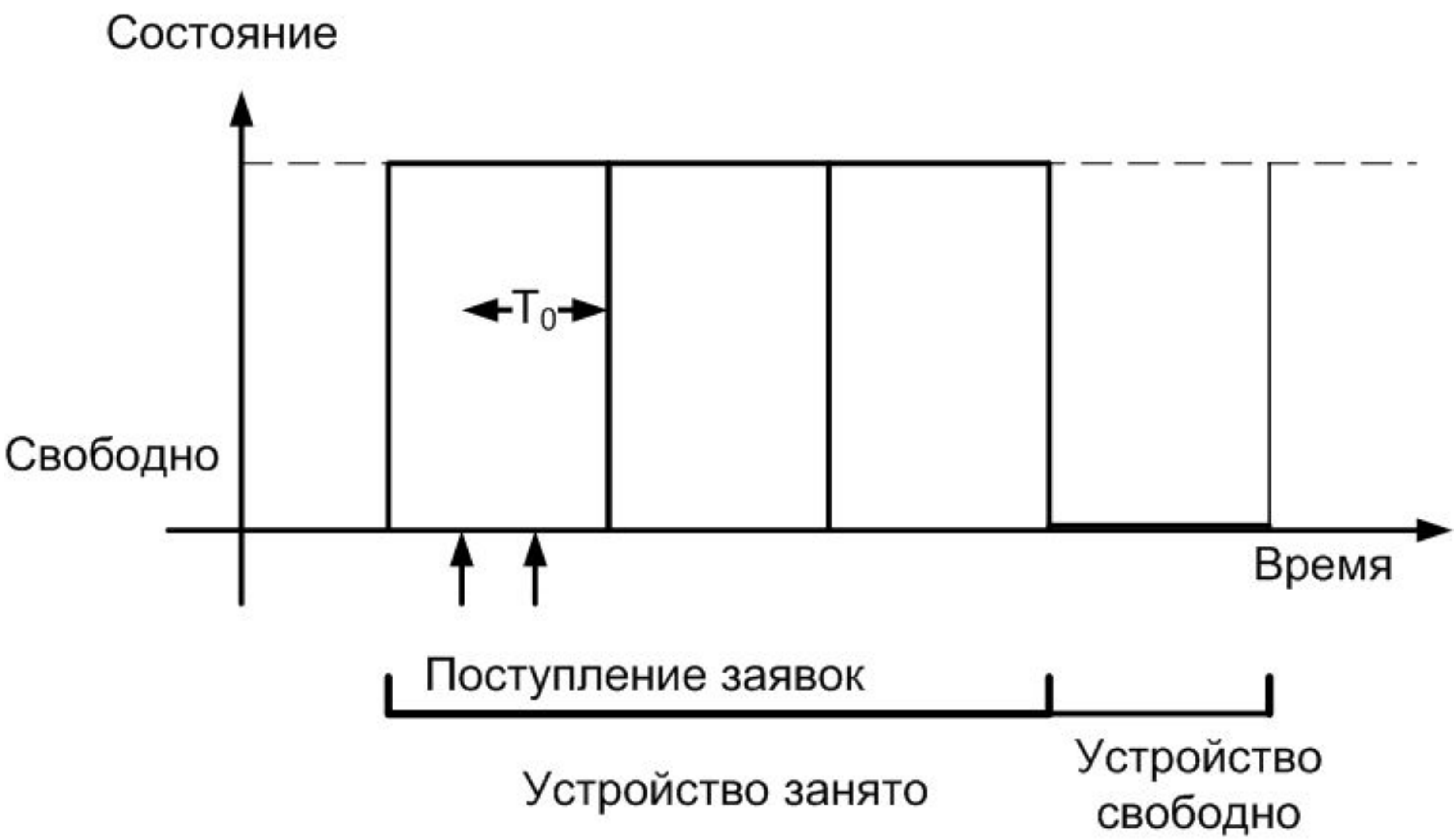
- В произвольный момент t в очереди находится L заявок
- поступает очередная заявка
- дисциплина обслуживания – FIFO
- **среднее время W ожидания заявки в очереди**

$$\overline{W} = \overline{T}_0 + \overline{T}_1$$

T_0 – время, необходимое для завершения обслуживания ранее выбранной заявки,

T_1 – время на облуживание заявок, стоящих в очереди перед поступившей заявкой.

СМО M/G/1/∞


Состояние
Свободно
T0
Время
Поступление заявок
Устройство занято
Устройство свободно

$$\overline{W} = w, \quad \overline{T}_1 = L \cdot \upsilon, \qquad \mathrm{L} = \lambda \bullet w$$

L – средняя длина очереди,

υ - среднее время обслуживания,

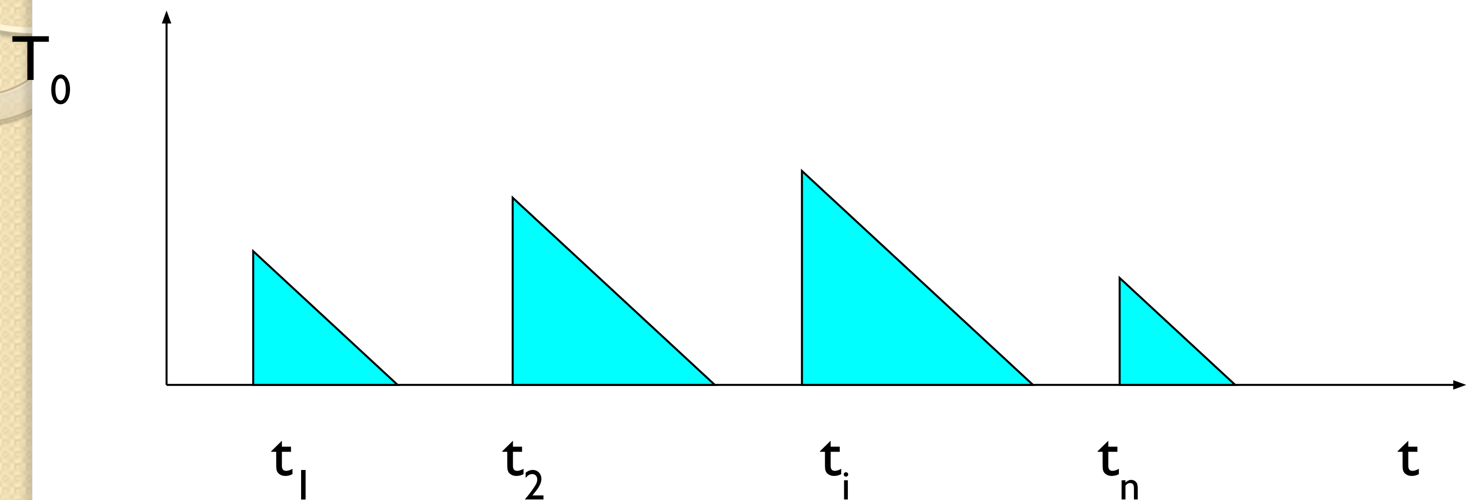
λ- интенсивность входного потока.

$$\overline{T}_1 = \lambda \cdot w \cdot \upsilon = \lambda \cdot \upsilon \cdot w = \rho \cdot w,$$

где ρ - загрузка СМО, ρ < 1.

$$w = \overline{T}_0 + w \cdot \rho, \qquad w = \frac{\overline{T}_0}{1-\rho} \qquad (1)$$

Определение среднего времени дообслуживания заявки



Число заявок за время t: $n = \lambda t >> 1$

Равные стороны треугольников – времена дообслуживания $T_{o1}, T_{o2}, \ldots, T_{oi}, \ldots, T_{on}$.

Для всех n заявок обслуживание завершилось на отрезке (0,t).

Определение среднего времени дообслуживания заявки

$$\overline{T}_0 = \frac{1}{t}\int_0^t T_0(t)dt$$

$$\overline{T}_0 = \frac{1}{2}\lambda\upsilon^{(2)} \qquad (2)$$

$$\overline{\mathrm{T}}_0 = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{n(t)} S_i = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{n(t)} \frac{1}{2} T_i^{\,2},$$

Формула Поллячека – Хинчина

$$T_0 = \frac{1}{2}\frac{n(t)}{t} * \frac{1}{n(t)}\sum_{i=1}^{n(t)} T_i^{\,2},$$

$$W = \frac{\lambda\upsilon^{(2)}}{2(1-\rho)} \qquad (3)$$

$$\overline{T}_0 = \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\frac{n(t)}{t}\lim_{t\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{h(t)} T_i^2 \Big/ n(t)\right)$$

Характеристики СМО M/G/1/∝

Данные для расчета:

- интенсивность входного потока λ,
- среднее время обслуживания υ
- второй начальный момент $\upsilon^{(2)}$

$$W = \frac{\lambda \upsilon^{(2)}}{2(1-\rho)} \quad (3) \qquad u = w + \upsilon = \upsilon + \frac{\lambda \upsilon^{(2)}}{2(1-\rho)} \quad (4),$$

где u – ср. время пребывания заявки в системе

Характеристики СМО M/G/1/∞

L- среднее число заявок в очереди

$$L = w \cdot \lambda = \frac{\lambda^2 \upsilon^{(2)}}{2(1-\rho)} \quad (5)$$

n – среднее число заявок в системе

$$n = L + \rho = \rho + \frac{\lambda^2 \upsilon^{(2)}}{2(1-\rho)} \quad (6)$$

Проверка формулы Поллячека – Хинчина

Формула для расчета среднего времени пребывания в очереди
для СМО М/М/1/∝:

$$w = \frac{\rho}{\mu \cdot (1-\rho)} = \frac{\rho \cdot \upsilon}{1-\rho} = \frac{(\lambda \cdot \upsilon) \cdot \upsilon}{1-\rho} = \frac{\lambda \cdot \upsilon^2}{1-\rho}$$

Для экспоненциального распределения $\upsilon^{(2)} = 2\,\upsilon^2$

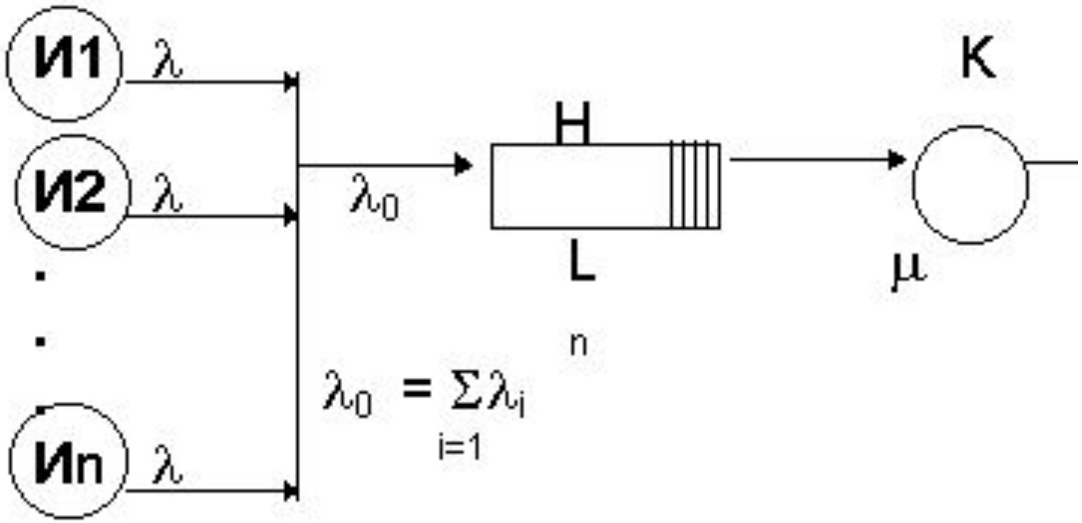
подставим в формулу (3) и получим:

$$w = \frac{\lambda \cdot 2\upsilon^2}{2(1-\rho)} = \frac{\lambda \cdot \upsilon^2}{1-\rho}$$

ХАРАКТЕРИСТИКИ СМО ПРИ МНОГОМЕРНОМ ВХОДЯЩЕМ ПОТОКЕ. СМО С ОТНОСИТЕЛЬНЫМИ ПРИОРИТЕТАМИ

Вопрос 21

СМО с многомерным входным потоком



где

- n - число типов заявок;
- λ_i и υ_i, $i = 1\ldots n$,
- загрузка заявками i-го типа $\rho_i = \lambda_i \upsilon_i$.
- коэффициент простоя η СМО $\eta = 1 - R$

СМО с многомерным входным потоком

Условие стационарности: $\rho = {\lambda_0}/{\mu} \square 1$

Для многоканальных СМО:

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}{\mu} = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \square 1$$

Характеристики заявок i-го типа: w_i, u_i, L_i, n_i.

Вероятность появления заявок i-го типа:

$$P_i = \frac{\lambda_i}{\lambda}$$

Ср. время пребывания заявки i-го типа в очереди:

$$W_i = W = \frac{1}{2(1-R)} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \upsilon_i^{(2)}$$

Характеристики СМО при многомерном потоке

Ср. длина очереди заявок i-го типа:

$$L_i = W_i \cdot \lambda_i = W \cdot \lambda_i$$

Ср. время пребывания заявки i-го типа в системе:

$$u_i = W + \upsilon_i$$

Ср. число заявок i-го типа в системе:

$$n_i = \rho_i + L_i$$

СМО с приоритетами

Приоритет – это преимущество в очереди, характеризуется натуральным числом: 1, 2, …, M.

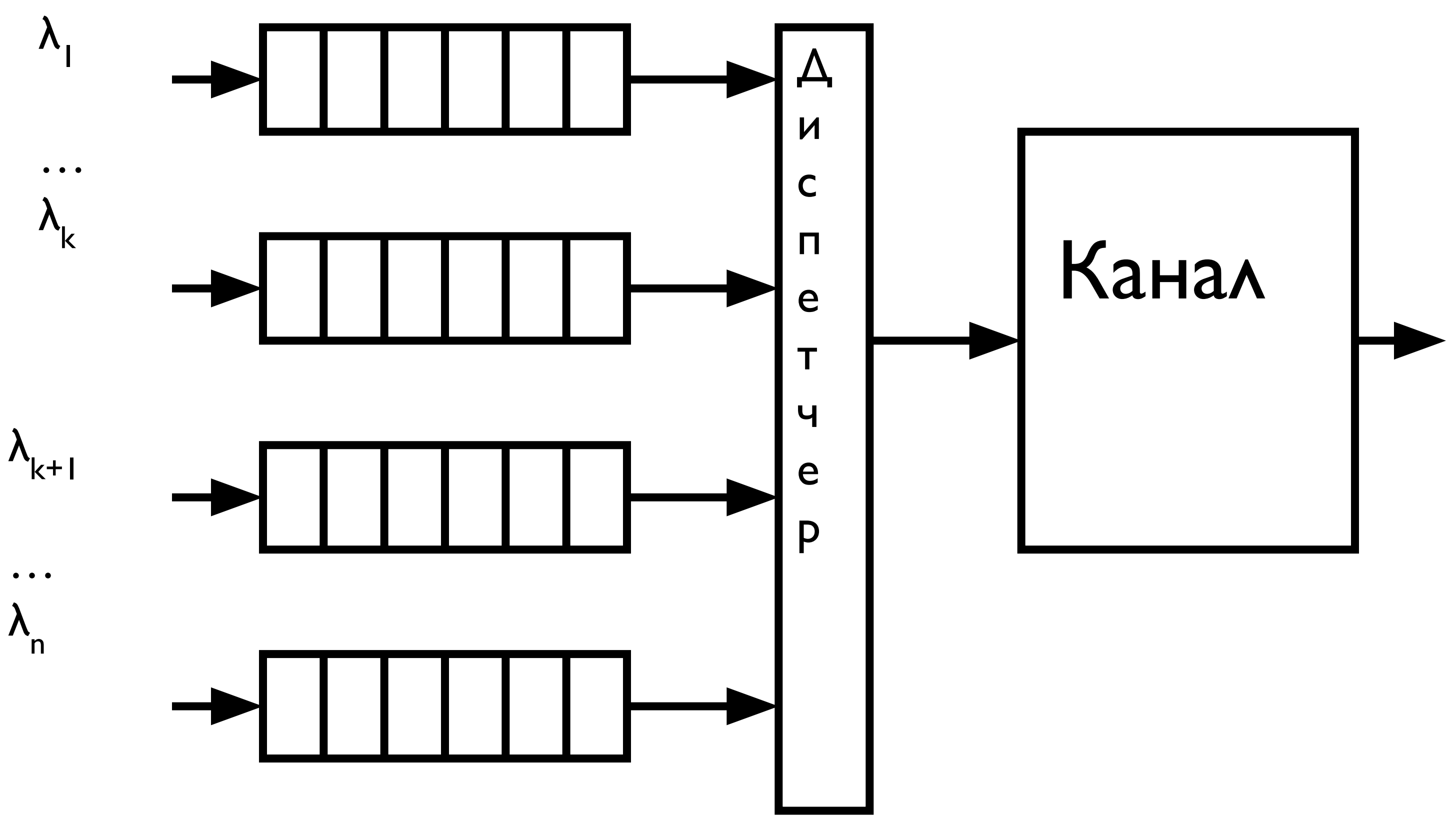
Приоритеты: относительный и абсолютный, смешанный.

Относительный приоритет не прерывает обслуживание уже поступившей в канал заявки.

Организация обслуживания с относительными приоритетами

- Заявки k-го приоритета накапливаются в очереди O_k.
- Дисциплина обслуживания в очереди O_k – FIFO.
- Заявки из (k+1)-й очереди не выбираются на обслуживание, если есть хотя бы одна заявка в k-й очереди, k = 1, 2, …, M – 1.

Схема СМО с относительными приоритетами



- в СМО поступают N простейших потоков с интенсивностями $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$
- времена обслуживания – случайные величины с известными средними $υ_1, \ldots, υ_n$ и вторыми начальными моментами $υ_1^{(2)}, \ldots, υ_n^{(2)}$
- дисциплина обслуживания – относительные приоритеты

Определим среднее время пребывания в очереди w_k заявки k-го приоритета в стационарном режиме.

В некоторый момент времени в СМО поступает заявка k-го приоритета. Тогда она ждет в очереди случайное время W_k:

$$W_k = T_0 + \sum_{j=1}^{k} T_j + \sum_{j=1}^{k-1} T_j^{\ *},$$

где T_o – время дообслуживания заявки;

$$\sum_{j=1}^{k} T_j$$

– длительность обслуживания заявок данного и более высоких приоритетов, поступивших в СМО ранее данной заявки;

$$\sum_{j=1}^{k-1} T_j^{\ *}$$

– длительность обслуживания заявок более высоких приоритетов, поступивших в СМО позже данной заявки за время w_k, которые будут обслужены ранее данной заявки.

Для средних времен имеем:

$$\overline{W}_k = \overline{T}_0 + \sum_{j=1}^{k} \overline{T}_j + \sum_{j=1}^{k-1} \overline{T}_j^{\ *}$$

Обозначим: $$\overline{W} = \mathrm{w}\ ;$$

Тогда: $$\overline{T_j}^{*} = \rho_j \cdot w_k$$

$$\overline{T}_j = \lambda_j \cdot w_j \cdot \upsilon_j = \rho_j \cdot w_j,$$

$$\overline{W}_k = \overline{T}_0 + \sum_{j=1}^{k} \rho_j \cdot w_j + \sum_{j=1}^{k-1} \rho_j \cdot w_k, \quad (1)$$

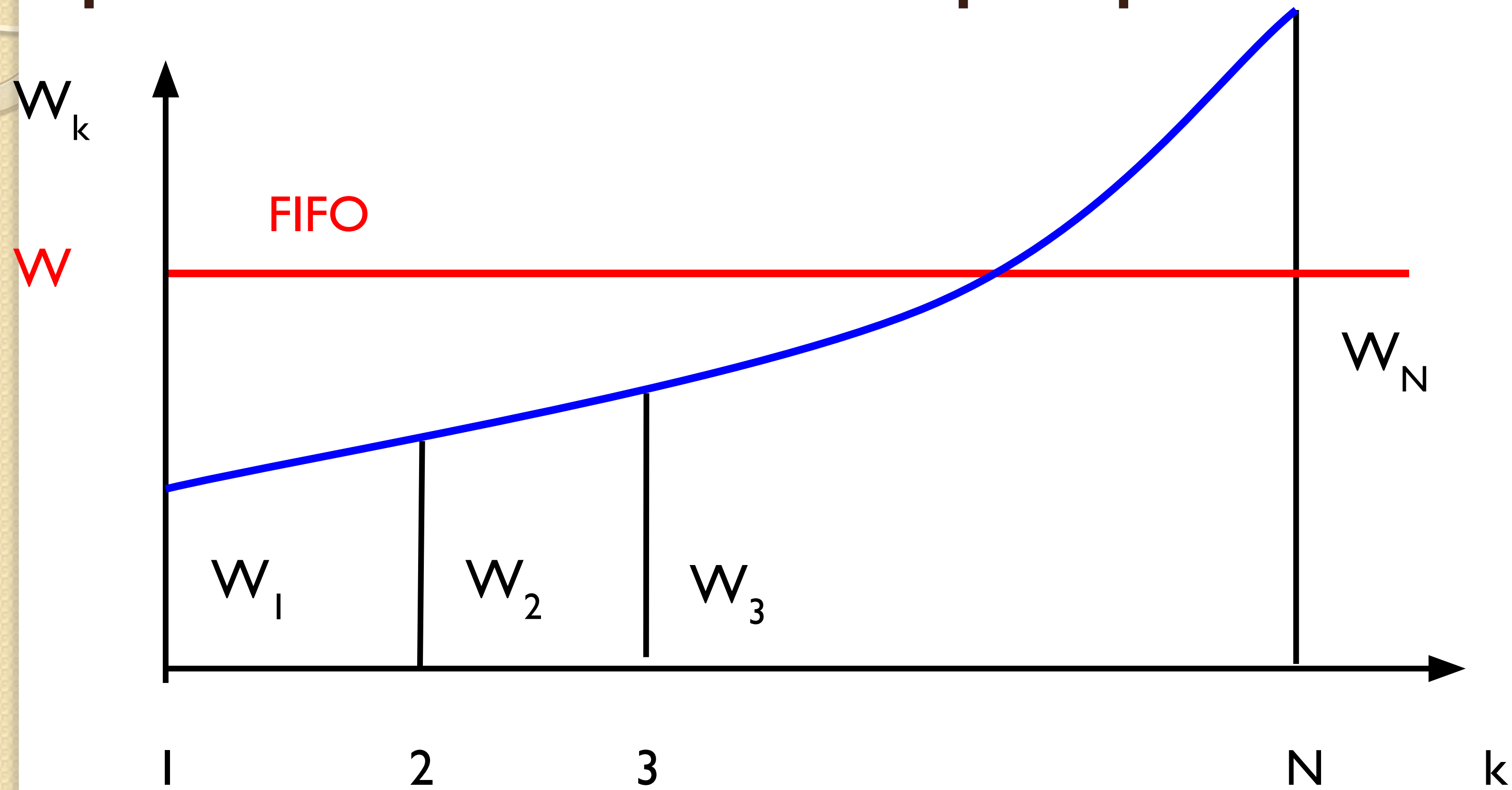
$$W_k = \frac{1}{2(1-R_{k-1})(1-R_k)} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \upsilon_i^{(2)} \quad (2)$$

где $R_k = \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_k$; $R_N = R$.

Остальные характеристики вычисляются по формулам:

$$n_k = u_k \cdot \lambda_k \quad L_k = W_k \cdot \lambda_k \quad u_k = W_k + \upsilon_k$$

Распределение времени ожидания при относительных приоритетах



$$W_1 < W < W_N$$

С"Моделирование", 2013, вопрос 21

ХАРАКТЕРИСТИКИ СМО С АБСОЛЮТНЫМИ ПРИОРИТЕТАМИ. СМЕШАННЫЕ ПРИОРИТЕТЫ. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ ДЛЯ СМО БЕЗ ПОТЕРЬ

Вопрос 22

СМО с приоритетами

Приоритет – это преимущество в очереди, характеризуется натуральным числом: 1, 2, …, M.

Приоритеты: относительный и абсолютный, смешанный.

Организация обслуживания с абсолютными приоритетами

Обслуживание прерванных заявок может производиться:

1) от начала обслуживания
2) от момента прерывания (дообслуживание).

Среднее время ожидания в очереди w_k заявок k-го приоритета равно:

$$W_k^A = W_k^H + W_k^П$$

где W_k^H – среднее время ожидания начала обслуживания

$W_k^П$ – среднее время ожидания в прерванном состоянии

$$W_k^A = \frac{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \upsilon_i^{(2)}}{2(1-R_{k-1})(1-R_k)} + \frac{R_{k-1}\upsilon_k}{1-R_{k-1}} \quad (3)$$

Разность длительностей ожидания заявок k-го приоритета

$$\Delta W_k = W_k^{A} - W_k^{O} = \frac{R_{k-1}\upsilon_k}{1-R_{k-1}} - \frac{\sum_{i=k+1}^{N}\lambda_i \upsilon_i^{(2)}}{2(1-R_{k-1})(1-R_k)}$$

- первое слагаемое определяет влияние заявок более высокого приоритета, прерывающих обслуживание данного потока,
- второе учитывает уменьшение времени ожидания заявок k-го приоритета за счет прерываний обслуживания заявок с меньшими приоритетами.

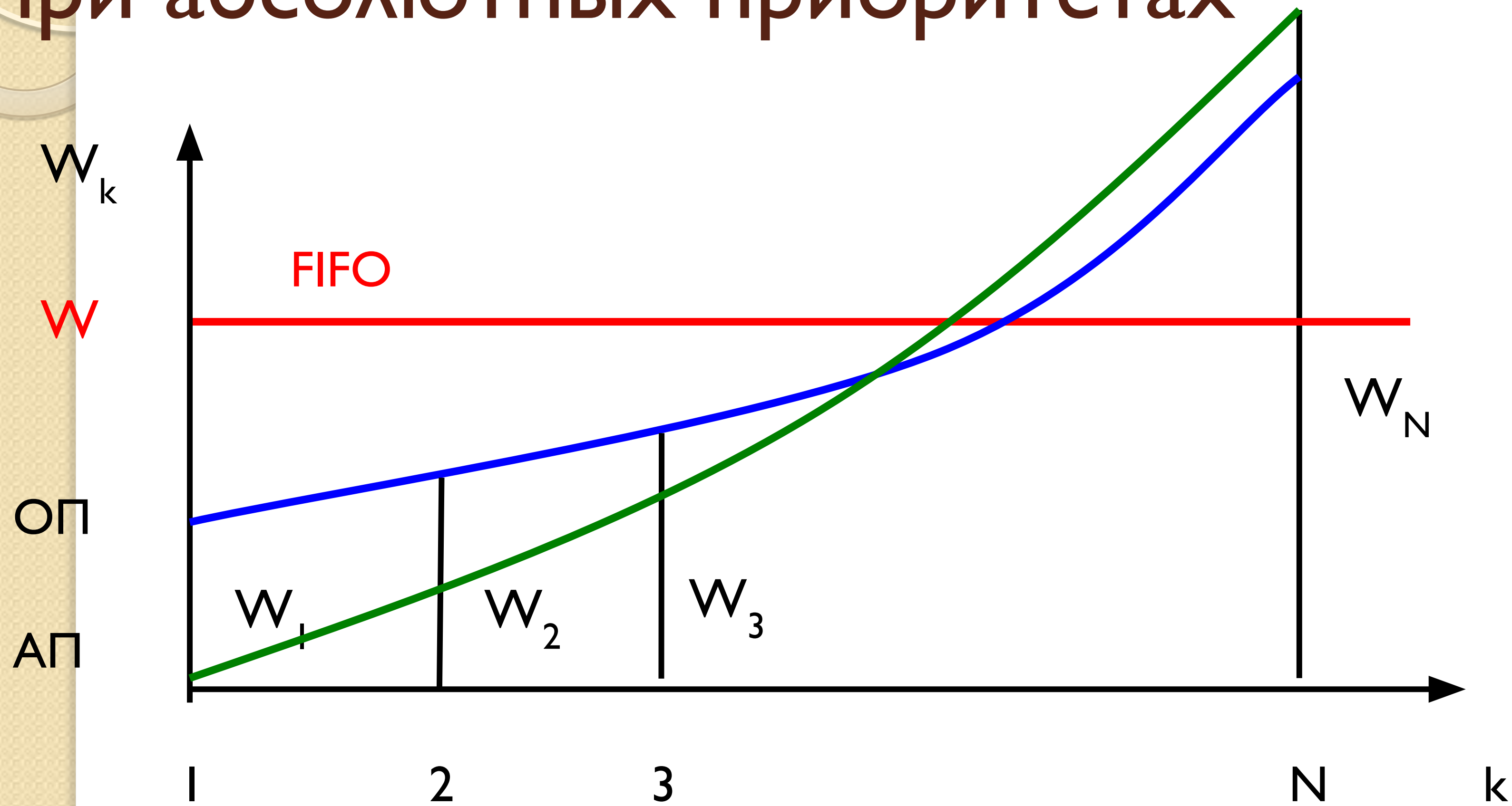
Условие, при котором абсолютные приоритеты дают выигрыш во времени ожидания

Для заявок k-го приоритета

$$\mathbf{W_k^A < W_k^O \quad (\Delta W_k < 0)}$$

$$R_{k-1}\upsilon_k(1-R_k) < \frac{\sum_{i=k+1}^{N}\lambda_i\upsilon_i^{(2)}}{2}$$

Распределение времени ожидания при абсолютных приоритетах



Закон сохранения времени ожидания

Справедлив для СМО, удовлетворяющих следующим требованиям:

1. Отсутствие отказов в обслуживании
2. Все входные потоки независимые и простейшие
3. Система обслуживания простаивает только в том случае, когда на ее входе нет заявок на обслуживание
4. Время обслуживания не зависит от входных потоков
5. При наличии прерываний время обслуживания имеет экспоненциальное распределение.

Закон сохранения времени ожидания

$$\sum_{i=1}^{N} \rho_i w_i = const$$ при любой дисциплине обслуживания

$$const = \frac{R}{2(1-R)} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \upsilon_i^{(2)}$$

где $R = \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_N$.

Закон сохранения времени ожидания

Применение:

для оценки достоверности приближенных результатов, полученных при анализе сложных дисциплин обслуживания и проведении имитационного моделирования.

СМО со смешанными приоритетами

В одноканальную СМО поступают N потоков заявок. Выделяются три группы потоков:

1) N_1 первых потоков имеют абсолютные приоритеты
2) потоки $N_1 + 1, \ldots, N_1 + N_2$ - относительные приоритеты,
3) потоки $N_1 + N_2 + 1, \ldots, N$ – бесприоритетное обслуживание.

Среднее время ожидания в очереди заявок k-го приоритета

$$W_K = \begin{cases} \dfrac{R_{k-1}\upsilon_k}{1-R_{k-1}} + \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{K}\lambda_i\upsilon_i^{(2)}}{2(1-R_{k-1})(1-R_k)} & k = 1 \dots N_1 \\[2ex] \dfrac{R_{N_1}\upsilon_k}{1-R_{N_1}} + \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N}\lambda_i\upsilon_i^{(2)}}{2(1-R_{k-1})(1-R_k)} & k = N_1 + 1 \dots N_1 + N_2 \\[2ex] \dfrac{R_{N_1}\upsilon_k}{1-R_{N_1}} + \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N}\lambda_i\upsilon_i^{(2)}}{2(1-R_{\mathrm{M}_1+\mathrm{M}_2})(1-R)} & k = N_1 + N_2 + 1 \dots N \end{cases}$$

СТОХАСТИЧЕСКИЕ СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ И ИХ ПАРАМЕТРЫ. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ СЕТИ. ХАРАКТЕРИСТИКИ РАЗОМКНУТЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

Вопрос 23

Определение сети массового обслуживания (СтМО)

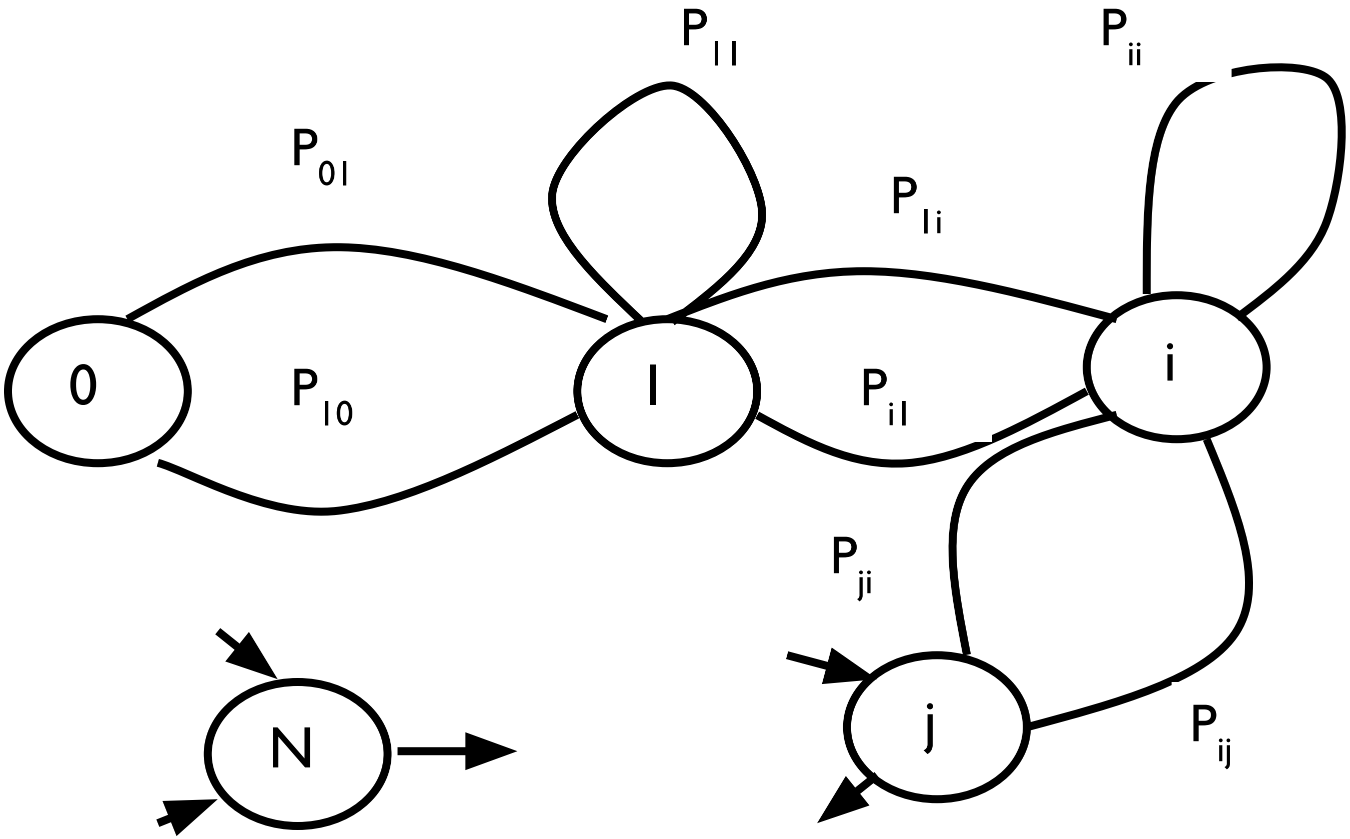
СтМО или стохастическая сеть – это совокупность взаимосвязанных СМО.

Примеры реальных обьектов, описываемых СтМО:

(заявка при обслуживании проходит несколько СМО последовательно, прежде чем покинуть этот объект)

- покупатель в универмаге,
- документ в министерстве,
- деталь при последовательной обработке,
- **программа в компьютере …**

Граф передач



СтМО изображается графом с N + 1 вершинами, где вершина 0 является источником заявок λ_0, а остальные N вершин – СМО.

Характеристики СМО в составе СтМО

Каждая СМО j характеризуется:

1) числом K_j каналов обслуживания

2) временем u_j обслуживания в канале

Заявка из источника с вероятностью P_{0j} может поступить в СМО j.

Выходя из i-й СМО, заявка с вероятностью P_{ij} может поступить в j-ю СМО, $j = 0, 1, \ldots, N$.

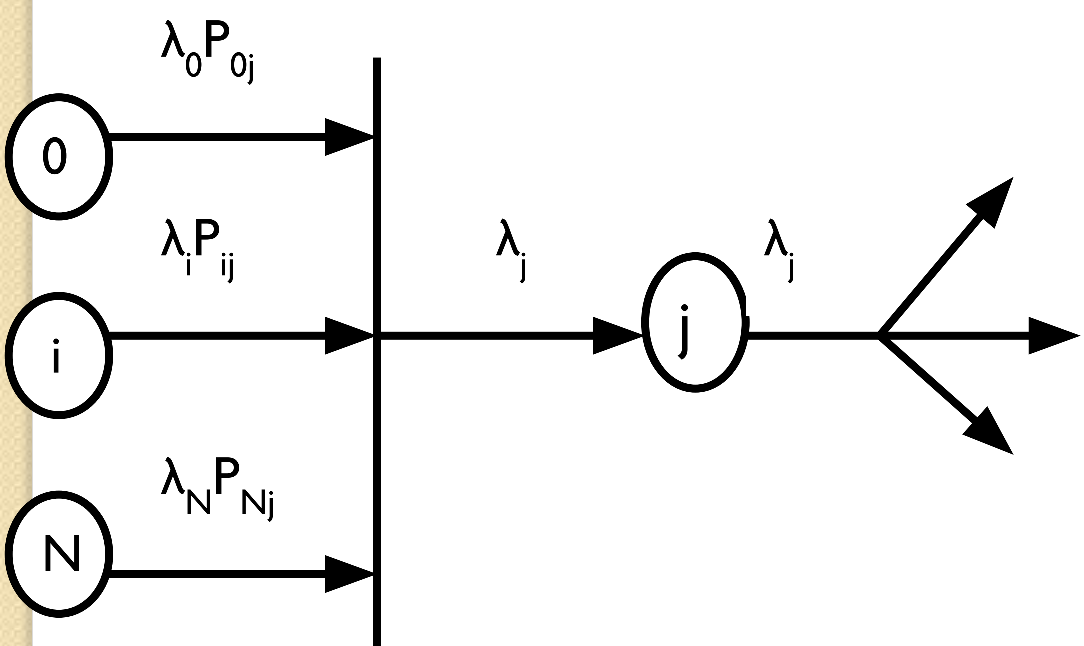
Матрица вероятностей передач

$$
Đ = \left| Đ_{ij} \right| =
\begin{array}{c|ccccccc}
 & 0 & 1 & \ldots & J & \ldots & n \\
\hline
0 & 0 & P_{01} & \ldots & P_{0J} & \ldots & P_{0n} \\
1 & P_{10} & P_{11} & \ldots & P_{1J} & \ldots & P_{1n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
i & P_{i0} & P_{i1} & \ldots & P_{ij} & \ldots & P_{in} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
N & P_{N0} & P_{N1} & \ldots & P_{Nj} & \ldots & P_{Nn}
\end{array}
$$

$$
\sum_{j=0}^{n} P_{ij} = 1, \quad i = 0,1,\ldots,N
$$

Стационарный режим для СтМО

- для любой СМО j среднее число заявок, входящих в систему в единицу времени, равно среднему числу заявок, выходящих из системы (λ_j).
- интенсивность потока, входящего в любую СМО определяется как сумма интенсивностей потоков, поступающих в нее из других СМО:



$$\lambda_{вхj} = \lambda_{выхj} = \lambda_j$$

Уравнения для определения интенсивностей потоков заявок

$$\lambda_j = \sum_{i=0}^{N} \lambda_i \cdot P_{ij} \qquad (1)$$
$$j=0,\ldots,n$$

Решая эту систему, получим выражения вида

$$\lambda_j = \alpha_j \lambda_0, \quad j = 0,\ldots,n; \quad \alpha_0 = 1 \qquad (2).$$

α_j - коэффициент передачи – он характеризует долю заявок, поступающих в *j*-й узел от источника заявок, либо - среднее число прохождений какой-либо заявки через СМО j в процессе обслуживания.

Разомкнутые СтМО

СтМО называется открытой или разомкнутой, если интенсивность источника не зависит от числа заявок, находящихся в сети.

Разомкнутые СтМО применяются в качестве моделей систем, в которых находится переменное число заявок – вычислительных систем с разделением времени. Заявки – запросы со стороны пользователя на выполнение отдельных работ.

Для разомкнутых СтМО известна интенсивность источника заявок λ_0 – система (1) имеет единственное решение вида (2).

Параметры разомкнутой сети

1) N – число СМО, образующих сеть;

2) λ_0 – интенсивность потока заявок на выходе источника S_0;

3) матрица вероятностей передач $p = (p_{ij})$

где P_{ij} - вероятность того, что заявка из системы S_i направляется в S_j.

4) Каждая СМО i характеризуется

K_i - числом каналов обслуживания

υ_i - средним временем обслуживания в канале.

Характеристики в стационарном режиме

Узловые характеристики: L_i, m_i, w_i и u_i – для всех систем (узлов) S_i, $i=1,\ldots,n$.

Сетевые характеристики:

1) L - средняя суммарная длина очередей,
2) m - среднее число заявок, пребывающих в сети,
3) w - среднее время ожидания заявки в очередях,
4) u – среднее время пребывания заявки в СтМО.

Экспоненциальная стохастическая сеть

Стохастическая СтМО называется **экспоненциальной**, если

- поток заявок от источника – простейший
- времена обслуживания во всех узлах сети распределены по экспоненциальному закону.

В этом случае СтМО ведет себя как совокупность n независимых СМО типа $M/M/K_i/\infty$

Узловые характеристики экспоненциальной разомкнутой сети

1) Средняя длина очереди

$$L_i = \frac{R_i^{K_i}}{(K_i)!} \cdot \frac{\rho_i}{(1-\rho_i)^2} p_{0i}$$

2) Вероятность простоя

$$p_{0i} = \frac{1}{\sum_{S=0}^{K_i} \frac{R_i^S}{S!} + \frac{R_i^{K_i+1}}{K_i!(K_i-R_i)}}$$

Узловые характеристики экспоненциальной разомкнутой сети

3) Средняя загрузка одного канала $$\rho_i = \lambda_0 \alpha_i \vartheta_i / K_i$$

4) Полная загрузка узла (СМО)

$$R_i = K_i \rho_i$$

В стационарном режиме

$$\rho_i < 1 \qquad R_i < K_i$$

Узловые характеристики экспоненциальной разомкнутой сети

5) Среднее число заявок в узле

$$m_i = L_i + R_i$$

6) Среднее время ожидания заявки в очереди

$$w_i = L_i / (\alpha_i \lambda_0)$$

7) Среднее время пребывания заявки в узле

$$u_i = m_i / (\alpha_i \lambda_0)$$

Узловые характеристики экспоненциальной разомкнутой сети

Для случая $K_i = 1, i = 1, \ldots, n$ (Все СМО одноканальные)

$$m_i = \frac{\rho_i}{1-\rho_i} \qquad L_i = \frac{\rho_i^{\;2}}{1-\rho_i}$$

$$w_i = \frac{\lambda_i \upsilon_i^{\;2}}{1-\rho_i} \qquad u_i = \frac{\upsilon_i}{1-\rho}$$