

**Компьютерные основы
программирования
Представление данных
часть 1**

Лекция 2, 2 марта 2017

**Лектор: Чуканова Ольга
Владимировна**

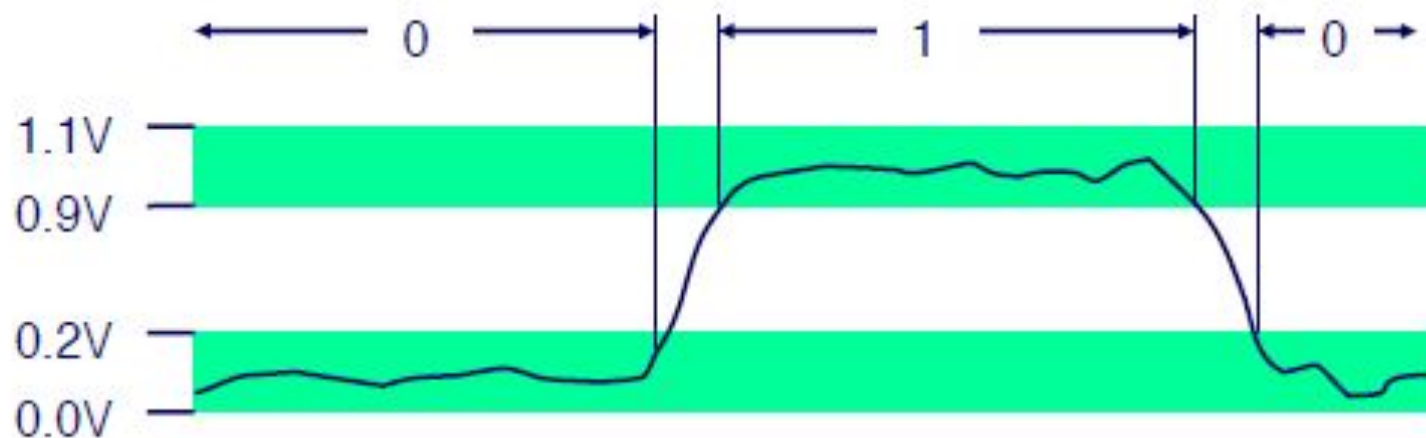
Кафедра информатики

602 АК

ovcha@mail.ru

(почти) Всё есть биты

- Каждый бит есть 0 или 1
- По разному кодируя/интерпретируя наборы бит
 - Компьютеры определяют действия (инструкции)
 - ... представляют, и обрабатывают числа, множества, строки...
- Почему биты? Из-за электронной реализации
 - Просто хранить с помощью бистабильных элементов
 - Надёжно передаются по плохим и зашумленным проводникам



Двоичный пример

■ Представление чисел в двоичной системе

- $15213_{10} = 11101101101101_2$
- $1.20_{10} = 1.0011001100110011[0011]..._2$
- $1.5213 \times 10^4 = 1.1101101101101_2 \times 2^{13}$

Кодирование значений байта

■ Байт = 8 бит

- Двоичное от 00000000_2 до 11111111_2
- Десятичное: от 0_{10} до 255_{10}
- Шестнадцатеричное от 00_{16} до FF_{16}
 - Представление 16 цифр
 - Используем символы от '0' до '9' и от 'A' до 'F'
 - Запись $FA1D37B_{16}$ в Си как
 - $0xFA1D37B$
 - $0xfa1d37b$

Шестнадцатеричное
Десятичное
Двоичное

0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111
8	8	1000
9	9	1001
A	10	1010
B	11	1011
C	12	1100
D	13	1101
E	14	1110
F	15	1111

Байтовая организация памяти,



Программы обращаются к виртуальным адресам

- Концептуально – очень большой массив байт
- В действительности реализуется иерархией запоминающих устройств различного типа
- ОС предоставляет своё адресное пространство каждому «процессу»
 - Программа исполняется в рамках своего «процесса»
 - Программа может повредить только свои, но не чужие данные

Компилятор, компоновщик, загрузчик и среда исполнения

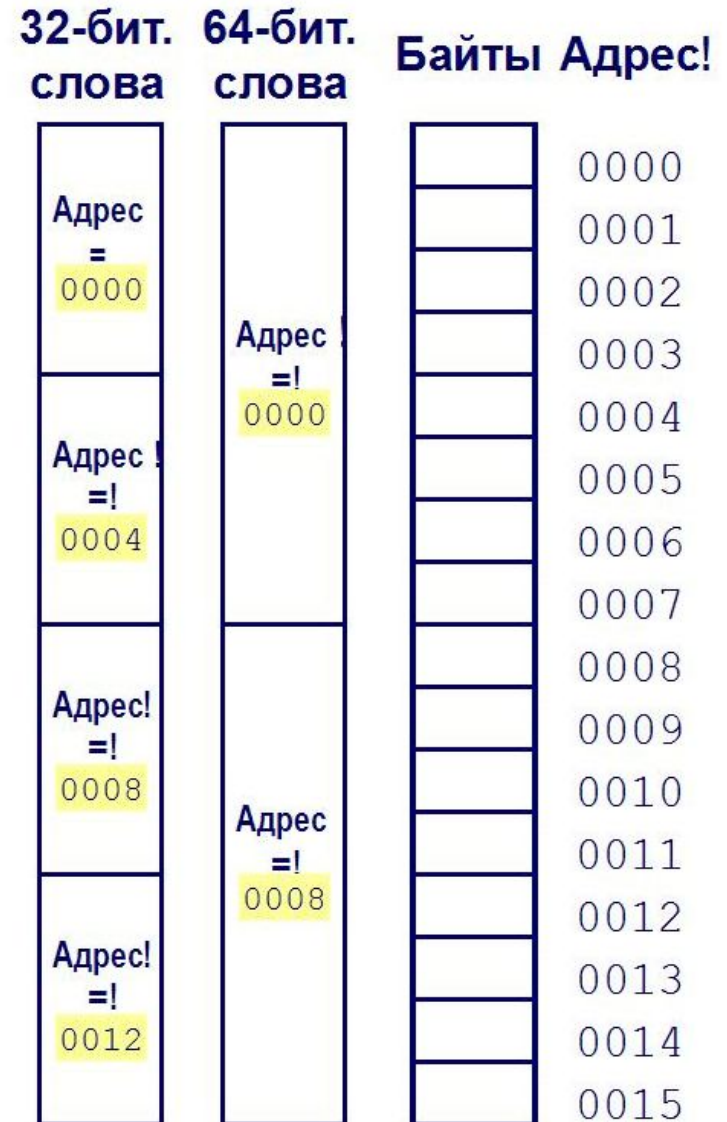
- Определяют где хранятся различные программные объекты
- Выделяют память внутри единого адресного пространства

Машинные слова

- **С машиной связан “размер слова”**
- Обычный размер представления целых чисел
 - Включая адреса
- Большинство машин используют слова в 32 бита (4 байта)
 - Предел адресации 4ГБ
 - Недостаточно для интенсивной работы с памятью
- Мощные системы - слова используют в 64 бита (8 байт)
 - Потенциальное адресное пространство порядка 1.8×10^{19} байт
 - Архитектура x86-64 использует 48- битовые адреса: 256 терабайт
- Машины поддерживают множество форматов данных
 - Доли размера слова или кратные ему
 - Всегда целое число байт

Словная организация памяти

- Адреса указывают расположение, в байтах,
 - Адрес первого байта в слове
 - Адреса последовательных слов различаются на 4 (32 битные) или 8 (64 битные)



Форматы данных

Типы данных языка C	32-бит типично	Intel IA32	x86-64
char	1	1	1
short	2	2	2
int	4	4	4
long	4	4	8
long long	8	8	8
float	4	4	4
double	8	8	8
long double	8	10/12	10/16
pointer	4	4	8

Порядок байт в слове

- В каком порядке располагаются в памяти байты многобайтового слова?

- **Соглашения**

«Тупоконечники»: Sun, PPC Mac, Internet

Наименее значимый байт имеет наибольший адрес

«Остроконечники»: x86

Наименее значимый байт имеет наименьший адрес

Примеры упорядочения байт

«Тупоконечники»: Sun, PPC Mac, Internet

Наименее значимый байт имеет наибольший адрес

«Остроконечники»: x86

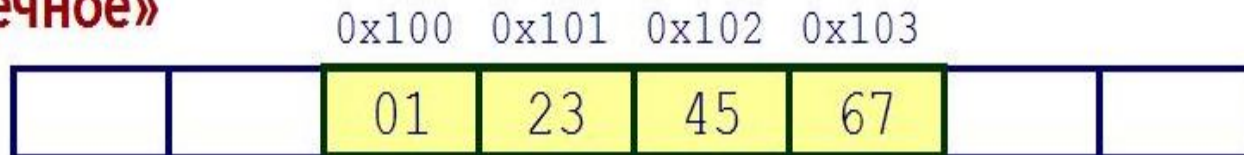
Наименее значимый байт имеет наименьший адрес

Пример

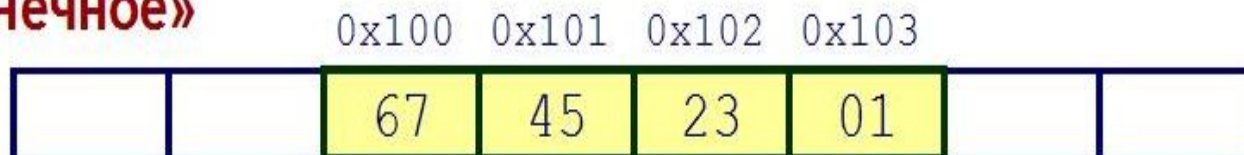
Переменная x имеет 4-байтовое представление 0x01234567

Расположена по адресу $\&x - 0x10$

«Тупоконечное»



«Остроконечное»



Чтение байт в обратном порядке

- **Результат дизассемблирования**

Текстовое представление машинного кода

Выдаётся программой читающей машинный код

Адрес	!Машинный код	!Представление на Ассемблере!
8048365:	5b	pop %ebx
8048366:	81 c3 ab 12 00 00	add \$0x12ab, %ebx
804836c:	83 bb 28 00 00 00 00	cmpl \$0x0, 0x28(%ebx)

«Расшифровка» значений

Значение:	0x12ab
Размещение в слове (32 бита):	0x000012ab
Разделение на байты:	00 00 12 ab
Переупорядочение:	ab 12 00 00

Изучение представления

• Вывод байтового представления данных

данных Представление указателя как массива

```
typedef unsigned char *pointer;

void show_bytes(pointer start, int len){
    int i;
    for (i = 0; i < len; i++)
        printf("%p\t0x%.2x\n", start+i, start[i]);
    printf("\n");
}
```

Спецификации преобразования:!

%p: !Вывод указателя

%x: !Вывод шестнадцатиричного

Пример исполнения show_bytes для int

```
int a = 15213;  
printf("int a = 15213;\n");  
show_bytes((pointer) &a, sizeof(int));
```

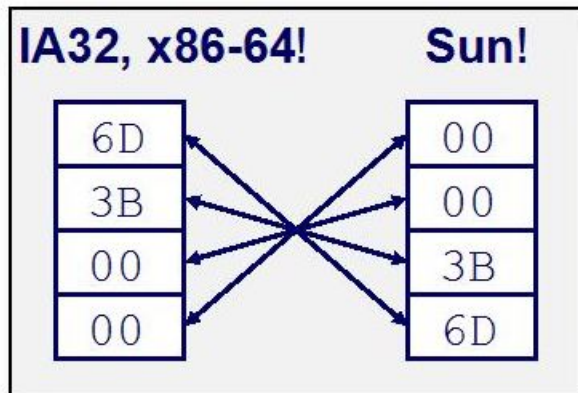
Результат (x86, Linux):!

```
int a = 15213;  
0x 1ffffcb8 0x6d  
0x 1ffffcb9 0x3b  
0x 1ffffcba 0x00  
0x 1ffffcbb 0x00
```

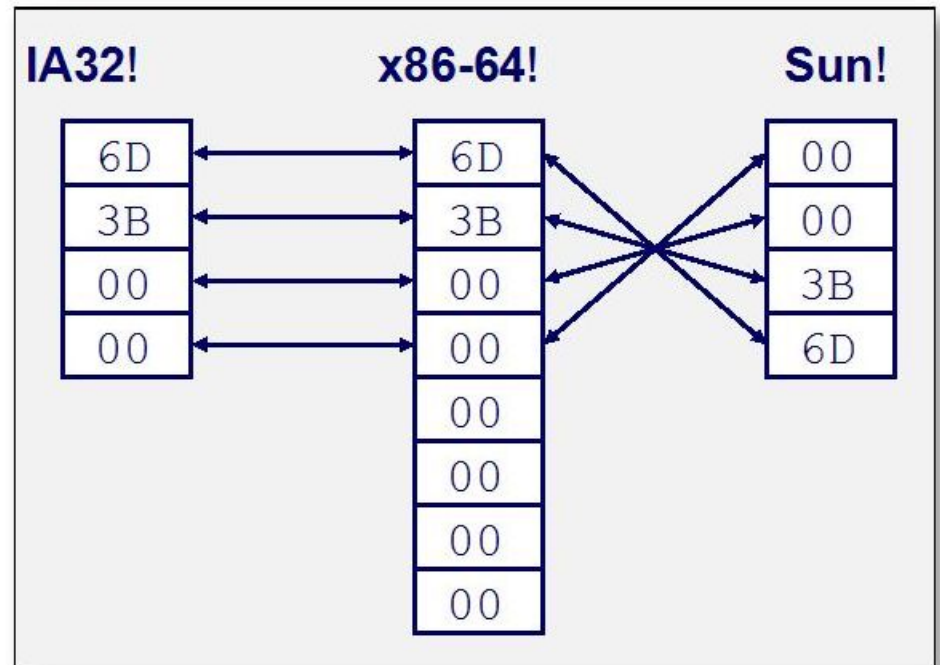
Целочисленное

Десятичное: ! 15213
Двоичное: 0011 1011 0110 1101
Шестнадцатиричное: 3 B 6 D

int A = 15213;



long int C = 15213;



Представление указателей

```
int B = -15213;  
int *P = &B;
```

Sun

EF
FF
FB
2C

IA32

D4
F8
FF
BF

x86-64!

0C
89
EC
FF
FF
7F
00
00

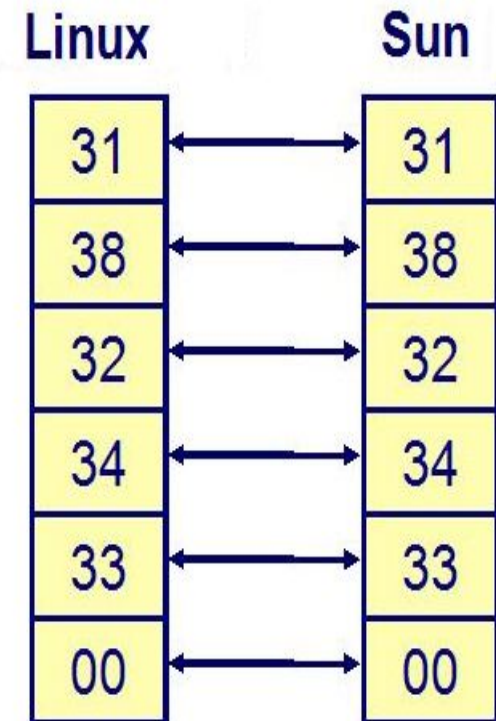
- Различные компиляторы, ОС и машины дают различное расположение в памяти

Представление строк

- **Строки в C**
- Представлены массивами символов
 - Каждый символ представлен ASCII-кодом
 - Стандартное кодирование набора символов буквы от A до Z имеют коды 0x41 до 0x5A
 - Символ "0" кодируется 0x30
 - Цифра i кодируется 0x30+i
 - Строки должны завершаться нулевым кодом
 - Символ окончания строки = 0

Пример

```
char *s="18243";  
show_bytes(s, strlen(s));
```



ASCII - American National Standard Code for Information Interchange

	_0	_1	_2	_3	_4	_5	_6	_7	_8	_9	_a	_b	_c	_d	_e	_f
0_	nul	soh	stx	etx	eot	enq	ack	bel	bs	ht	nl	vt	np	cr	so	si
1_	dle	dcl	dc2	dc3	dc4	na k	syn	etb	can	em	sub	esc	fs	gs	rs	us
2_	sp	!	"	#	\$	%	&	'	()	*	+	,	-	.	/
3_	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	:	;	<	=	>	?
4_	@	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
5_	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	[\]	^	_
6_	`	a	b	c	d	e	f	g	h	I	j	k	l	m	n	o
7_	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	{		}	~	del

Булева алгебра

- Предложена Джорджем Булем в XIX веке
Алгебраическое представление логики
Кодирует “Истина” как 1 и “Ложь” как 0

И (And)

ИЛИ (Or)

1 когда оба $A=1$ and $B=1$
 $B=1$

$A|B = 1$ когда $A\&B =$ либо $A=1$, либо

&	0	1
0	0	0
1	0	1

	0	1
0	0	1
1	1	1

НЕ(Not)

$\sim A = 1$ когда $A=0$

~	
0	1
1	0

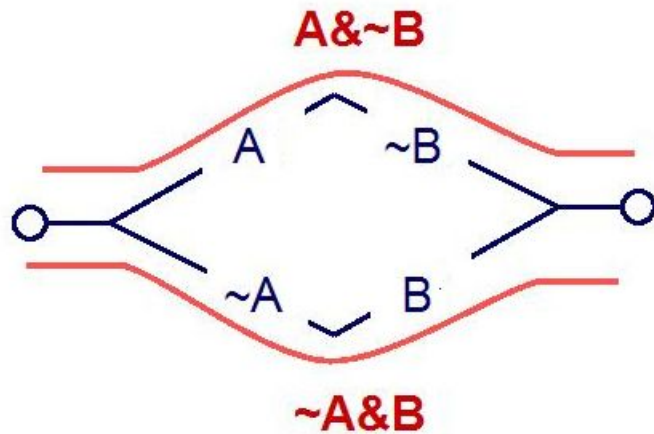
Исключающее ИЛИ (Xor)

$A\wedge B = 1$ когда либо $A=1$, либо $B=1$, но не
оба

^	0	1
0	0	1
1	1	0

Приложение булевой алгебры

- Клодом Шенноном применена к цифровым системам
- Диплом MIT 1937
- Рассмотрены схемы реле
- Замкнутый контакт кодируется как 1, разомкнутый как 0



Контакт есть если

$$A \& \sim B \mid \sim A \& B$$

$$= A \wedge B$$

Операции на уровне бита в С

- **Обобщение булевой алгебры**

Операции на битовых наборах (векторах)

- Операции выполняются побитово

	01101001	01101001	01101001	
&	<u>01010101</u>	<u>01010101</u>	^ <u>01010101</u>	~ <u>01010101</u>
	01000001	01111101	00111100	10101010

Применимы все выводы булевой алгебры

Представление и операции с множествами

- $a_j = 1$ if $j \in A$

Вс

01101001 { 0, 3, 5, 6 }

76543210

01010101 { 0, 2, 4, 6 }

76543210

Операции,

& Пересечение

01000001

{ 0, 6 }

| Объединение

01111101

{ 0, 2, 3, 4, 5, 6 }

^ Разность

00111100

{ 2, 3, 4, 5 }

~ Дополнение

10101010

{ 1, 3, 5, 7 }

Побитовые операции в языке Си

- **Операции $\&$, $|$, \sim , \wedge доступные в Си**
 - Применимы к любому “целостному” типу данных
 - `long`, `int`, `short`, `char`, `unsigned`
 - Аргументы рассматриваются как вектора битов
 - Каждый бит – независимый аргумент
- **Примеры (тип данных `char`)**
 - $\sim 0x41 \rightarrow 0xBE$
 - $\sim 01000001_2 \rightarrow 10111110_2$
 - $\sim 0x00 \rightarrow 0xFF$
 - $\sim 00000000_2 \rightarrow 11111111_2$
 - $0x69 \& 0x55 \rightarrow 0x41$
 - $01101001_2 \& 01010101_2 \rightarrow 01000001_2$
 - $0x69 | 0x55 \rightarrow 0x7D$
 - $01101001_2 | 01010101_2 \rightarrow 01111101_2$

Процедура перестановки

```
void inplace_swap(int *x, int *y)
```

```
{*x=(*x)^(*y); /*step 1*/
```

```
  *y =(*x)^(*y); /*step 2*/
```

```
  *x=(*x)^(*y); /*step 3*/
```

```
}
```

Данная процедура основана на том факте, что ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОЕ ИЛИ — коммутативно и ассоциативно, и что $a \wedge a = 0$ для любого значения a . В главе 5 описывается случай некорректной работы кода, когда два указателя x и y равны (указывают на одно и то же местоположение).

Шаг	*x	*y
Первоначально	a	b
Шаг 1	$a \wedge b$	b
Шаг 2	$a \wedge b$	$(a \wedge b) \wedge b = (b \wedge b) \wedge a = a$
Шаг 3	$(a \wedge b) \wedge a = (a \wedge a) \wedge b = b$	a

Логические операции в С

■ Логические операторы

- `&&`, `||`, `!`
 - 0 кодирует "False"
 - Всё, что не 0 кодирует "True"
 - Всегда выдаёт 0 или 1
 - Раннее завершение вычисления выражения

■ Примеры (тип данных `char`)

- `!0x41 → 0x00`
- `!0x00 → 0x01`
- `!!0x41 → 0x01`

- `0x69 && 0x55 → 0x01`
- `0x69 || 0x55 → 0x01`
- `p && *p` (способ избежать обращения по нулевому указателю)

Операторы сдвига

Операции сдвига в Си

■ Сдвиг влево: $X \ll U$

- Сдвигает вектор битов X влево на U позиций
 - Вытолкнутые слева биты теряются
 - Заполняет нулями справа

Аргумент x	01100010
$\ll 3$	00010000
Логич. $\gg 2$	00011000
Ариф. $\gg 2$	00011000

■ Сдвиг вправо: $X \gg U$

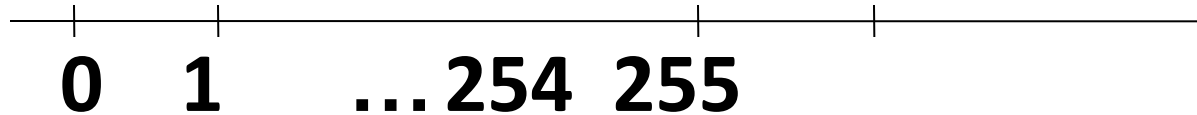
- Сдвигает вектор битов X вправо на U позиций
 - Вытолкнутые справа биты теряются
- Логический сдвиг
 - Заполняет нулями справа
- Арифметический сдвиг
 - Повторяет вправо наиболее значимый бит

Аргумент x	10100010
$\ll 3$	00010000
Логич. $\gg 2$	00101000
Ариф. $\gg 2$	11101000

■ Неопределённый результат

- Сдвиг на величину меньше 0 или больше размера слова

Целочисленное представление натуральные числа без знака



$$11111111_2 =$$

$$FF_{16} =$$

$$15 * 16 + 15 =$$

$$255_{10}$$

**255 0 1 - для 8 двоичных
СИМВОЛОВ**

Типы целого в C

Описание C	Обеспечено		Типичные 32-битовые	
	Минимум	Максимум	Минимум	Максимум
char	-127	127	-128	127
unsigned char	0	255	0	255
short [int]	-32 767	32 767	-32 768	32 767
unsigned short [int]	0	63 535	0	63 535
int	-32 767	32 767	-2 147 483 648	2 147 483 647
unsigned [int]	0	63 535	0	4 294 967 295
long [int]	-2 147 483 647	2 147 483 647	-2 147 483 648	2 147 483 647
unsigned long [int]	0	4 294 967 295	0	4 294 967 295

Представление отрицательных чисел

- путем простого выделения бита под знак числа
0***** - положительное число
1***** - отрицательное число

Результат:

00000000 = +0 10000000 = -0

- путем записи в дополнительном коде: $x + (-x) = 0$

Кодирование целочисленных значений

Беззнаковых

$$B2U(X) = \sum_{i=0}^{w-1} x_i \cdot 2^i$$

В дополнительном коде

$$B2T(X) = -x_{w-1} \cdot 2^{w-1} + \sum_{i=0}^{w-2} x_i \cdot 2^i$$

```
short int x = 15213;  
short int y = -15213;
```

знаковый
бит

■ Си short длиной в 2 байта

	Десятичное	Шестнадцатиричное	Двоичное
x	15213	3B 6D	00111011 01101101
y	-15213	C4 93	11000100 10010011

■ Знаковый бит

- В дополнительном коде, наиболее значимый бит обозначает знак
 - 0 для неотрицательных
 - 1 для отрицательных

Пример кодирования (продолжение)

$x =$ 15213: 00111011 01101101
 $y =$ -15213: 11000100 10010011

Weight	15213		-15213	
1	1	1	1	1
2	0	0	1	2
4	1	4	0	0
8	1	8	0	0
16	0	0	1	16
32	1	32	0	0
64	1	64	0	0
128	0	0	1	128
256	1	256	0	0
512	1	512	0	0
1024	0	0	1	1024
2048	1	2048	0	0
4096	1	4096	0	0
8192	1	8192	0	0
16384	0	0	1	16384
-32768	0	0	1	-32768
Итого:		15213		-15213

Границы представления в W бит

■ Беззнаковые значения

- $UMin = 0$
000...0
- $UMax = 2^w - 1$
111...1

■ Значения в дополнительном коде

- $TMin = -2^{w-1}$
100...0
- $TMax = 2^{w-1} - 1$
011...1

■ Другие значения

- минус 1
111...1

Значения для $W = 16$

	Десятичные	Шестнадцатиричные	Двоичные
UMax	65535	FF FF	11111111 11111111
TMax	32767	7F FF	01111111 11111111
TMin	-32768	80 00	10000000 00000000
-1	-1	FF FF	11111111 11111111
0	0	00 00	00000000 00000000

Значения для разных размеров слова

	W			
	8	16	32	64
UMax	255	65,535	4,294,967,295	18,446,744,073,709,551,615
TMax	127	32,767	2,147,483,647	9,223,372,036,854,775,807
TMin	-128	-32,768	-2,147,483,648	-9,223,372,036,854,775,808

■ Важно!

- $|TMin| = TMax + 1$
 - Границы несимметричны
- $UMax = 2 * TMax + 1$

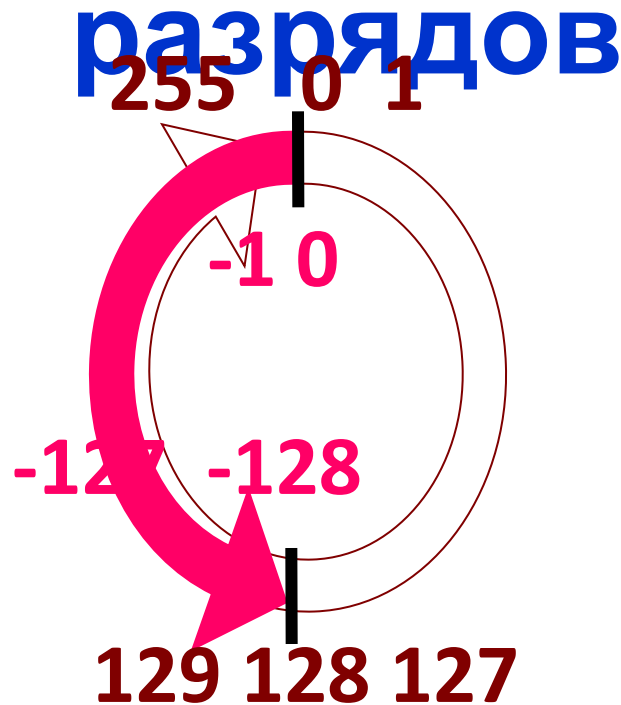
■ Программирование на Си

- `#include <limits.h>`
- Объявленные константы, e.g.,
 - `ULONG_MAX`
 - `LONG_MAX`
 - `LONG_MIN`
- Значения констант зависят от платформы

Представление отрицательных чисел ограниченным числом разрядов

$$255_{10} = 11111111_2 = -1_{10}$$

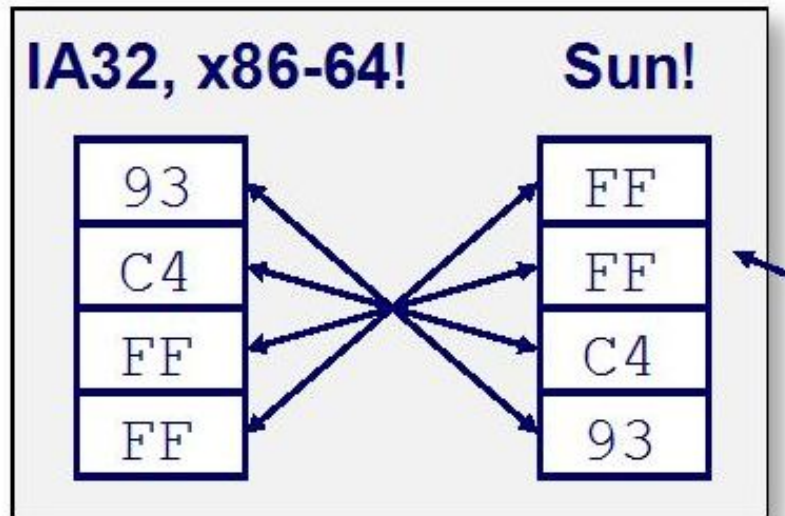
$$127_{10} = 01111111_2$$



$$10000000_2 = +128_{10} = -?_{10}$$

Хранение в памяти числа в дополнительном коде

```
int B = -15213;
```



Беззнаковые и знаковые величины

X	$V2U(X)$	$V2T(X)$
0000	0	0
0001	1	1
0010	2	2
0011	3	3
0100	4	4
0101	5	5
0110	6	6
0111	7	7
1000	8	-8
1001	9	-7
1010	10	-6
1011	11	-5
1100	12	-4
1101	13	-3
1110	14	-2
1111	15	-1

■ Совпадение

- Одинаковые кодировки неотрицательных величин

■ Взаимная однозначность

- Каждая комбинация бит представляет своё значение
- Каждое представимое целое имеет уникальную кодировку

Соответствие знаковых и беззнаковых

Биты
0000
0001
0010
0011
0100
0101
0110
0111
1000
1001
1010
1011
1100
1101
1110
1111

Знаковое
0
1
2
3
4
5
6
7
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1

=

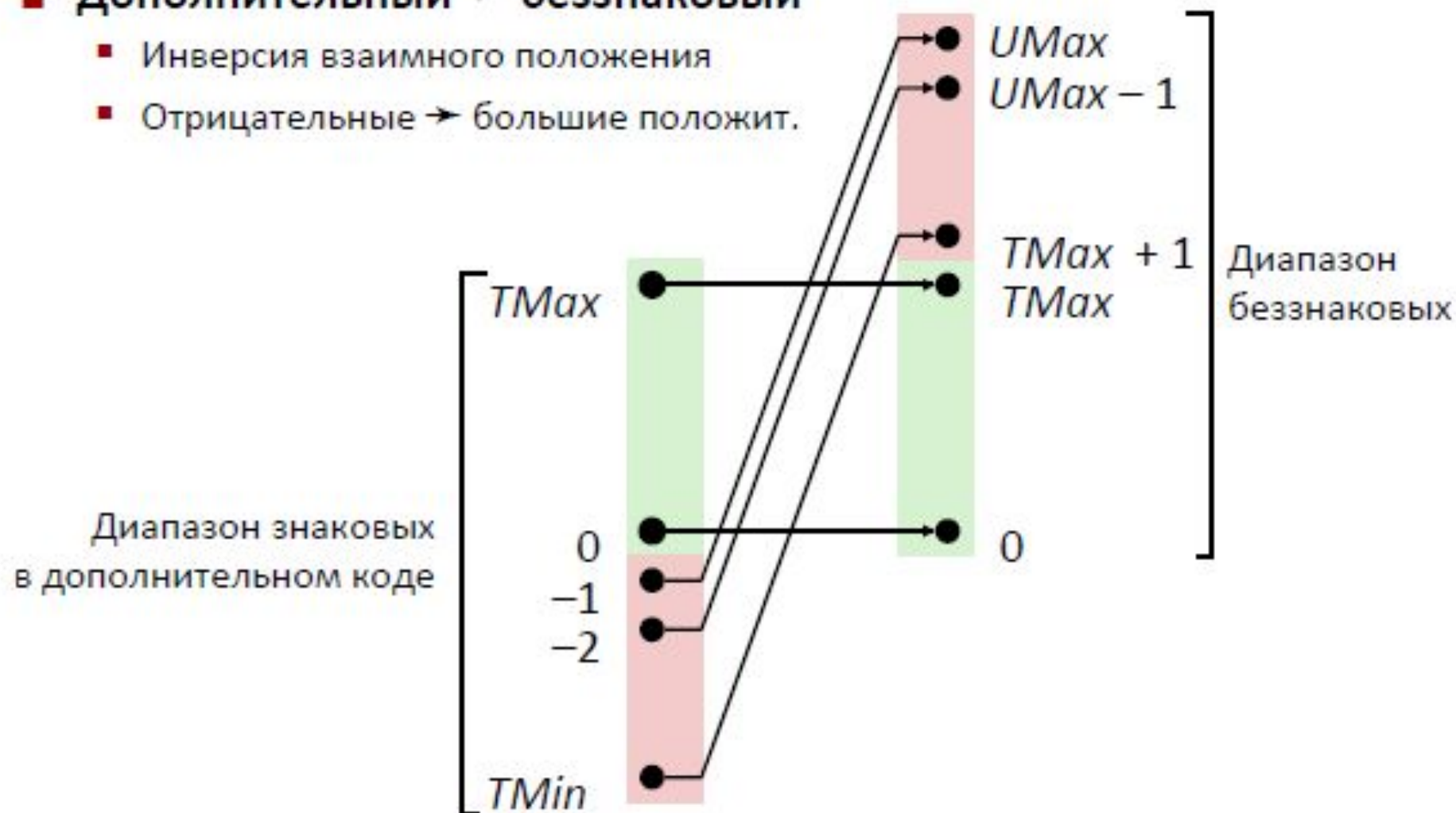
+/- 16

Беззнаковое
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15

Визуализация преобразования

■ Дополнительный \rightarrow беззнаковый

- Инверсия взаимного положения
- Отрицательные \rightarrow большие положит.



Знаковые и беззнаковые в Си

■ Константы

- По умолчанию целочисленные десятичные считаются знаковыми
- Беззнаковые обозначаются суффиксом "U"
0U, 4294967295U

■ Преобразование

- Явное

```
int tx, ty;  
unsigned ux, uy;  
tx = (int) ux;  
uy = (unsigned) ty;
```

- Неявное преобразование также происходит в присвоениях и вызовах процедур
tx = ux;
uy = ty;

Пример

```
int x=-1;  
unsigned u=2147483648;  
printf("x = %u = %d\n",x,x);  
printf ("u = %u = %d\n",u,u);
```

Результат

x= 4294967295 = -1

u=2147483648 = -2147483648

Неожиданные преобразования

■ Вычисления выражений

- При смешивании знаковых и беззнаковых, *знаковые неявно преобразуются в беззнаковые*
- Включая операции сравнения $<$, $>$, $==$, $<=$, $>=$
- Пример для $W = 32$: **TMIN = -2,147,483,648** , **TMAX = 2,147,483,647**

Выражение	Тип	Оценка
<code>0 == 0U</code>	Без знака	1
<code>- 1 < 0</code>	Со знаком	1
<code>- 1 < 0U</code>	Без знака	0*
<code>2147483648 > - 2147483647 - 1</code>	Со знаком	1
<code>2147483648U > - 2147483647 - 1</code>	Без знака	0*
<code>2147483647 > (int) 2147483648U</code>	Со знаком	1*
<code>- 1 > -2</code>	Со знаком	1
<code>(unsigned) - 1 > -2</code>	Без знака	1

Сводка: преобразование Знаковые ↔ Беззнаковые: правила

- Битовые последовательности неразличимы
- Интерпретируются по разному
- Возможная неожиданность: добавление или вычитание 2^w

- В выражениях содержащих `signed int` и `unsigned int`
 - `int` преобразуются в `unsigned` !!

Расширение битового представления

числа

Пример расширения знака

```
short int x = 15213;  
int      ix = (int) x;  
short int y = -15213;  
int      iy = (int) y;
```

	Десятич.	Шестнадцатир.	Двоичное
x	15213	3B 6D	00111011 01101101
ix	15213	00 00 3B 6D	00000000 00000000 00111011 01101101
y	-15213	C4 93	11000100 10010011
iy	-15213	FF FF C4 93	11111111 11111111 11000100 10010011

- Преобразование из короткого в длинный целочисленный тип
- Си автоматически выполняет расширение знака

Сводка:

Расширение, усечение: правила

- **Расширение (например, short int в int)**
 - Беззнаковое: добавить нули
 - Знаковое: расширить знак
 - Оба действия дают ожидаемый результат
- **Усечение (например, unsigned в unsigned short)**
 - Unsigned/signed: биты отбрасываются
 - Результат переинтерпретируется для новой длины
 - Unsigned: операция «остаток от деления»
 - Signed: операция похожая на «остаток от деления»
 - Ожидаемый результат – только для малых значений.

Пример

```
1 short sx = val; /* -12345 */
2 unsigned short usx = sx; /* 53191 */
3 int x = sx; /* -12345 */
4 unsigned ux = usx; /* 53191 */
5
6 printf ("sx = %d:\t", sx);
7 show_bytes((byte_pointer) &sx, sizeof(short));
8 printf ("usx = %u:\t", usx);
9 show_bytes((byte_pointer) &usx, sizeof(unsigned short));
10 printf ("x = %d:\t", x);
11 show_bytes((byte_pointer) &x, sizeof(int));
12 printf ("ux = %u:\t", ux);
13 show_bytes((byte_pointer) &ux, sizeof(unsigned));
```

```
sx = -12345:cf c7
```

```
usx = 53191:cf c7
```

```
x = -12345:ff ff cf c7
```

```
ux = 53191:00 00 cf c7
```

Добавление к примеру

```
1 unsigned uy = x; /* Мистика! */
2
3 printf ("uy = %u:\t", uy);
4 show_bytes ((byte_pointer) &uy, sizeof (unsigned));
```

Эта часть кода вызывает распечатку следующего:

```
uy = 4294954951:ff ff cf c7
```

Этим показывается, что выражения

```
(unsigned) (int) sx /* 4294954951 */
```

и

```
(unsigned) (unsigned short) sx /* 53191 */
```

Изменение знака: Инверсия и увеличение

- Утверждение: для дополнительного кода верно

$$\sim x + 1 == -x$$

- Инверсия

- Важно: $\sim x + x == 1111\dots111 == -1$

$$\begin{array}{r} x \quad \boxed{10011101} \\ + \quad \sim x \quad \boxed{01100010} \\ \hline -1 \quad \boxed{11111111} \end{array}$$

Примеры инверсии и увеличения

$$x = 15213$$

	Десятичное	Шестнадцатиричное	Двоичное
x	15213	3B 6D	00111011 01101101
$\sim x$	-15214	C4 92	11000100 10010010
$\sim x + 1$	-15213	C4 93	11000100 10010011
y	-15213	C4 93	11000100 10010011

$$x = 0$$

	Десятичное	Шестнадцатиричное	Двоичное
0	0	00 00	00000000 00000000
~ 0	-1	FF FF	11111111 11111111
$\sim 0 + 1$	0	00 00	00000000 00000000

Беззнаковое сложение

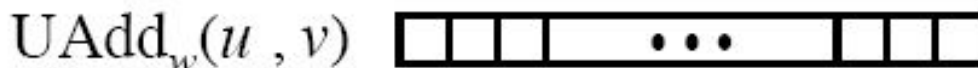
Операнды: w бит



Полная сумма: $w+1$ бит



Без переноса: w бит



■ Стандартная операция сложения

- «Игнорирует» перенос

■ Реализует сложение по модулю

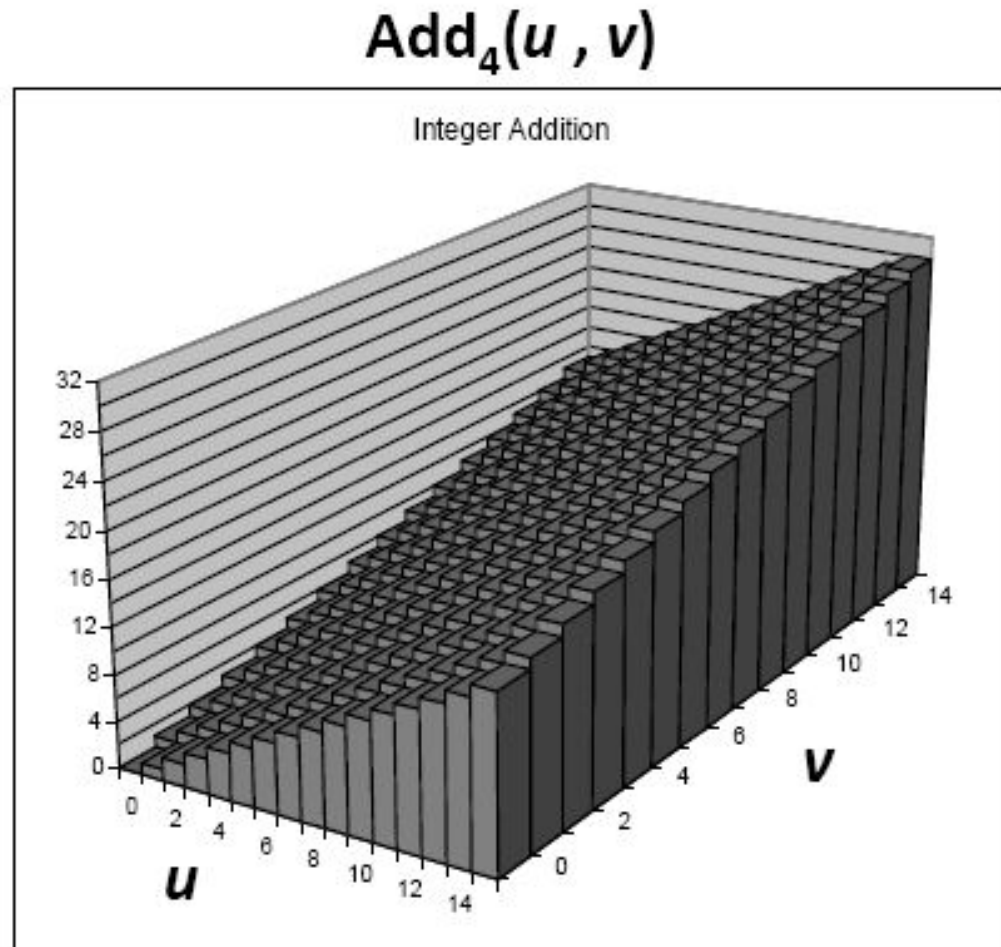
$$s = \text{UAdd}_w(u, v) = u + v \bmod 2^w$$

$$\text{UAdd}_w(u, v) = \begin{cases} u + v & u + v < 2^w \\ u + v - 2^w & u + v \geq 2^w \end{cases}$$

Математическое сложение визуально

■ Сложение целых

- 4-х битовые целые u, v
- Полная сумма $Add_4(u, v)$
- Значение растёт линейно по u и v
- Образует плоскость

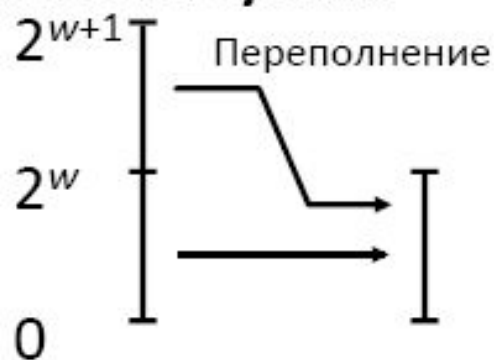


Беззнаковое сложение визуально

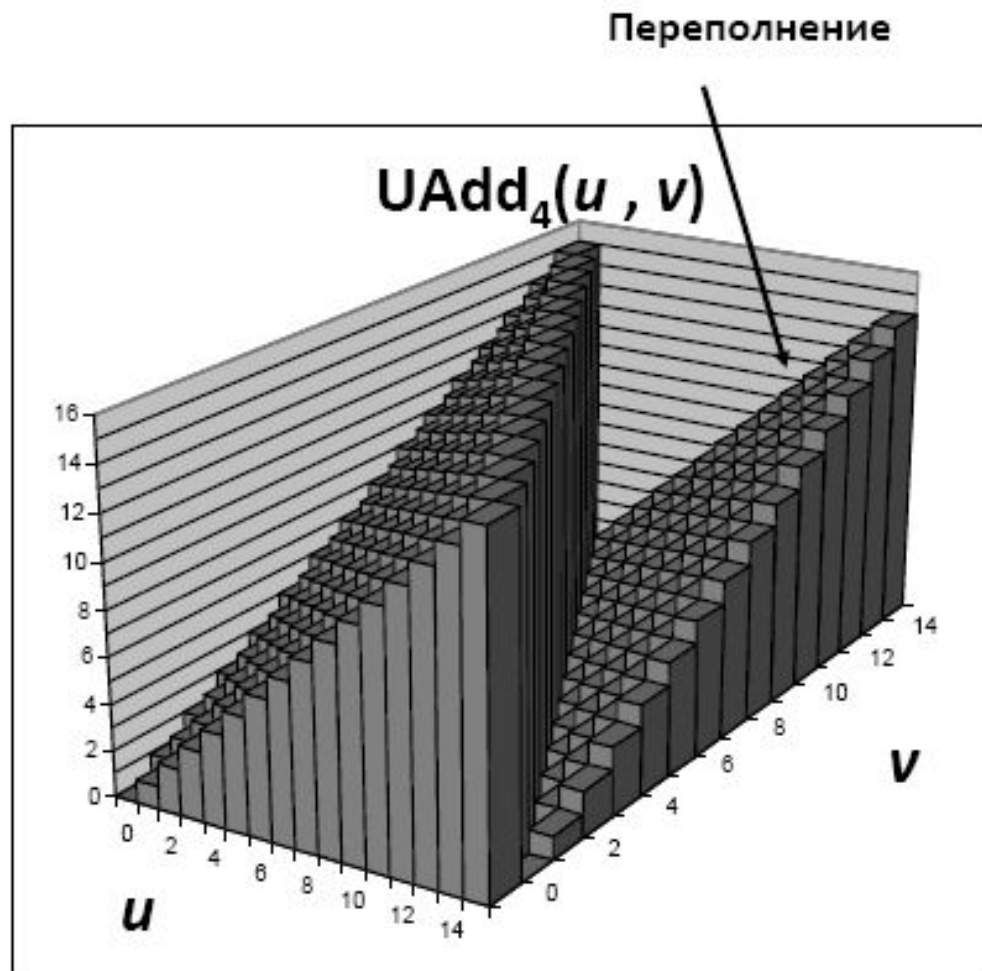
■ Усечение

- Если полная сумма $\geq 2^w$
- Не более одного раза

Полная сумма



Сумма по модулю



Математические свойства

■ Сложение по модулю образует абелеву группу

- **Замкнута** относительно сложения

$$0 \leq \text{UAdd}_w(u, v) \leq 2^w - 1$$

- **Коммутативна**

$$\text{UAdd}_w(u, v) = \text{UAdd}_w(v, u)$$

- **Ассоциативна**

$$\text{UAdd}_w(t, \text{UAdd}_w(u, v)) = \text{UAdd}_w(\text{UAdd}_w(t, u), v)$$

- **0** является нейтральным элементом

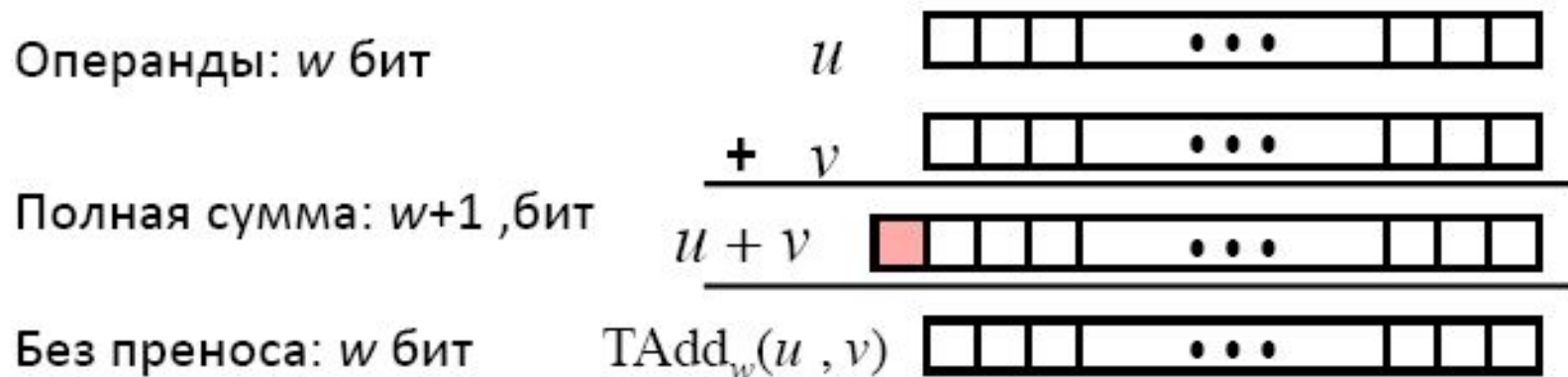
$$\text{UAdd}_w(u, 0) = u$$

- Любому элементу есть **обратный**

- Let $\text{UComp}_w(u) = 2^w - u$

$$\text{UAdd}_w(u, \text{UComp}_w(u)) = 0$$

Сложение в дополнительном коде



■ TAdd и UAdd преобразуют биты одинаково

- Знаковое и беззнаковое сложение в Си:

```
int s, t, u, v;
```

```
s = (int) ((unsigned) u + (unsigned) v);
```

```
t = u + v
```

- Всегда даст $s == t$

Переполнение TAdd

■ Функциональность

- Полное суммирование требует $w+1$ бит
- Отбрасывание MSB
- Интерпретация оставшихся бит как целого числа в дополнительном коде

0 111...1

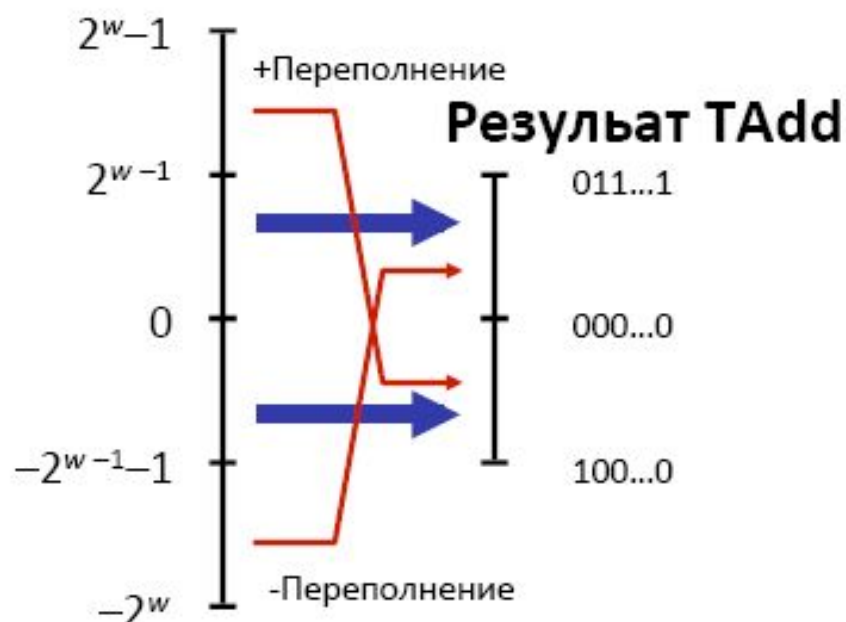
0 100...0

0 000...0

1 011...1

1 000...0

Полная симма



Сложение в доп. коде визуально

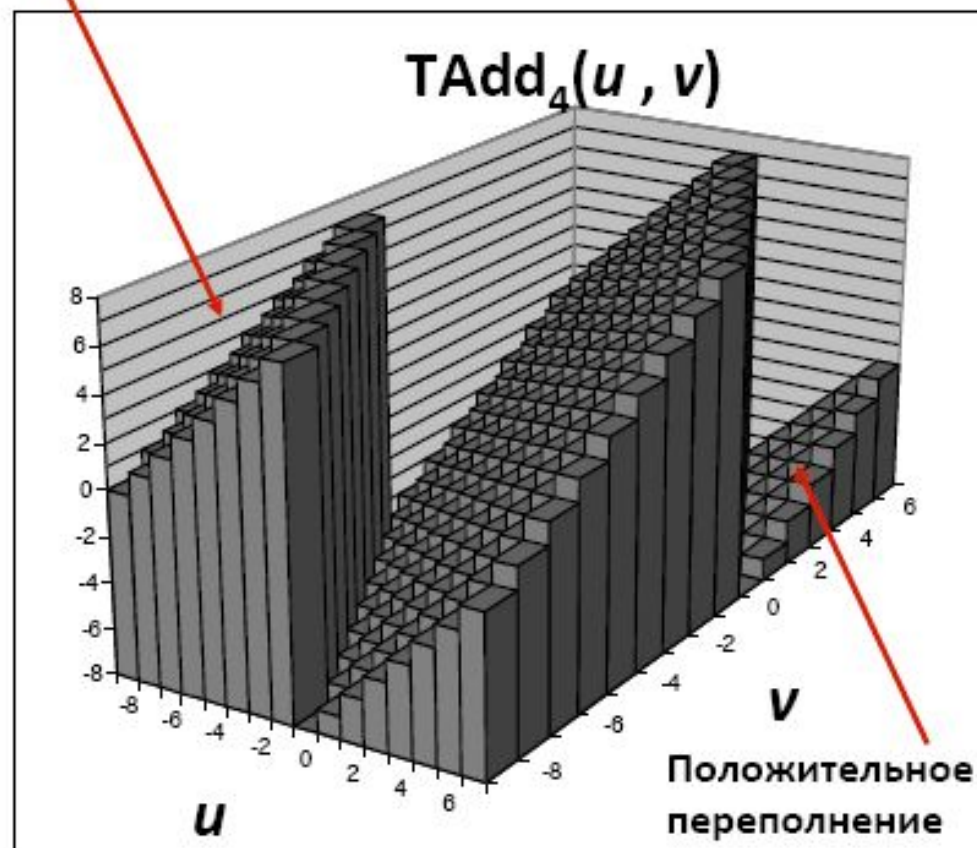
■ Значения

- 4-ре бита в доп. коде
- Диапазон от -8 до +7

■ Отсечение

- Если сумма $\geq 2^{w-1}$
 - Результат отрицательный
 - Не более раза
- Если сумма $< -2^{w-1}$
 - Результат положительный
 - Не более раза

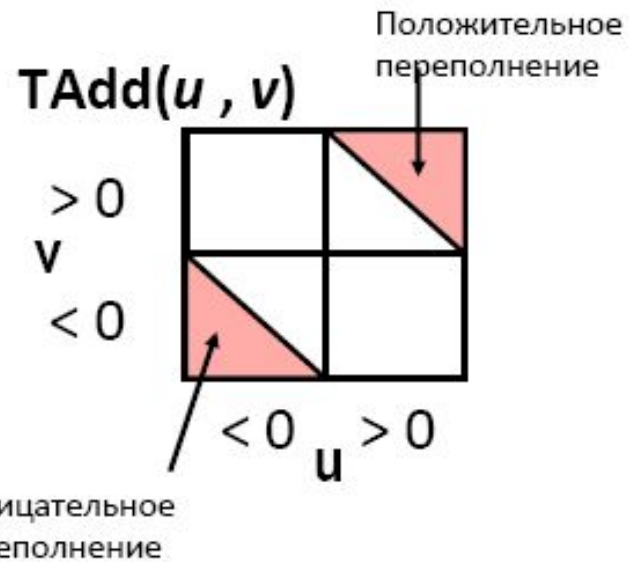
Отрицательное
переполнение



Определение TAdd

■ Функциональность

- Полное суммирование требует $w+1$ бит
- Отбрасывание MSB
- Интерпретация оставшихся бит как целого числа в дополнительном коде



$$TAdd_w(u, v) = \begin{cases} u + v + 2^{w-1} & 2^w < u + v \\ u + v & -2^{w-1} \leq u + v \leq 2^{w-1} \\ u + v - 2^{w-1} & TMax_w < u + v \end{cases}$$

Отрицательное переполнение

Положительное переполнение

Математические свойства TAdd

■ Группа изоморфная to беззнаковым с UAdd

- $TAdd_w(u, v) = U2T(UAdd_w(T2U(u), T2U(v)))$
 - т.к. битовые преобразования идентичны

■ Дополнительные коды с TAdd образуют группу

- Замкнута, коммутативна, ассоциативна, 0 – нейтральный элемент
- Для каждого элемента есть обратный>

$$TComp_w(u) = \begin{cases} -u & u \neq TMin_w \\ TMin_w & u = TMin_w \end{cases}$$