Алексеева Е.В., учитель информатики и ИКТ МОУ «Сланцевская СОШ №3»

11 класс

26.11.2016

Введение в теорию графов

начать

Введение в теорию графов

Граф отображает элементный состав системы и структуру связей.

Понятие графа

Граф – это множество точек или вершин и множество линий или ребер, соединяющих между собой все или часть этих точек. Вершины, прилегающие к одному и тому же ребру, называются смежными. Два ребра, у которых есть общая вершина, также называются смежными (или соседними).

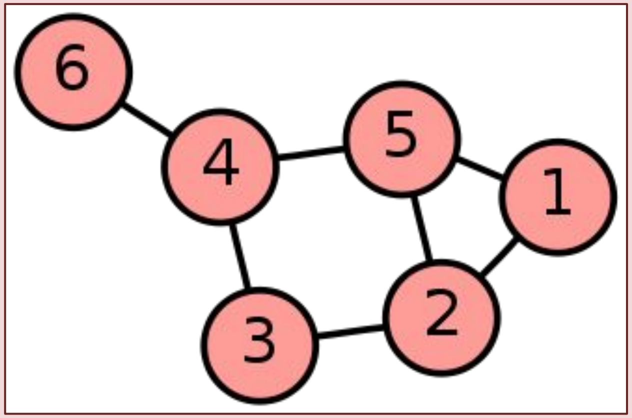


Рис. 1. Граф с шестью вершинами и семью ребрами

Элементы графа

Петля это дуга, начальная и конечная вершина которой совпадают.

Пустым (нулевым) называется граф без ребер.

Полным называется граф, в котором каждые две вершины смежные.

Нулевой граф

Граф, состоящий из «изолированных» вершин, называется нулевым графом

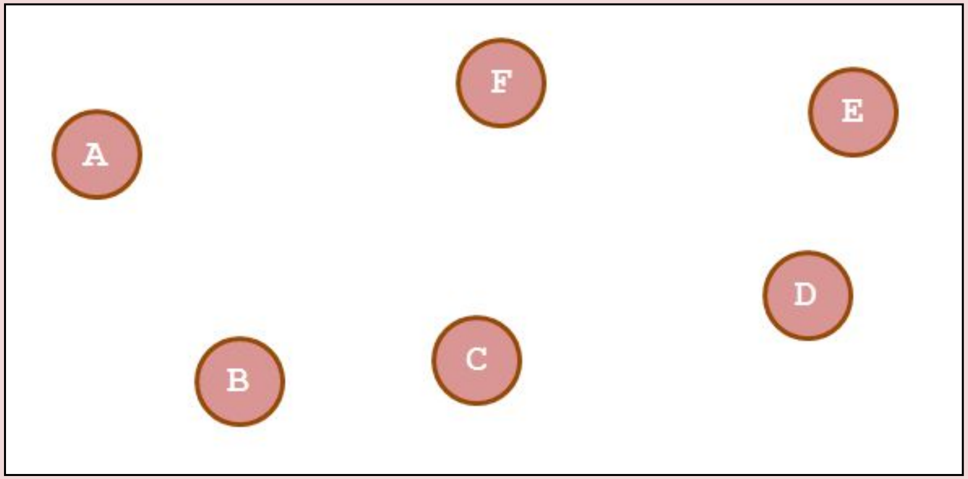


Рис. 2. Нулевой граф

Неполный граф

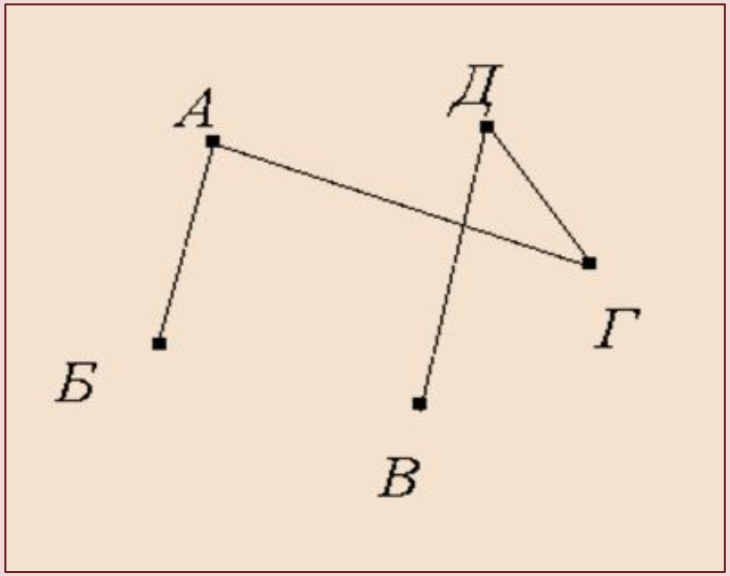


Рис. 3. Неполный граф

Графы, в которых не построены все возможные ребра, называются неполными графами.

Степень графа

Количество рёбер, выходящих из вершины графа, называется степенью вершины. Вершина графа, имеющая нечётную степень, называется нечетной, а чётную степень – чётной.

Если степени всех вершин графа равны, то граф называется однородным. Таким образом, любой полный граф – однородный.

Заметим, что если полный граф имеет n вершин, то количество ребер равно

$n(n-1)/2$

Задание 1. Существует ли полный граф с семью ребрами?

ОТВЕТ

Решение: Зная количество ребер, узнаем количество вершин.

$n(n-1)/2=7.$

$n(n-1)=14.$

Заметим, что n и (n-1) – это два последовательных натуральных числа. Число 14 нельзя представить в виде произведения двух последовательных натуральных чисел, значит, данное уравнение не имеет решений. Следовательно, такого графа не существует.

Задание 2.

1. Построить полный граф, если известно что он содержит в себе 7 вершин.
2. Составьте схему проведения розыгрыша кубка по олимпийской системе, в которой участвуют 10 команд.

Два ребра, у которых есть общая вершина, также называются смежными (или соседними).

Ориентированный граф

Граф называется ориентированным (или орграфом), если некоторые ребра имеют направление. Это означает, что в орграфе некоторая вершина может быть соединена с другой вершиной, а обратного соединения нет. Если ребра ориентированы, что обычно показывают стрелками, то они называются дугами.

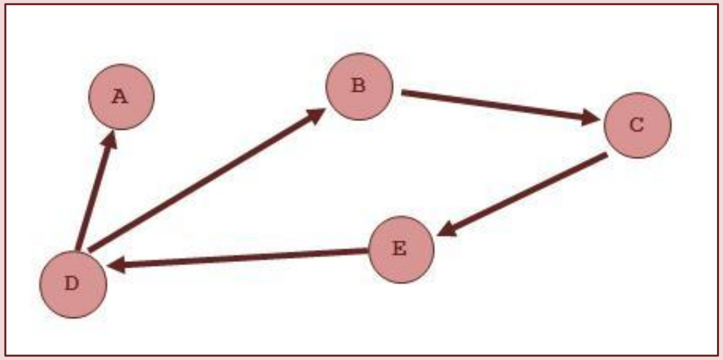


Рис. 4. Ориентированный граф

Ориентированный и неориентированный графы

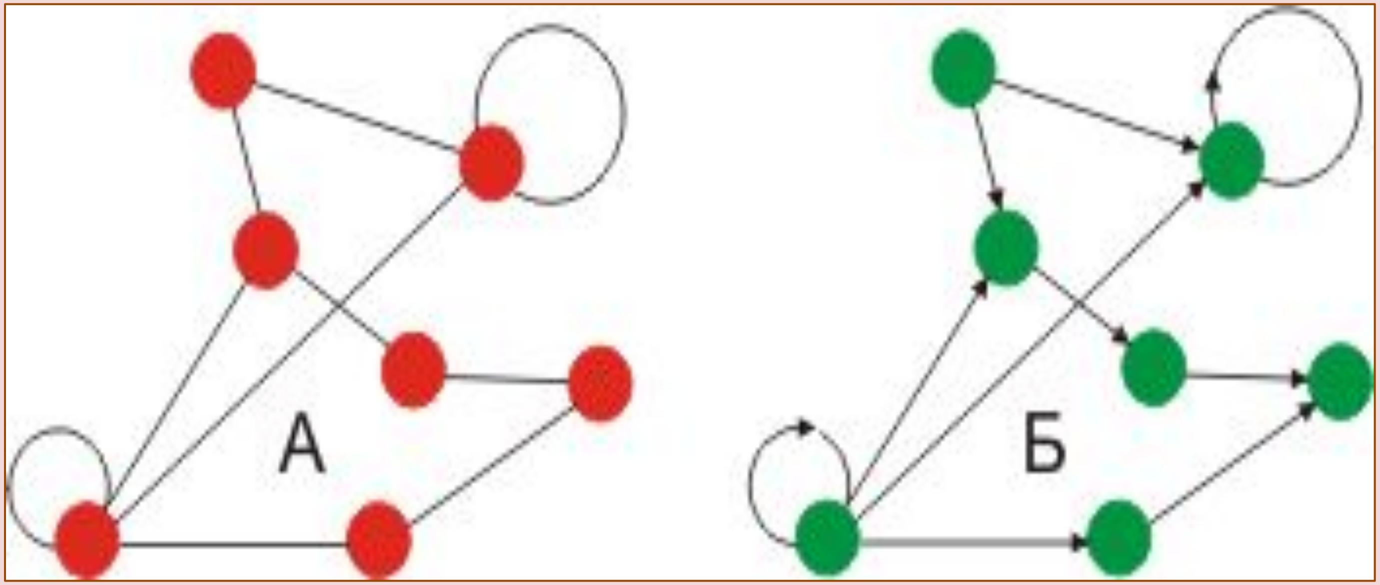


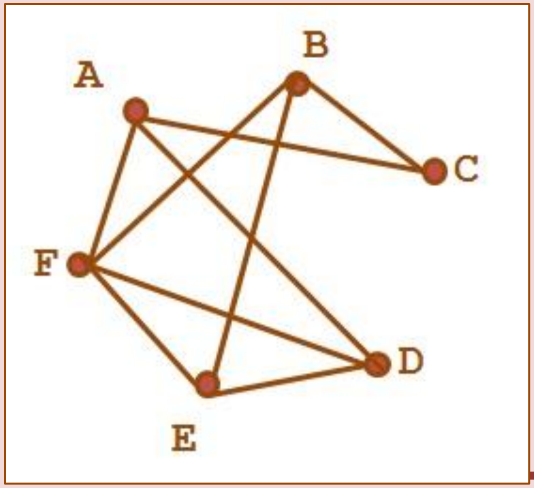
Рис. 5. Примеры неориентированного и ориентированного графов (А и Б)

Задание 3. Построить граф по заданному условию:

В соревнованиях по футболу участвуют 6 команд. Каждую из команд обозначили буквами A, B, C, D, E и F. Через несколько недель некоторые из команд уже сыграли друг с другом:

ОТВЕТ

A с C, D, F;
B с C, E, F;
C с A, B;
D с A, E, F;
E с B, D, F;
F с A, B, D.



Запомнить!

Не следует путать изображение графа с собственно графом (абстрактной структурой), поскольку одному графу можно сопоставить не одно графическое представление. Изображение призвано лишь показать, какие пары вершин соединены рёбрами, а какие – нет.

Изображение графа

Один и тот же граф может выглядеть на рисунках по-разному. На рисунке 6 (а, б, в) изображен один и тот же граф.

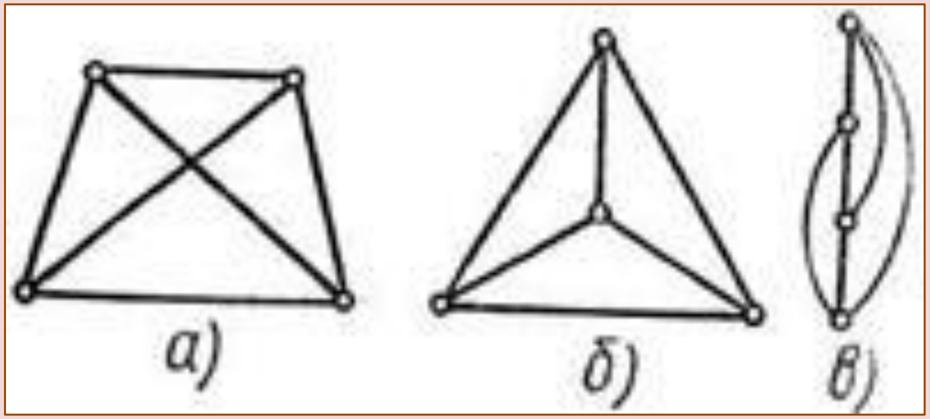
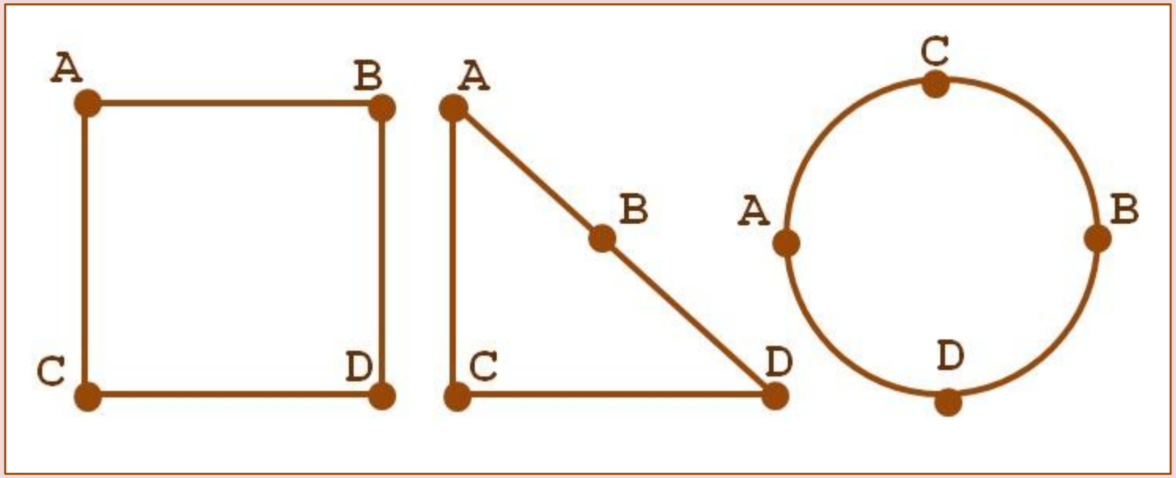


Рис. 6. Примеры изображения графа

Задание 4.

Определить изображают ли фигуры на рисунке один и тот же граф или нет.

1) 2) 3)



ОТВЕТ

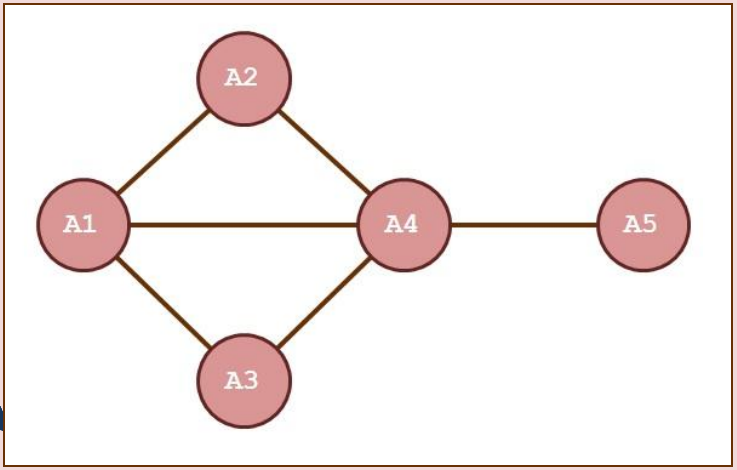
Рисунок 1 и рисунок 2 являются изображениями одного графа.
Рисунок 3 изображением другого графа

Путь в графе

Путём в графе называется такая последовательность ребер, в которой каждые два соседних ребра имеют общую вершину и никакое ребро не встречается более одного раза.

Задание 5.

1. (A1 A4); (A4 A5).
2. (A1 A2); (A2 A4); (A4 A5).
3. (A1 A4); (A4 A2); (A2 A1); (A1 A4); (A4, A5).
4. (A1 A4); (A4 A2); (A2 A1); (A1 A3); (A3 A4); (A4, A5).



Определить какая из перечисленных последовательностей путём не является.

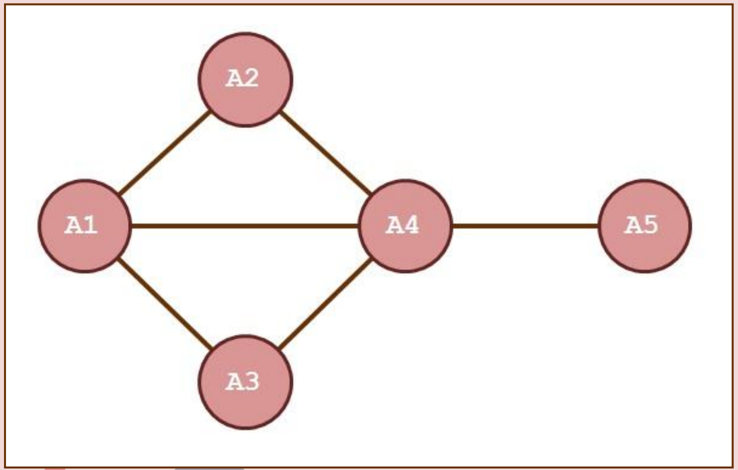
ОТВЕТ

Третья последовательность (A1 A4); (A4 A2); (A2 A1); (A1 A4); (A4, A5).

Путь называется простым, если он не проходит ни через одну из вершин графа более одного раза.

Задание 6.

1. (А1 А4); (А4 А5).
2. (А1 А2); (А2 А4); (А4 А5).
3. (А1 А4); (А4 А2); (А2 А1); (А1 А4); (А4, А5).
4. (А1 А4); (А4 А2); (А2 А1); (А1 А3); (А3 А4); (А4, А5).



Первая, вторая и четвертая последовательности являются путями, а третья нет, т.к. ребро (А1, А4) повторяется. Первая и вторая последовательность являются простыми путями, а четвертая нет, т.к. вершины А1 и А4 повторяются.

ОТВЕТ

Понятие цикла в графе

Циклом называется путь, в котором совпадают его начальная и конечная вершины.

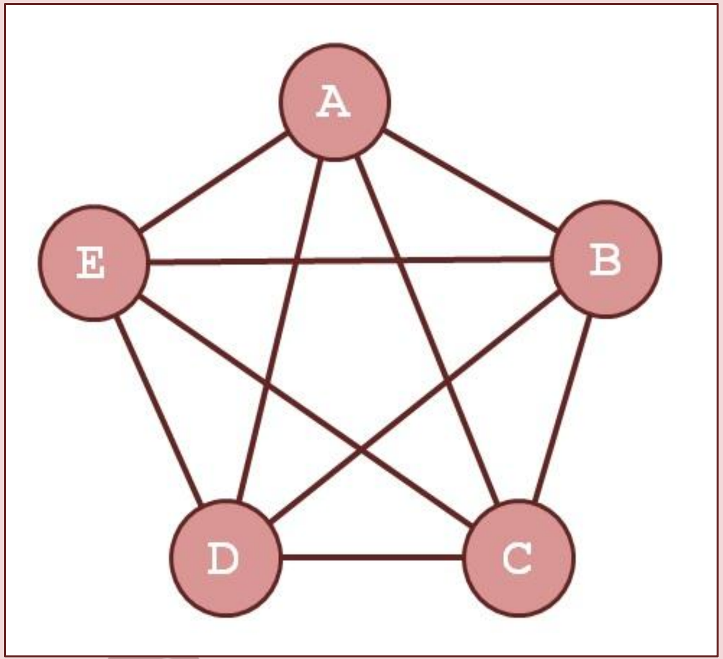
Простым циклом в графе называется цикл, не проходящий ни через одну из вершин графа более одного раза.

Задание 7.

Назовите в графе циклы, содержащие

a) 4 ребра;
b) 6 ребер;
c) 5 ребер;
d) 10 ребер.

Какие из этих циклов являются простыми?



ОТВЕТ

ОТВЕТ

Решение:

a) (AB, BC, CE, EA), (CD, DA, AB, BC), (EB, BC, CD, DE) и т.д. – простые циклы.

b) (DB, BE, EA, AB, BC, CD), (EC, CA, AB, BC, CD, DE) и т.д. – циклы.

c) (AB, BC, CD, DE, EA), (AC, CE, EB, BD, DA) и т.д. – простые циклы.

d) (AC, CE, EB, BD, DA, AB, BC, CD, DE, EA), (EB, BD, DA, AC, CE, EA, AB, BC, CD, DE) и т.д. – циклы.