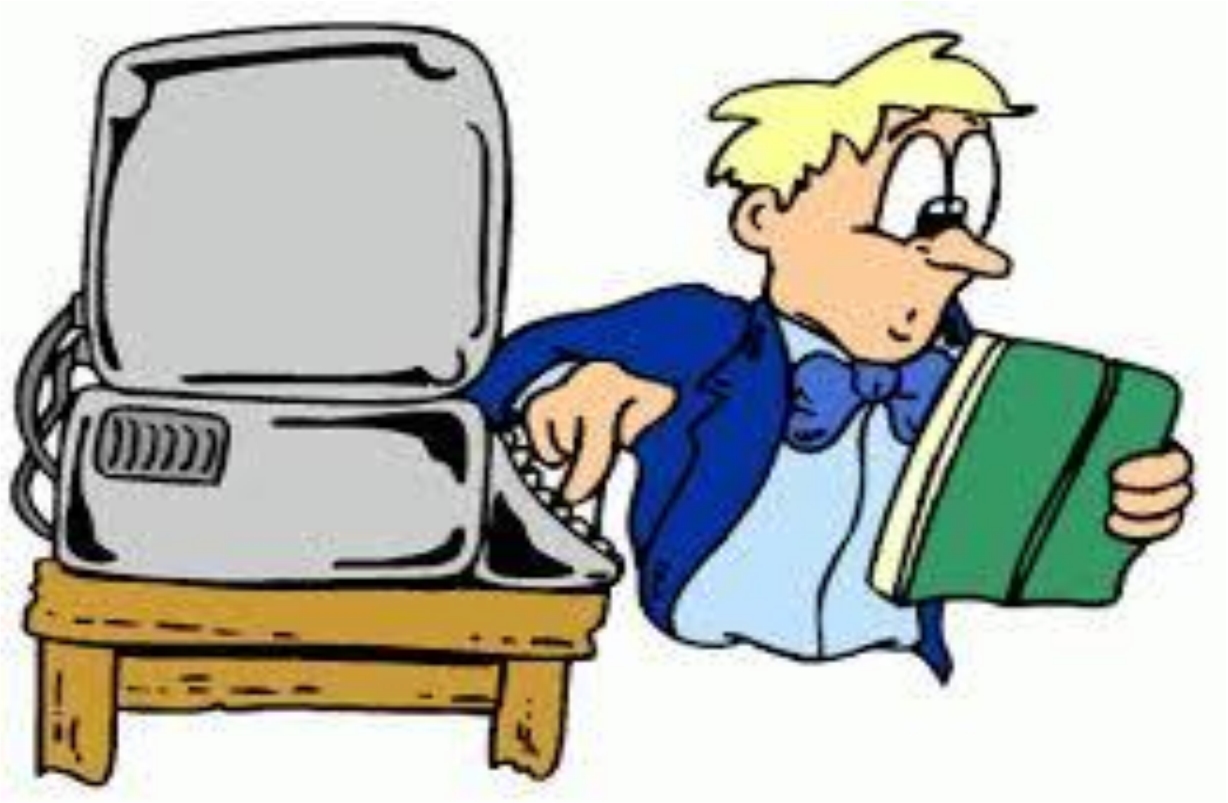
Курсовая работа



Задание

- Вычислить определенный интеграл с заданной точностью ε=0.0001 методам: правых прямоугольников, центральных прямоугольников, левых прямоугольников, трапеций, Симпсона. Сравнить полученные результаты, сделать выводы;
- Исследовать зависимость точности вычисления интеграла ε от числа шагов n. Сравнить полученные результаты, сделать выводы;
- Оценить погрешность вычисления интеграла по правилу Рунге;
- Для наглядности полученных результатов использовать таблицы и графики;
- Сделать презентацию курсовой работы.

Вариант № 9

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$$

Вычисления с помощью программ на языке C++

Методы:

- Правых прямоугольников
- Центральных прямоугольников
- Левых прямоугольников
- Трапеций
- Симпсона

Аналитический расчет

Решение

Наша функция:

$$f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$$

Вычислим первообразную (интеграл) для нашей функции (константу, возникающую при интегрировании, здесь не учитываем):

$$F(x) = \int f(x)dx =$$

$$= \int \frac{x}{(1+x^2)^2}dx = -\left(\frac{1}{2+2\,x^2}\right)$$

В итоге получили:

$$F(x) = -\left(\frac{1}{2+2\,x^2}\right)$$

По теореме Ньютона-Лейбница определенный интеграл можно представить как:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

Подставляем в данную формулу наши данные, а именно первообразную и пределы интегрирования:

$$\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2}dx =$$

$$= \left(-\left(\frac{1}{2+2\,x^2}\right)\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \left(-\left(\frac{1}{2\,1^2+2}\right)\right)-\left(-\left(\frac{1}{2\,0^2+2}\right)\right) =$$

$$= \left(-\left(\frac{1}{4}\right)\right)-\left(-\left(\frac{1}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{4} = 0.25$$

Оценки погрешности по правилу Рунге

- $h = 0,1$
- $N = (b – a) / h = (1 – 0) / 0,1 = 10$

$$\frac{|I_h - I_{2h}|}{15} < \varepsilon ,$$

- Вычислив по методу Симпсона, получим:

  | (0,249947-0,249947) | / 15 < E

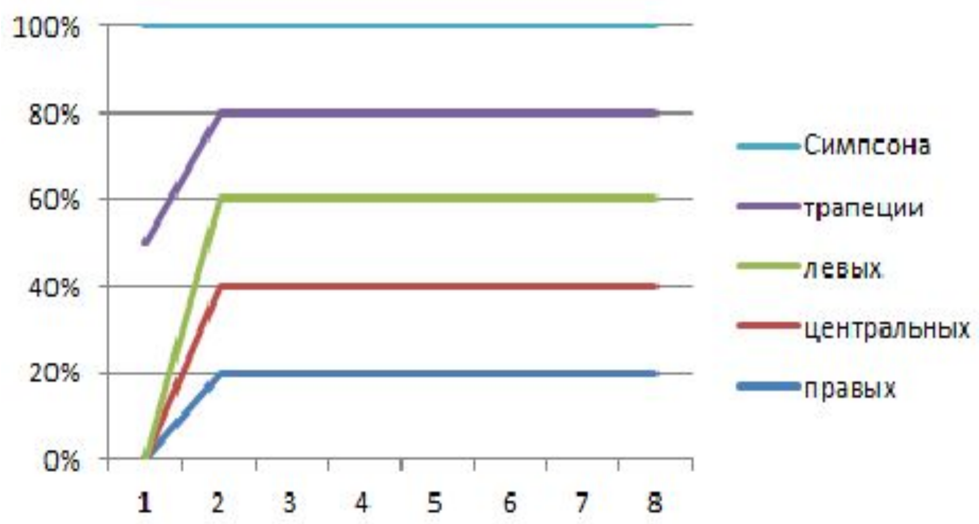
  Условие выполняется, следовательно приближенное значение интеграла с точностью 0,1 = 0,249947

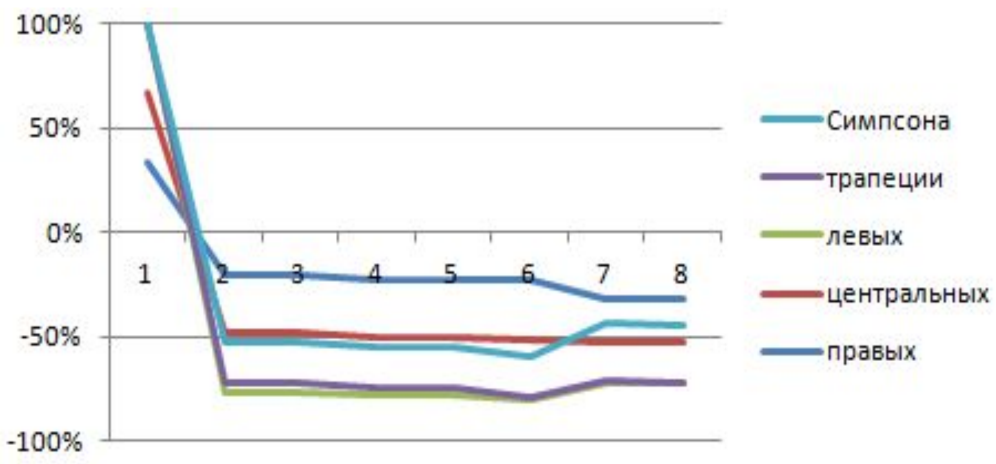
Таблицы сравнения

n	правых прямоугольников	центральных прямоугольников	левых прямоугольников	трапеции	Симпсона
1	0	0	0	0,249975	0,249919
5	0,250071	0,250096	0,250098	0,249984	0,249933
10	0,250071	0,250096	0,250098	0,249984	0,249933
25	0,250063	0,250078	0,250077	0,24999	0,249947
50	0,250063	0,250078	0,250077	0,24999	0,249947
100	0,250063	0,250078	0,250077	0,249997	0,249947
150	0,25008	0,250053	0,25005	0,249999	0,249929
300	0,25008	0,250053	0,25005	0,25	0,249929

	зависимость точности вычисления интеграла E от числа шагов n				
n	правых прямоугольников	центральных прямоугольников	левых прямоугольников	трапеции	Симпсона
1	0,25	0,25	0,25	0,000025	0,000081
5	-0,000071	-0,000096	-0,000098	0,000016	0,000067
10	-0,000071	-0,000096	-0,000098	0,000016	0,000067
25	-0,000063	-0,000078	-0,000077	0,00001	0,000053
50	-0,000063	-0,000078	-0,000077	0,00001	0,000053
100	-0,000063	-0,000078	-0,000077	0,000003	0,000053
150	-0,00008	-0,000053	-0,00005	0,000001	0,000071
300	-0,00008	-0,000053	-0,00005	0	0,000071

Графики


100%
80%
60%
40%
20%
0%
1
2
3
4
5
6
7
8
Симпсона
трапеции
левых
центральных
правых


100%
50%
0%
-50%
-100%
1
2
3
4
5
6
7
8
Симпсона
трапеции
левых
центральных
правых