Логика в задачах ГИА и ЕГЭ по информатике

Вишневская М.П.,
учитель информатики
МАОУ «Гимназия №3» г. Саратова
10.02.2014

Кодификатор и спецификация ГИА_2014

Кодификатор:

Раздел 1. Информационные процессы

Раздел 1.3.3 Логические значения, операции, выражения

Спецификация:

На уровне **воспроизведения** знаний проверяется такой фундаментальный теоретический материал, как:

………………………………………………………

- **основные элементы математической логики**;

………………………………………………………

Задания ГИА

2 Для какого из приведённых чисел ложно высказывание:
НЕ (число > 50) **ИЛИ** (число чётное)?

1) 123 2) 56 3) 9 4) 8

Решение:

НЕ (число >50) **ИЛИ** (число чётное) = 0

0 **0**

число >50 **число нечётное**

Ответ: 123

Задания ГИА

12 Ниже в табличной форме представлен фрагмент базы данных «Отправление поездов дальнего следования».

Пункт назначения	Категория поезда	Время в пути	Вокзал
Махачкала	скорый	39.25	Павелецкий
Махачкала	скорый	53.53	Курский
Мурманск	скорый	35.32	Ленинградский
Мурманск	скорый	32.50	Ленинградский
Мурманск	пассажирский	37.52	Ленинградский
Мурманск	пассажирский	37.16	Ленинградский
Назрань	пассажирский	40.23	Павелецкий
Нальчик	скорый	34.55	Казанский
Нерюнгри	скорый	125.41	Казанский
Новосибирск	скорый	47.30	Ярославский
Нижневартовск	скорый	52.33	Казанский
Нижний Тагил	фирменный	31.36	Ярославский

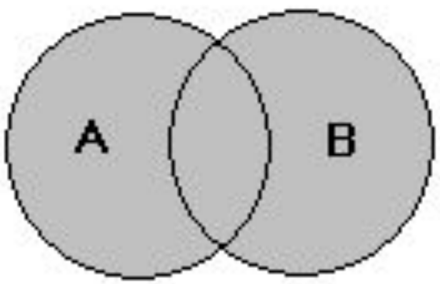
1	1
1	1
0	1
0	1
1	0
1	0
1	0
0	1
1	1
1	1
1	1
0	0

Сколько записей в данном фрагменте удовлетворяют условию **(Категория поезда = «скорый») И (Время в пути > 36.00)**?
В ответе укажите одно число – искомое количество записей.

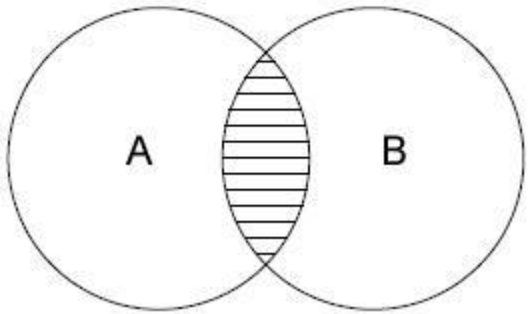
Ответ: 5

Задания ГИА

18 В таблице приведены запросы к поисковому серверу. Для каждого запроса указан его код – соответствующая буква от А до Г. Расположите коды запросов слева направо в порядке **возрастания** количества страниц, которые нашёл поисковый сервер по каждому запросу. По всем запросам было найдено разное количество страниц.
Для обозначения логической операции «ИЛИ» в запросе используется символ «|», а для логической операции «И» – «&».



Код	Запрос
А	Солнце & Воздух
Б	Солнце | Воздух | Вода
В	Солнце | Воздух | Вода | Огонь
Г	Солнце | Воздух



Ответ: АГБВ

Кодификатор и спецификация ЕГЭ_2014

Кодификатор:

Раздел 1. Информация и информационные процессы

1.5.1 Высказывания, логические операции, кванторы, истинность высказывания

Спецификация:

В КИМ ЕГЭ по информатике **не включены задания, требующие простого воспроизведения** знания терминов, понятий, величин, правил (такие задания слишком просты для итогового экзамена).

…………………………………………………………

- формировать для логической функции таблицу истинности и логическую схему;
- формулировать запросы к базам данных и поисковым системам.

Задания ЕГЭ

A3 Дан фрагмент таблицы истинности выражения F.

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	F
1	1	0	1	1	1	1	1	0
1	0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1

Каким выражением может быть F?

1) $\neg x1 \wedge x2 \wedge \neg x3 \wedge x4 \wedge x5 \wedge \neg x6 \wedge x7 \wedge x8$
2) $\neg x1 \vee \neg x2 \vee x3 \vee \neg x4 \vee \neg x5 \vee \neg x6 \vee \neg x7 \vee \neg x8$
3) $x1 \wedge \neg x2 \wedge x3 \wedge \neg x4 \wedge x5 \wedge x6 \wedge \neg x7 \wedge x8$
4) $x1 \vee \neg x2 \vee x3 \vee \neg x4 \vee \neg x5 \vee x6 \vee \neg x7 \vee \neg x8$

Задания ЕГЭ

A10 На числовой прямой даны два отрезка: P = [1, 39] и Q = [23, 58]. Выберите из предложенных отрезков такой отрезок A, что логическое выражение

$$((x \in P) \rightarrow \neg (x \in Q)) \rightarrow \neg (x \in A)$$

тождественно истинно, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

1) [5, 20] 2) [25, 35] 3) [40, 55] 4) [20, 40]

Задания ЕГЭ

B12 В языке запросов поискового сервера для обозначения логической операции «ИЛИ» используется символ «|», а для логической операции «И» – символ «&».
В таблице приведены запросы и количество найденных по ним страниц некоторого сегмента сети Интернет.

Запрос	**Найдено страниц (в тысячах)**
хоккей & футбол & волейбол	80
футбол & волейбол	260
хоккей & волейбол	230

Компьютер печатает количество страниц (в тысячах), которое будет найдено по следующему запросу:

(хоккей | футбол) & волейбол

Укажите целое число, которое напечатает компьютер.
Считается, что все запросы выполнялись практически одновременно, так что набор страниц, содержащих все искомые слова, не изменялся за время выполнения запросов.

Ответ: ______________________________.

Задания ЕГЭ

B15 Сколько существует различных наборов значений логических переменных x_1, x_2, … x_{10}, которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

$\neg(x_1 \equiv x_2) \wedge ((x_1 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_3)) = 0$
$\neg(x_2 \equiv x_3) \wedge ((x_2 \wedge \neg x_4) \vee (\neg x_2 \wedge x_4)) = 0$
…
$\neg(x_8 \equiv x_9) \wedge ((x_8 \wedge \neg x_{10}) \vee (\neg x_8 \wedge x_{10})) = 0$

В ответе **не нужно** перечислять все различные наборы значений переменных x_1, x_2, … x_{10} при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

Ответ: ___________________________.

Задания ЕГЭ - ГИА

Прослеживается преемственность между заданиями:

- №2 и А3 (Умение применять логические операции НЕ, И, ИЛИ);
- №18 и В12 (поиск в Интернете);
- возможно, между №12 и А6 (поиск в базах данных).

Наибольшую сложность представляют задания **А10** и **В15** (!)

Задание ЕГЭ А10

Логические операции с утверждениями о множествах связаны с операциями над множествами (теоретико-множественными операциями).

Пусть A, B – некоторые множества. Их элементы принадлежат некоторому универсальному множеству U (в зависимости от задачи это может быть, например, множество целых чисел, множество точек на прямой и т.д.). Тогда верно следующее:

1. Пусть X - произвольный элемент универсального множества U. Тогда следующие высказывания эквивалентны (⇔):

$$(x \in A) \wedge (x \in B) \Leftrightarrow x \in A \cap B$$

$$(x \in A) \vee (x \in B) \Leftrightarrow x \in A \cup B$$

$$\neg(x \in A) \Leftrightarrow x \in U \setminus A$$

Задание ЕГЭ А10

2. Пусть $\mathbf{A \subset B}$, т.е. А – подмножество В, х – произвольный элемент универсального множества U. Тогда истинно высказывание:

$$(\mathbf{x \in A}) \Rightarrow (\mathbf{x \in B}).$$

Обратно, пусть высказывание $(\mathbf{x \in A}) \Rightarrow (\mathbf{x \in B})$ истинно при любом $\mathbf{x \in U}$. Тогда $\mathbf{A \subset B}$.

Обозначения:

A ∩ B – пересечение множеств А и В

A ∪ B – объединение множеств А и В

U \ A – дополнение множества А до универсального множества U

Задание ЕГЭ А10

На числовой прямой даны два отрезка:
P = [2, 10] и Q = [6, 14].
Выберите такой отрезок А, что формула

$$((x \in A) \to (x \in P)) \vee (x \in Q) \qquad (1)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

1) [0, 3] 2) [3, 11] 3) [11, 15] 4) [15, 17]

Решение

Преобразуем формулу. По определению,

$$(F \Rightarrow G) \Leftrightarrow (\neg F \vee G)$$

Из формулы (1) получаем:

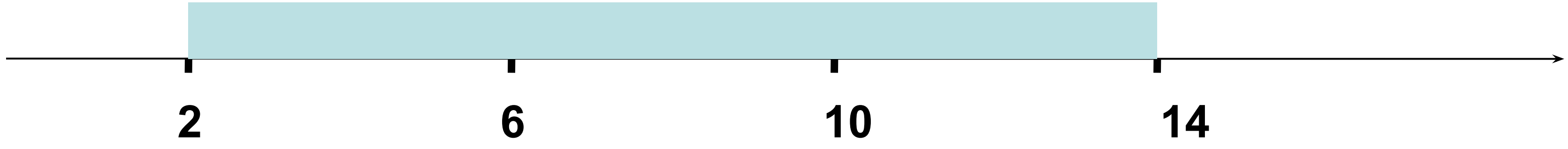
$$\neg(x \in A) \vee (x \in P) \vee (x \in Q) \qquad (2)$$

Далее, $(x \in P) \vee (x \in Q) \Leftrightarrow x \in (P \cup Q)$ при любых x, P, Q.

По условию, $P = [2,10]$, $Q = [6,14]$. Т.о. $P \cup Q = [2,14]$.

Перепишем формулу (2):

$$\neg(x \in A) \vee (x \in [2,14])$$

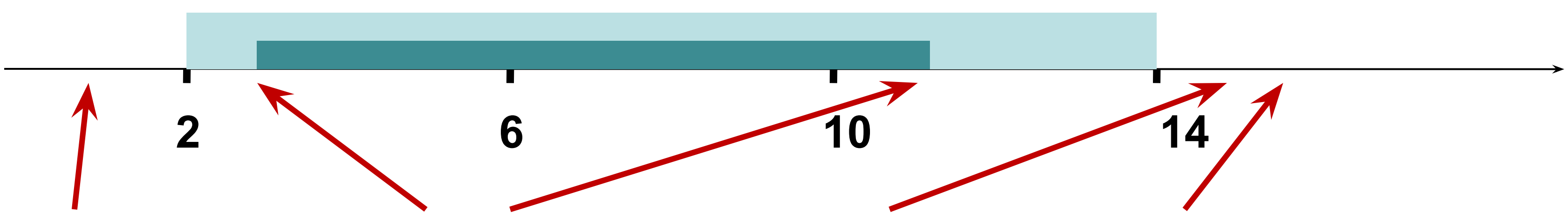


Решение

Вернемся к импликации:

(x∈ A) ⇒ (x∈[2,14])

Эта формула истинна тогда и только тогда, когда принадлежность числа x отрезку A влечет принадлежность числа x отрезку [2,14]. Т.е. отрезок A должен быть подмножеством отрезка [2,14]. Из четырех предложенных отрезков этому условию удовлетворяет только отрезок [3,11].



1) [**0**, 3] **2) [3, 11]** 3) [11, **15**] 4) [**15, 17**]

Ответ: 2

Задание B15 - одно из самых сложных в ЕГЭ по информатике!!!

Проверяются умения:

- преобразовывать выражения, содержащие логические переменные;
- **описывать на естественном языке множество значений логических переменных, при которых заданный набор логических переменных истинен;**
- подсчитывать число двоичных наборов, удовлетворяющих заданным условиям.

Самое **сложное**, т.к. нет формальных правил, как это сделать, требуется догадка.

Без чего не обойтись!

Свойства логических операций

Конъюнкция	Дизъюнкция	Инверсия
$A \wedge \overline{A} = 0$	$A \vee \overline{A} = 1$	$\overline{\overline{A}} = A$
$A \wedge A = A$	$A \vee A = A$	
$A \wedge 1 = A$	$A \vee 1 = 1$	
$A \wedge 0 = 0$	$A \vee 0 = A$	

Законы логики

Закон	Аналог в алгебре
Переместительный закон	
$A \vee B = B \vee A$	$A + B = B + A$
$A \wedge B = B \wedge A$	$A \cdot B = B \cdot A$
Сочетательный закон	
$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$	$(A + B) + C = A + (B + C)$
$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
Распределительный закон	
$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$	$(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$
$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$	аналога нет

Без чего не обойтись!

Закон инверсии, или формулы де Моргана	
$A \vee B = \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}$	аналога нет
$A \wedge B = \overline{\overline{A} \vee \overline{B}}$	аналога нет
Закон контрапозиции	
$A \to B = \overline{B} \to \overline{A}$	аналога нет

Формулы склеивания и поглощения

Склеивания	Поглощения
$(A \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B}) = A$	$A \vee (A \wedge B) = A$
$(A \vee B) \wedge (A \vee \overline{B}) = A$	$A \wedge (A \vee B) = A$
	$A \vee (\overline{A} \wedge B) = A \vee B$
	$A \wedge (\overline{A} \vee B) = A \wedge B$

Запись импликации, эквиваленции и сложения по модулю «2»
с помощью инверсии, импликации и дизъюнкции

!

$$A \to B = \overline{A} \vee B$$

$$A \leftrightarrow B = (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B}) = (\overline{A} \vee B) \wedge (A \vee \overline{B})$$

$$A \oplus B = (A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee \overline{B}) = (\overline{A} \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B})$$

$$A \leftrightarrow B = \overline{A \oplus B}$$

Условные обозначения

- конъюнкция :A /\ B , A• B, AB, A&B, A and B
- дизъюнкция: A_\/ B , A+ B, A | B, A or B
- отрицание: ¬ A , A, not A
- эквиваленция: A ⇔ B, A ~ B, A ≡ B
- исключающее «или»: A⊕ B , A xor B

Метод замены переменных

Сколько существует различных наборов значений логических переменных x1, x2, …, x9, x10, которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям:

$((x1 \equiv x2) \lor (x3 \equiv x4)) \land (\neg(x1 \equiv x2) \lor \neg(x3 \equiv x4)) = 1$

$((x3 \equiv x4) \lor (x5 \equiv x6)) \land (\neg(x3 \equiv x4) \lor \neg(x5 \equiv x6)) = 1$

$((x5 \equiv x6) \lor (x7 \equiv x8)) \land (\neg(x5 \equiv x7) \lor \neg(x7 \equiv x8)) = 1$

$((x7 \equiv x8) \lor (x9 \equiv x10)) \land (\neg(x7 \equiv x8) \lor \neg(x9 \equiv x10)) = 1$

В ответе **не нужно** перечислять все различные наборы x1, x2, …, x9, x10, при которых выполняется данная система равенств. В качестве ответа необходимо указать **количество** таких наборов (демо-версия 2012 г.)

Решение

Шаг 1. Упрощаем, выполнив замену переменных

$t1 = x1 \equiv x2$

$t2 = x3 \equiv x4$

$t3 = x5 \equiv x6$

$t4 = x7 \equiv x8$

$t5 = x9 \equiv x10$

После упрощения:

$(t1 \lor t2) \land (\neg t1 \lor \neg t2) = 1$

$(t2 \lor t3) \land (\neg t2 \lor \neg t3) = 1$

$(t3 \lor t4) \land (\neg t3 \lor \neg t4) = 1$

$(t4 \lor t5) \land (\neg t4 \lor \neg t5) = 1$

Рассмотрим одно из уравнений:

$(t1 \lor t2) \land (\neg t1 \lor \neg t2) = 1$

Очевидно, оно =1 только если одна из переменных равна 0, а другая – 1.

Воспользуемся формулой для выражения операции XOR через конъюнкцию и дизъюнкцию:

$(t1 \lor t2) \land (\neg t1 \lor \neg t2) = t1 \oplus t2 = \neg(t1 \equiv t2) = 1$

$\neg(t1 \equiv t2) = 1$

$\neg(t2 \equiv t3) = 1$

$\neg(t3 \equiv t4) = 1$

$\neg(t4 \equiv t5) = 1$

Шаг 2. Анализ системы

¬(t1 ≡ t2) =1
¬(t2 ≡ t3) =1
¬(t3 ≡ t4) =1
¬(t4 ≡ t5) =1

t1	t2	t3	t4	t5
0	**1**	**0**	**1**	**0**
1	**0**	**1**	**0**	**1**

Т.к. **tk** = **x2k-1 ≡ x2k** (t1 = x1≡ x2,….), то каждому значению tk соответствует две пары значений x2k-1 и x2k ,
например:
tk=0 соответствуют две пары - (0,1) и (1,0) ,
а tk=1 – пары (0,0) и (1,1).

Шаг 3. Подсчет числа решений.

Каждое t имеет 2 решения, количество t – 5. Т.о. для переменных t существует $2^5 = 32$ решения. Но каждому t соответствует пара решений x, т.е. исходная система имеет 2*32 = 64 решения.

Ответ: 64

Метод исключения части решений

Сколько существует различных наборов значений логических переменных x1, x2, …, x5, y1,y2,…, y5, которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям:

$$(x1 \to x2) \land (x2 \to x3) \land (x3 \to x4) \land (x4 \to x5) = 1;$$
$$(y1 \to y2) \land (y2 \to y3) \land (y3 \to y4) \land (y4 \to y5) = 1;$$
$$y5 \to x5 = 1.$$

В ответе **не нужно** перечислять все различные наборы x1, x2, …, x5, y1,y2,…, y5, при которых выполняется данная система равенств. В качестве ответа необходимо указать **количество** таких наборов.

Решение

Шаг 1. Последовательное решение уравнений

Первое уравнение – конъюнкция нескольких операций импликации, равна 1, т.е. каждая из импликаций истинна. Импликация ложна только в одном случае, когда 1 ⇒ 0, во всех других случаях (0 ⇒ 0, 0 ⇒ 1, 1 ⇒ 1) операция возвращает 1. Запишем это в виде таблицы:

x1	**1**				**0**	
x2	1			0		1
x3	1		0		1	1
x4	1	0		1	1	1
x5	1	0	1	1	1	1

Шаг1. Последовательное решение уравнений

Т.о. получено 6 наборов решений для x1,x2,x3,x4,x5: (00000), (00001), (00011), (00111), (01111), (11111).
Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что для y1, y2, y3, y4, y5 существует такой же набор решений.
Т.к. уравнения эти независимы, т.е. в них нет общих переменных, то решением этой системы уравнений (без учета третьего уравнения) будет 6*6=**36** пар «иксов» и «игреков».
Рассмотрим третье уравнение:

$$\mathbf{y5 \rightarrow x5 = 1}$$

Решением являются пары:	0	0
	0	1
	1	1
Не является решением пара:	**1**	**0**

Сопоставим полученные решения

(y1y2y3y4y5)	(x1x2x3x4x5)						Кол-во вариантов (пар)
	(00000)	(00001)	(00011)	(00111)	(01111)	(11111)	
(00000)	+	+	+	+	+	+	6
(00001)	–	+	+	+	+	+	5
(00011)	–	+	+	+	+	+	5
(00111)	–	+	+	+	+	+	5
(01111)	–	+	+	+	+	+	5
(11111)	–	+	+	+	+	+	5
Всего возможных вариантов (пар) наборов значений (x1x2x3x4x5) *и* (y1y2y3y4y5) *:*							31

Там, где y5=1, не подходят x5=0. таких пар 5.

Количество решений системы : 36-5=**31**.

Ответ: 31

Понадобилась комбинаторика!!!

Метод динамического программирования

Сколько различных решений имеет логическое уравнение

$$x1 \rightarrow x2 \rightarrow x3 \rightarrow x4 \rightarrow x5 \rightarrow x6 = 1,$$

где x1, x2, …, x6 – логические переменные? В ответе **не нужно** перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать **количеств**о таких наборов.

Решение

Шаг 1. Анализ условия

1. Слева в уравнении последовательно записаны операции импликации, приоритет одинаков.

2. Перепишем:

$$((((X_1 \to X_2) \to X_3) \to X_4) \to X_5) \to X_6 = 1$$

NB! Каждая следующая переменная зависит не от предыдущей, а от результата предыдущей импликации!

Шаг 2. Выявление закономерности

Рассмотрим первую импликацию, $\mathbf{X_1 \rightarrow X_2}$. Таблица истинности:

X_1	X_2	$X_1 \rightarrow X_2$
0	0	**1**
0	1	**1**
1	0	**0**
1	1	**1**

Из одного 0 получили 2 единицы, а из 1 получили один 0 и одну 1. Всего один 0 и три 1, это результат первой операции.

Шаг 2. Выявление закономерности

Подключив к результату первой операции x_3 , получим:

$F(x_1,x_2)$	x_3	$F(x_1,x_2) \to x_3$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1
1	0	0
1	1	1
1	0	0
1	1	1

Из двух 0 – две 1, из каждой 1 (их 3) по одному 0 и 1 (3+3)

Шаг 3. Вывод формулы

Т.о. можно составить формулы для вычисления количества нулей N_i и количества единиц E_i для уравнения с i переменными:

$$N_i = E_{i-1} \qquad E_i = 2N_{i-1} + E_{i-1}$$

$$N_1 = E_1 = 1$$

Шаг 4. Заполнение таблицы

Заполним слева направо таблицу для i=6, вычисляя число нулей и единиц по приведенным выше формулам; в таблице показано, как строится следующий столбец по предыдущему:

число переменных	1	2	3	4	5	6
Число нулей N_i	**1**	**1**	**3**	**5**	**11**	**21**
Число единиц E_i	**1**	2*1+1 =**3**	2*1+3= **5**	**11**	**21**	**43**

Ответ: 43

Метод с использованием упрощений логических выражений

Сколько различных решений имеет уравнение

$$((J \to K) \to (M \wedge N \wedge L)) \wedge ((M \wedge N \wedge L) \to (\neg J \vee K)) \wedge (M \to J) = 1$$

где J, K, L, M, N – логические переменные? В ответе **не нужно** перечислять все различные наборы значений J, K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа Вам нужно указать **количество** таких наборов.

Решение

1. Заметим, что $\mathbf{J \rightarrow K = \neg J \vee K}$
2. Введем замену переменных:

$\mathbf{J \rightarrow K = A, \quad M \wedge N \wedge L = B}$

3. Перепишем уравнение с учетом замены:

$\mathbf{(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \wedge (M \rightarrow J) = 1}$

4. $\mathbf{(A \equiv B) \wedge (M \rightarrow J) = 1}$
5. Очевидно, что $\mathbf{A \equiv B}$ **при одинаковых значениях A и B**
6. Рассмотрим последнюю импликацию $\mathbf{M \rightarrow J = 1}$

   Это возможно, если:

a) $\mathbf{M = J = 0}$

b) $\mathbf{M = 0, J = 1}$

c) $\mathbf{M = J = 1}$

Решение

7. Т.к. **A** ≡ **B**, то **¬J ⋁ K= M Λ N Λ L**
8. При **M=J=0** получаем **1 + К=0.** Нет решений.
9. При **M=0, J=1** получаем **0 + К=0,** К=0, а N и L - любые , **4 решения**:

K	N	L
0	**0**	**0**
0	**0**	**1**
0	**1**	**0**
0	**1**	**1**

Решение

10. При **M=J=1** получаем **0+К=1*N*L,** или **K=N*L,**
4 решения:

K	N	L
0	**0**	**0**
0	**0**	**1**
0	**1**	**0**
1	**1**	**1**

11. Итого имеет 4+4=8 решений
Ответ: 8

Источники информации:

- О.Б. Богомолова, Д.Ю. Усенков. B15: новые задачи и новое решение // Информатика, № 6, 2012, с. 35 – 39.
- К.Ю. Поляков. Логические уравнения // Информатика, № 14, 2011, с. 30-35.
- http://ege-go.ru/zadania/grb/b15/, [Электронный ресурс].
- http://kpolyakov.narod.ru/school/ege.htm, [Электронный ресурс].