Когда уравнение решаешь, дружок,
Ты должен найти у него корешок.
Значение буквы проверить не сложно,
Поставь в уравненье его осторожно.
Коль верное равенство выйдет у вас,
То корнем значенье зовите тотчас.
О. Севостьянова

10 способов решения квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Математика 9 класс

Цели курса:

- Знакомство с новыми методами решения квадратных уравнений
- Углубление знаний по теме «Квадратные уравнения»
- Развитие математических, интеллектуальных способностей, навыков исследовательской работы
- Создание условий для самореализации личности

Задачи курса:

- Познакомить учащихся с новыми способами решения квадратных уравнений
- Закрепить умения решать уравнения известными способами
- Ввести теоремы, позволяющие решать уравнения нестандартными способами
- Продолжить формирование общеучебных навыков, математической культуры
- Содействовать формированию интереса к исследовательской деятельности
- Создать условия для учащихся в реализации и развитии интереса к предмету математика
- Подготовить учащихся к правильному выбору профильного направления

Содержание программы

Тема 1. Введение. 1 час.

Определение кв.уравнения. Полные и неполные кв. уравнения. Методы их решения. Анкетирование.

Тема 2. Решение кв. уравнений.

Метод разложения на множители

Метод выделения полного квадрата

Решение кв. уравнений по формулам

Решение кв. уравнений способом переброски

Решение кв. уравнений с помощью т.Виета

Решение кв. уравнений с использованием коэффициентом

Решение кв. уравнений графическим способом

Решение кв. уравнений с помощью циркуля и линейки

Решение кв. уравнений геометрическим способом

Решение кв. уравнений с помощью «номограмм»

Немного из истории…

- *Квадратные уравнения* – это фундамент, на котором покоится величественное здание алгебры. Квадратные уравнения находят широкое применение при решении тригонометрических, показательных, логарифмических, иррациональных и трансцендентных уравнений и неравенств.
- Квадратные уравнения в Древнем Вавилоне.
- Квадратные уравнения в Индии.
- Квадратные уравнения у ал - Хорезми.
- Квадратные уравнения в Европе XIII - XVII вв.

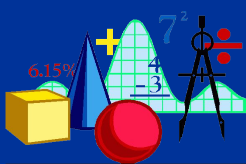
Квадратные уравнения в Древнем Вавилоне.

- Необходимость решать уравнения не только первой, но и второй степени еще в древности была вызвана потребностью решать задачи, связанные с нахождением площадей земельных участков и с земляными работами военного характера, а также с развитием астрономии и самой математики. Квадратные уравнения умели решать около 2000 лет до н. э. вавилоняне.

Применяя современную алгебраическую запись, можно сказать, что в их клинописных текстах встречаются, кроме неполных, и такие, например, полные квадратные уравнения: $x^2 + X = \frac{3}{4}$; $x^2 - X = 14{,}5$

Правило решения этих уравнений, изложенное в вавилонских текстах, совпадает по существу с современным, однако неизвестно, каким образом дошли вавилоняне до этого правила. Почти все найденные до сих пор клинописные тексты приводят только задачи с решениями, изложенными в виде рецептов, без указаний относительно того, каким образом они были найдены.

Несмотря на высокий уровень развития алгебры в Вавилоне, в клинописных текстах отсутствуют понятие отрицательного числа и общие методы решения квадратных уравнений.



Квадратные уравнения в Индии.

- Задачи на квадратные уравнения встречаются уже в астрономическом тракте «Ариабхаттиам», составленном в 499 г. индийским математиком и астрономом Ариабхаттой. Другой индийский ученный, Брахмагупта (VII в.), изложил общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единой канонической форме: $ax^2 + bx = c$, $a > 0$. В уравнении коэффициенты, кроме а, могут быть и отрицательными. Правило Брахмагупты по существу совпадает с нашим.

В Древней Индии были распространены публичные соревнования в решении трудных задач. В одной из старинных индийских книг говорится по поводу таких соревнований следующее: «Как солнце блеском своим затмевает звезды, так ученый человек затмит славу другого в народных собраниях, предлагая и решая алгебраические задачи». Задачи часто облекались в стихотворную форму. Вот одна из задач знаменитого индийского математика XII в. Бхаскары. Задача 13:

«Обезьянок резвых стая А двенадцать по лианам…

Власть поевши, развлекалась. Стали прыгать, повисая…

Их в квадрате часть восьмая Сколько ж было обезьянок,

На поляне забавлялась. Ты скажи мне, в этой стае?»

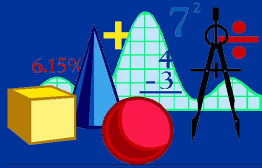
Решение Бхаскары свидетельствует о том, что он знал о двузначности корней квадратных уравнений . Соответствующее задаче 13 уравнение: $(x/8)^2 + 12 = x$

Бхаскара пишет под видом: $x^2 - 64x = -768$. И чтобы дополнить левую часть этого уравнения до квадрата, прибавляет к обеим частям 32^2, получая затем: $x^2 - 64x + 32^2 = -768 + 1024$,

$$(x - 32)^2 = 256,$$

$$x - 32 = \pm 16,$$

$$x_1 = 16,\ x_2 = 48.$$



Квадратные уравнения у ал - Хорезми.

- В алгебраическом трактате ал - Хорезми дается классификация линейных и квадратных уравнений. Автор насчитывает 6 видов уравнений, выражая их следующим образом:

1) *«Квадраты равны корнями», т.е.* $ax^2 + c = bx$.

2) *«Квадраты равны числу», т.е.* $a\,x^2 = c$.

3) *«Корни равны числу», т.е.* $ax = c$.

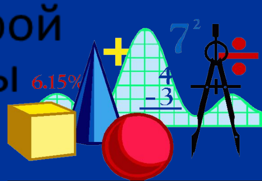
4) *«Квадраты и числа равны корням», т.е.* $a\,x^2 + c = bx$.

5) *«Квадраты и корни равны числу», т.е.* $ax^2 + bx = c$.

6) *«Корни и числа равны квадратам», т.е.* $bx + c = ax^2$.

Для ал - Хорезми, избегавшего употребления отрицательных чисел, члены каждого их этих уравнений слагаемые, а не вычитаемые. При этом заведомо не берутся во внимание уравнения, у которых нет положительных решений. Автор излагает способы решения указанных уравнений, пользуясь приемами ал - джабр и ал - мукабала. Его решения, конечно, не совпадает полностью с нашим. Уже не говоря о том, что оно чисто риторическое.

ал - Хорезми, как и все математики до XVII в., е учитывает нулевого решения, вероятно, потому, что в конкретных практических задачах оно не имеет значения. При решении полных квадратных уравнений ал - Хорезми на частных числовых примерах излагает правила решения, а затем и геометрические доказательства. Трактат ал - Хорезми является первой, дошедшей до нас книгой, в которой систематически изложена классификация квадратных уравнений и даны формулы их решения.

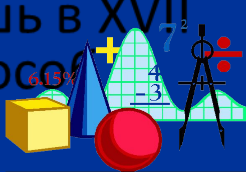


Квадратные уравнения в Европе XIII - XVII вв.

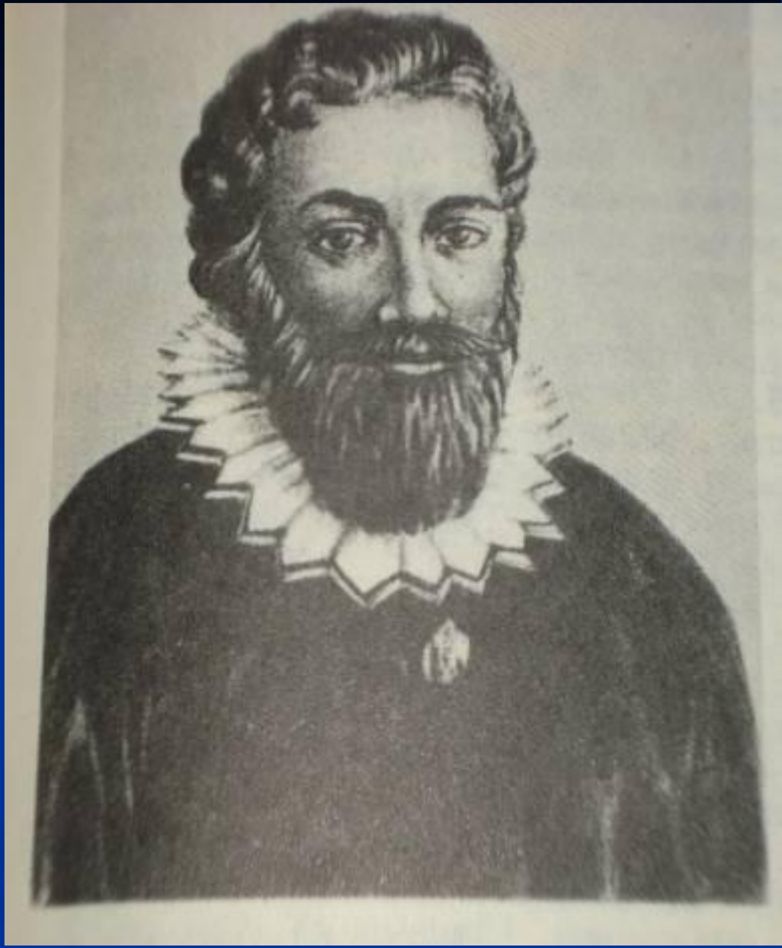
- Формулы решения квадратных уравнений по образцу ал - Хорезми в Европе были впервые изложены в « Книге абака», написанной в 1202 г. итальянским математиком Леонардо Фибоначчи. Этот объемистый труд, в котором отражено влияние математики, как стран ислама, так и Древней Греции, отличается и полнотой, и ясностью изложения. Автор разработал самостоятельно некоторые новые алгебраические примеры решения задач и первый в Европе подошел к введению отрицательных чисел. Его книга способствовала распространению алгебраических знаний не только в Италии, но и в Германии, Франции и других странах Европы. Многие задачи из « Книги абака» переходили почти во все европейские учебники XVI - XVII вв. и частично XVIII.

Общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единому каноническому виду: $x^2 + bx = c$, при всевозможных комбинациях знаков коэффициентов b, c было сформулировано в Европе лишь в 1544 г. М. Штифелем.

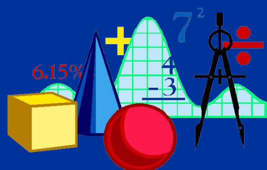
Вывод формулы решения квадратного уравнения в общем виде имеется у Виета, однако Виет признавал только положительные корни. Итальянские математики Тарталья, Кардано, Бомбелли среди первых в XVI в. Учитывают, помимо положительных, и отрицательные корни. Лишь в XVII в. Благодаря труда Жирара, Декарта, Ньютона и других ученых способ решения квадратных уравнений принимает современный вид.



Знаменитый французский учёный Франсуа Виет(1540-1603) был по профессии адвокатом. Свободное время он посвящал астрономии. Занятия астрономией требовали знания тригонометрии и алгебры. Виет занялся этими науками и вскоре пришёл к выводу о необходимости их усовершенствования, над чем и проработал ряд лет.



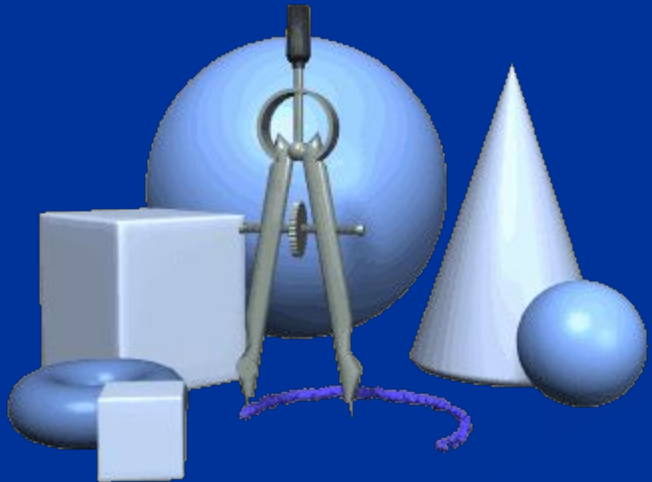
Благодаря его труду, алгебра становится общей наукой об алгебраических уравнениях, основанной на буквенном исчислении. Поэтому стало возможным выражать свойства уравнений и их корней общими формулами.



При выполнении работы были замечены:

Способы которыми буду пользоваться:

1. Теорема Виета
2. Свойства коэффициентов
3. Метод «переброски»
4. Разложение левой части на множители
5. Графический способ



Способы интересные, но занимают много времени и не всегда удобны.

1. Графический способ
2. С помощью номограммы
3. Линейки и циркуля
4. Выделение полного квадрата

Преклоняюсь перед учеными которые открыли эти способы и дали науке толчок для развития в теме «Решение квадратных уравнений»

Разложение на множители левой части уравнения

- Решим уравнение $x^2 + 10x - 24=0$.
  Разложим на множители левую часть: $x^2 + 10x - 24= x^2 + 12x -2x - 24=$
  $x(x + 12) - 2(x + 12)= (x + 12)(x - 2)$.

$(x + 12)(x - 2)=0$

$x + 12=0$ или $x - 2=0$

$x= -12$ $x= 2$

Ответ: $x_1= -12$, $x_2 = 2$.

- Решить уравнения: $x^2 - x=0$

$x^2 + 2x=0$

$x^2 - 81=0$

$x^2 + 4x + 3=0$

$x^2 + 2x - 3=0$

Метод выделения полного квадрата

- Решим уравнение $x^2 + 6x - 7=0$

$x^2 + 6x - 7=x^2 + 2x3 + 3^2 - 3^2 - 7=(x-3)^2 - 9- 7= (x-3)^2 - 16$

$(x-3)^2 -16=0$

$(x-3)^2 =16$

x-3=4 или x-3=-4

x=1 x=-7

Ответ: $x_1=1$, $x_2 =-7$.

- Решить уравнения: $x^2 - 8x+15=0$

$x^2 +12x +20=0$

$x^2 + 4x + 3=0$

$x^2 + 2x - 2=0$

$x^2 - 6x + 8=0$

Решение квадратных уравнений по формуле

Основные формулы:

Если b - нечетное, то D= b^2-4ac и $x_{1,2}$= $\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, (если D>0)

=

Если b- -четное, то D_1= $\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac$ и $x_{1,2}$= $\frac{\frac{-b}{2}\pm\sqrt{D_1}}{a}$, (если D>0)

Решите уравнения: $2x^2 - 5x + 2=0$

$6x^2 + 5x +1=0$

$4x^2 - 5x + 2=0$

$2x^2 - 6x + 4=0$

$x^2 - 18x +17=0$

Решение уравнений способом переброски

Решим уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. Умножим обе части уравнения на а, получим $a^2 x^2 + abx + ac = 0$. Пусть $ax = y$, откуда $x = y/a$. Тогда $У^2 + by + ac = 0$. Его корни y_1 и y_2. Окончательно $x_1 = y_1 / a$, $x_1 = y_2 / a$.

Решим уравнение $2x^2 - 11x + 15 = 0$.

Перебросим коэффициент 2 к свободному члену:

$У^2 - 11y + 30 = 0$.

Согласно теореме Виета $y_1 = 5$ и $y_2 = 6$.

$x_1 = 5/2$ и $x_2 = 6/2$

$x_1 = 2{,}5$ и $x_2 = 3$

Ответ: $x_1 = 2{,}5$, $x_2 = 3$

Решить уравнение: $2x^2 - 9x + 9 = 0$

$10x^2 - 11x + 3 = 0$

$3x^2 + 11x + 6 = 0$

$6x^2 + 5x - 6 = 0$

$3x^2 + 1x - 4 = 0$

Решение уравнений с помощью теоремы Виета

Решим уравнение $x^2 + 10x - 24 = 0$.

Так как $x_1 * x_2 = -24$

$x_1 + x_2 = -10$, то $24 = 2*12$, но $-10 = -12 + 2$, значит

$x_1 = -12$ $x_2 = 2$

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = -12$.

Решить уравнения: $x^2 - 7x - 30 = 0$

$x^2 + 2x - 15 = 0$

$x^2 - 7x + 6 = 0$

$3x^2 - 5x + 2 = 0$

$5x^2 + 4x - 9 = 0$

Свойства коэффициентов квадратного уравнения

-

Если a+b+c=0, то $x_2 = 1$, $x_2 = c/a$

Решим уравнение $x^2 + 6x - 7 = 0$

$1 + 6 – 7 = 0$, значит $x_1 = 1$, $x_2 = -7/1 = -7$.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = -7$.

Решить уравнения: $5x^2 - 7x + 2 = 0$

$11x^2 + 25x - 36 = 0$

$345x^2 - 137x - 208 = 0$

$3x^2 + 5x - 8 = 0$

$5x^2 + 4x - 9 = 0$

Если a – b + c=0, то $x_2 = -1$, $x_2 = -c/a$

Решим уравнение $2x^2 + 3x + 1 = 0$

$2 - 3 + 1 = 0$, значит $x_1 = -1$, $x_2 = -1/2$

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = -1/2$.

Решить уравнения: $5x^2 - 7x - 12 = 0$

$11x^2 + 25x + 14 = 0$

$3x^2 + 5x + 2 = 0$

$5x^2 + 4x - 1 = 0$

$x^2 + 4x + 3 = 0$

Графическое решение квадратного уравнения

- Решим уравнение $x^2 + 2x - 3 = 0$

Записать уравнение в виде $x^2 = 3 - 2x$

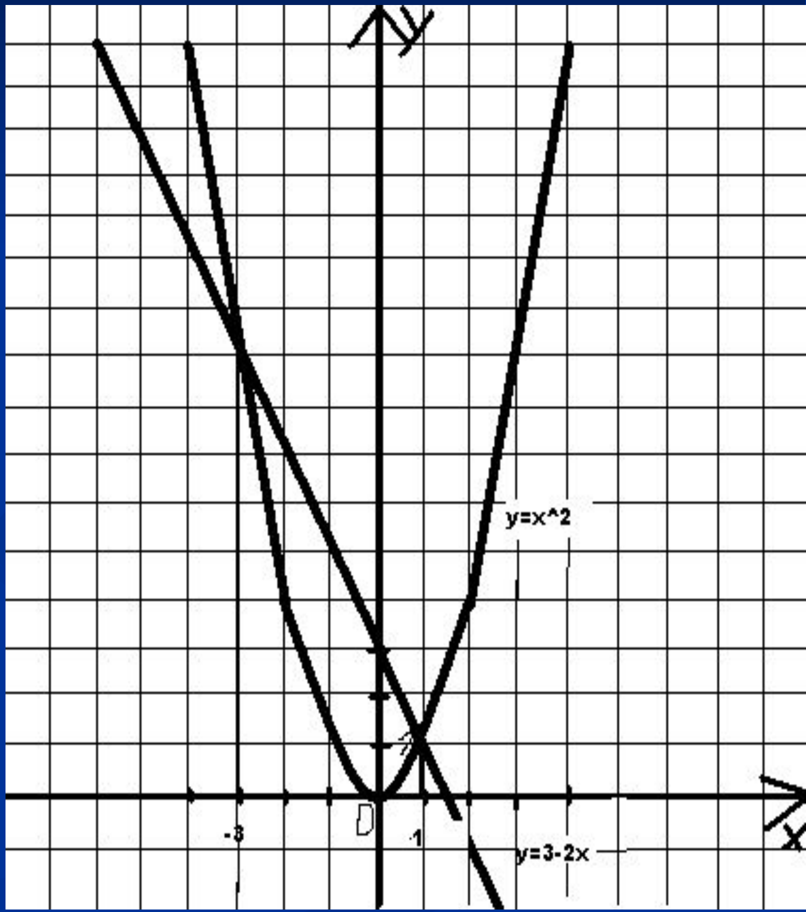
В одной системе координат

построить график функции $y = x^2$,

построить график функции $y = 3 - 2x$.

Обозначить абсциссы точек пересечения.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = -3$.



Решить уравнение: $x^2 - x - 6 = 0$

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$x^2 + 4x + 6 = 0$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$x^2 + 2x - 3 = 0$

Решение уравнений с помощью циркуля и линейки

Решим уравнение $ax^2 + bx + c = 0$:

- Построим точки $S(-b:2a,(a+c):2a)$- центр окружности и точку $A(0,1)$
- Провести окружность радиуса SA
- Абсциссы точек пересечения с осью Ox есть корни исходного уравнения

Геометрический способ решения уравнения

- Решим уравнение $y^2 - 6y - 16=0$

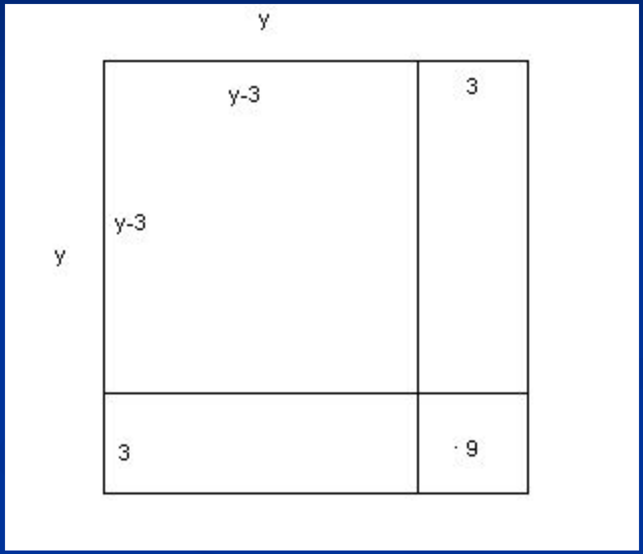
Представим в виде $y^2 - 6y = 16$. На рис. «изображено» выражение $y^2 - 6y$, т.е. из площади квадрата со стороной y дважды вычитается площадь квадрата со стороной 3. Значит $y^2 - 6y+9$ есть площадь квадрата со стороной y-3. Выполнив замену $y^2 - 6y = 16$, получим

$(y-3)^2 = 16+9$

$y-3=5$ или $y-3=-5$

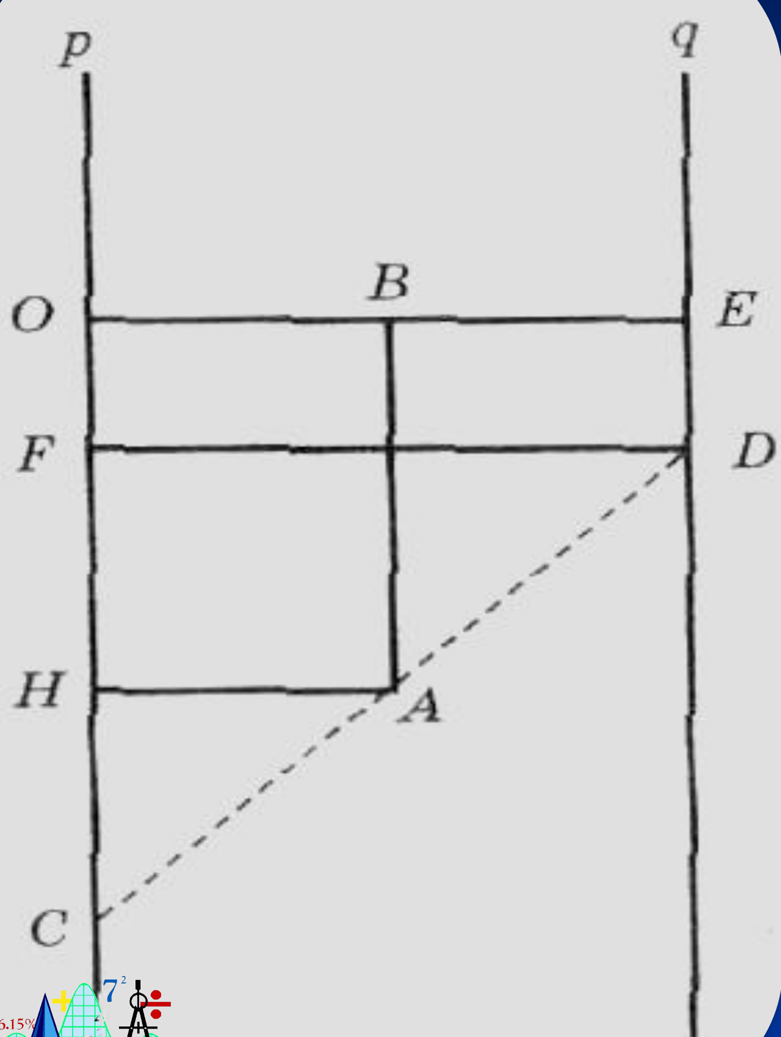
$y_1 = 8$ $y_2 = -2$

Ответ: $y_1 = 8$, $y_2 = -2$



Решить уравнение $y^2 + 6y - 16=0$

Решение квадратных уравнений с помощью номограммы



Криволинейная шкала номограммы построена по формулам: OB = a/(1 + z), AB = -z^2 /(1 + z). Полагая OC = p, ED = q, OE = a, из подобия треугольника CAH и CDF получаем пропорцию (p - q)/(p - AB) = a/OB, откуда после постановок и упрощений вытекает уравнение z^2+ pz+ q = 0, причём буква z означает метку любой точки криволинейной шкалы. Номограмма даёт значения положительных корней уравнения z^2+ pz+ q = 0. Если это уравнение имеет корни разных знаков, то, найдя по номограмме положительный корень, отрицательный находят, вычитая положительный из –p. В случае, когда оба корня отрицательны, берут z= -t и находят по номограмме два положительных корня t_1 и t_2 уравнения t^2– pt +q = 0, а затем z_1= -t_1, z_2 = -t_2. Если коэффициенты p и q выходят за пределы шкал, выполняют постановку z = ktи решают посредством номограммы уравнение $t^2 + \frac{pt}{k} + \frac{q}{k^2}$ =0, где k берётся с таким расчётом, чтобы имели неравенства: -12,6 $\le$p/k $\le$ 12,6; -12,6 <q/k^2<12,6