10 способов решения квадратных уравнений

1 2 3 4 5 6 7 8 9

История развития квадратных уравнений.

- Квадратные уравнения в Древнем Вавилоне:

$X^2+X=3/4$ $X^2-X=14,5$

- Как составлял и решал Диофант квадратные уравнения.

Отсюда уравнение:

$$(10+x)(10-x) = 96$$

или же:

$$100 - x^2 = 96$$

$$x^2 - 4 = 0 \qquad (1)$$

Решение $x = -2$ для Диофанта не существует, так как греческая математика знала только положительные числа.

- Квадратные уравнения в Индии.

$$ax^2 + bx = c, \quad a>0. \qquad (1)$$

Вот одна из задач з II в. Бхаскары.

Задача 13.

«Обезьянок резвых стая
Власть поевши, развлекал
Их в квадрате часть восьм
На поляне забавлялась.

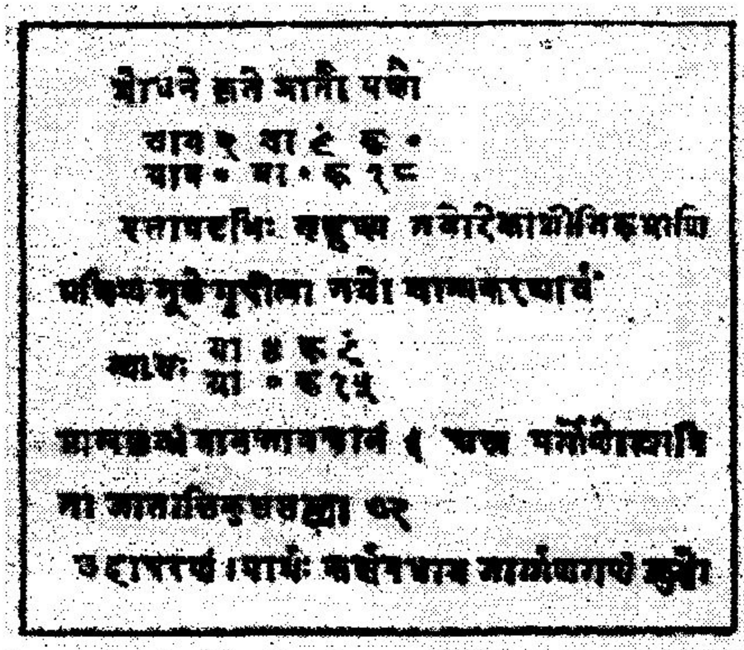


Рис. 3. Часть страницы из алгебры Бхаскары «Виджа Ганита» (вычисление корней)

- Квадратные уравнения у ал – Хорезми.

1) *«Квадраты равны корнями», т.е. $ax2 + c = bx$.*

2) *«Квадраты равны числу», т.е. $ax2 = c$.*

3) *«Корни равны числу», т.е. $ax = c$.*

4) *«Квадраты и числа равны корням», т.е. $ax2 + c = bx$.*

5) *«Квадраты и корни равны числу», т.е. $ax2 + bx = c$.*

6) *«Корни и числа равны квадратам», т.е. $bx + c = ax2$.*

- Квадратные уравнения в Европе XIII - XVII вв.

$$x^2 + bx = c,$$

при всевозможных комбинациях знаков коэффициентов b, c было сформулировано в Европе лишь в 1544 г. М. Штифелем.

- О теореме Виета.

«Если B + D, умноженное на A - A^2, равно BD, то A равно B и равно D».

На языке современной алгебры вышеприведенная формулировка Виета означает: если имеет место

$$(a + b)x - x2 = ab,$$

т.е.

$$x^2 - (a + b)x + ab = 0,$$

то

$$x_1 = a, \ x_2 = b.$$

Способы решения квадратных уравнений.

- **1. СПОСОБ**: *Разложение левой части уравнения на множители.*

Решим уравнение *x2 + 10x - 24 = 0.* Разложим левую часть на множители:

$x^2 + 10x - 24 = x^2 + 12x - 2x - 24 = x(x + 12) - 2(x + 12) = (x + 12)(x - 2).$

Следовательно, уравнение можно переписать так:

$$(x + 12)(x - 2) = 0$$

Так как произведение равно нулю, то, по крайней мере, один из его множителей равен нулю. Поэтому левая часть уравнения обращается нуль при $x = 2$, а также при $x = - 12$. Это означает, что число 2 и $- 12$ являются корнями уравнения $x^2 + 10x - 24 = 0$.

- **2. СПОСОБ**: *Метод выделения полного квадрата.*

Решим уравнение $x^2 + 6x - 7 = 0$. Выделим в левой части полный квадрат.

Для этого запишем выражение $x^2 + 6x$ в следующем виде:

$$x^2 + 6x = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3.$$

полученном выражении первое слагаемое - квадрат числа х, а второе - удвоенное произведение х на 3. По этому чтобы получить полный квадрат, нужно прибавить 32, так как

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 32 = (x + 3)^2.$$

Преобразуем теперь левую часть уравнения

$$x^2 + 6x - 7 = 0,$$

прибавляя к ней и вычитая 32. Имеем:

$$x^2 + 6x - 7 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 32 - 32 - 7 = (x + 3)2 - 9 - 7 = (x + 3)^2 - 16.$$

Таким образом, данное уравнение можно записать так:

$$(x + 3)^2 - 16 = 0, \quad (x + 3)^2 = 16.$$

Следовательно, $x + 3 - 4 = 0,\ x_1 = 1$, *или* $x + 3 = -4,\ x_2 = -7.$

- **3. СПОСОБ**: *Решение квадратных уравнений по формуле.*

Умножим обе части уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$$

на 4а и последовательно имеем:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0,$$

$$((2ax)^2 + 2ax \cdot b + b^2) - b^2 + 4ac = 0,$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac,$$

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac},$$

$$2ax = - b \pm \sqrt{b^2 - 4ac},$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

- **4. СПОСОБ:** *Решение уравнений с использованием теоремы Виета.*

Как известно, приведенное квадратное уравнение имеет вид

$$x^2 + px + c = 0. \qquad (1)$$

Его корни удовлетворяют теореме Виета, которая при *a =1* имеет вид

$$x_1 x_2 = q,$$
$$x_1 + x_2 = - p$$

а) $x^2 – 3x + 2 = 0$; $x_1 = 2$ и $x_2 = 1$, *так как* $q = 2 > 0$ и $p = - 3 < 0$;

$x^2 + 8x + 7 = 0$; $x_1 = - 7$ и $x_2 = - 1$, *так как* $q = 7 > 0$ и $p= 8 > 0$.

б) $x^2 + 4x – 5 = 0$; $x_1 = - 5$ и $x_2 = 1$, *так как* $q= - 5 < 0$ и $p = 4 > 0$;

$x^2 – 8x – 9 = 0$; $x_1 = 9$ и $x_2 = - 1$, *так как* $q = - 9 < 0$ и $p = - 8 < 0$.

- **5. СПОСОБ:** *Решение уравнений способом «переброски».*

Рассмотрим квадратное уравнение

$ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

Умножая обе его части на а, получаем уравнение

$a^2x^2 + abx + ac = 0.$

Пусть $ax = y$, откуда $x = y/a$; тогда приходим к уравнению

$y^2 + by + ac = 0,$

равносильно данному. Его корни y_1 и y_2 найдем с помощью теоремы Виета.

Окончательно получаем $x_1 = y_1/a$ и $x_1 = y_2/a$.

- **Пример.**

Решим уравнение $2x^2 - 11x + 15 = 0.$

Решение. «Перебросим» коэффициент 2 к свободному члену, в результате получим уравнение

$y^2 - 11y + 30 = 0.$

Согласно теореме Виета

$$\left[\begin{array}{l} y_1 = 5 \\ y_2 = 6 \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 5/2 \\ x_2 = 6/2 \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2{,}5 \\ x_2 = 3. \end{array}\right.$$

Ответ: 2,5; 3.

- **6. СПОСОБ:** *Свойства коэффициентов квадратного уравнения.*

А. Пусть дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

1) Если, $a + b + c = 0$ (т.е. сумма коэффициентов равна нулю), то $x_1 = 1$, $x_2 = c/a$.

Доказательство. Разделим обе части уравнения на а ≠ 0, получим приведенное квадратное уравнение

$$x^2 + b/a \cdot x + c/a = 0.$$

Согласно теореме Виета

$$x_1 + x_2 = - b/a,$$

$$x_1x_2 = 1 \cdot c/a.$$

По условию $a - b + c = 0$, откуда $b = a + c$. Таким образом,

$$x_1 + x_2 = - a + b/a = -1 - c/a,$$

$$x_1x_2 = - 1 \cdot (- c/a),$$

т.е. $x_1 = -1$ и $x_2 = c/a$, что и требовалось доказать.

- **Б.** Если второй коэффициент $b = 2k$ – четное число, то формулу корней

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

можно записать в виде

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}. \qquad (2)$$

В. Приведенное уравнение

$$x^2 + px + q = 0$$

совпадает с уравнением общего вида, в котором $a = 1$, $b = p$ и $c = q$. Поэтому для приведенного квадратного уравнения формула корней

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \text{ или } x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \qquad (3)$$

- **7. СПОСОБ:** *Графическое решение квадратного уравнения.*

Если в уравнении

$x^2 + px + q = 0$

перенести второй и третий члены в правую часть, то получим

$x^2 = - px - q.$

Построим графики зависимости $y = x^2$ и $y = - px - q$.

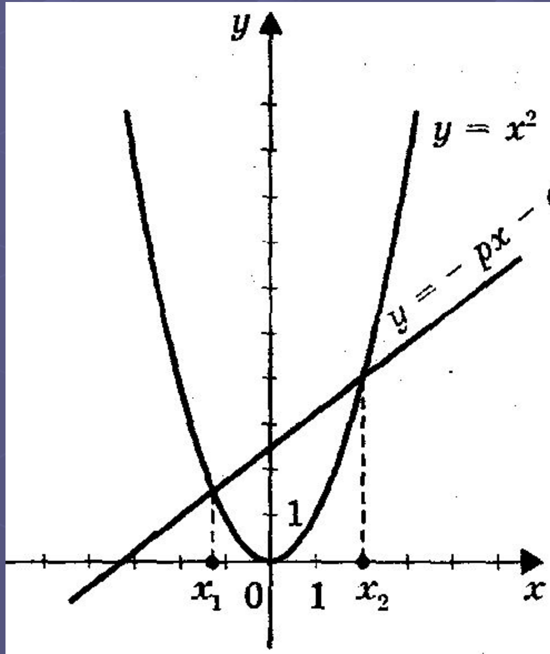


Рис. 1

- **Пример**

1) Решим графически уравнение
$x^2 - 3x - 4 = 0$ (рис. 2).

Решение. Запишем уравнение в виде
$x^2 = 3x + 4$.

Построим параболу $y = x^2$ и прямую
$y = 3x + 4$.

Прямую
$y = 3x + 4$ можно построить по двум точкам
$M (0; 4)$ и $N (3; 13)$.

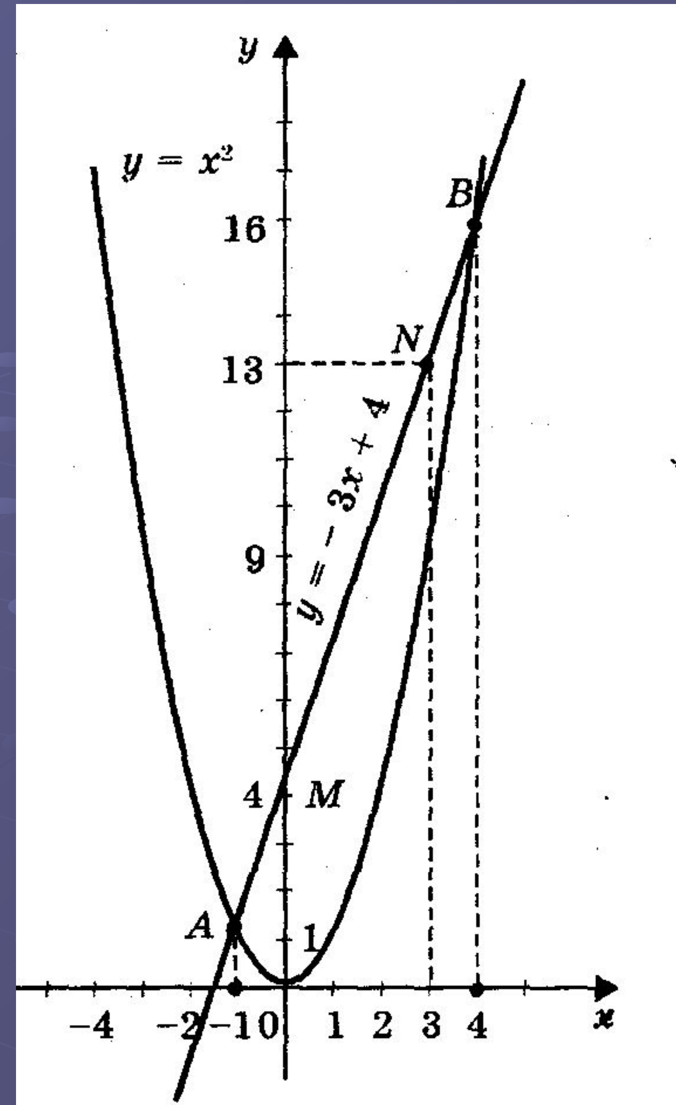


Рис. 2

<u>*Ответ*</u>: $x_1 = -1$; $x_2 = 4$

- **8. СПОСОБ:** Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки.

нахождения корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ с помощью циркуля и линейки (рис. 5).

Тогда по теореме о секущих имеем

$OB \cdot OD = OA \cdot OC$,

откуда $OC = OB \cdot OD / OA = x_1 x_2 / 1 = c/a$.

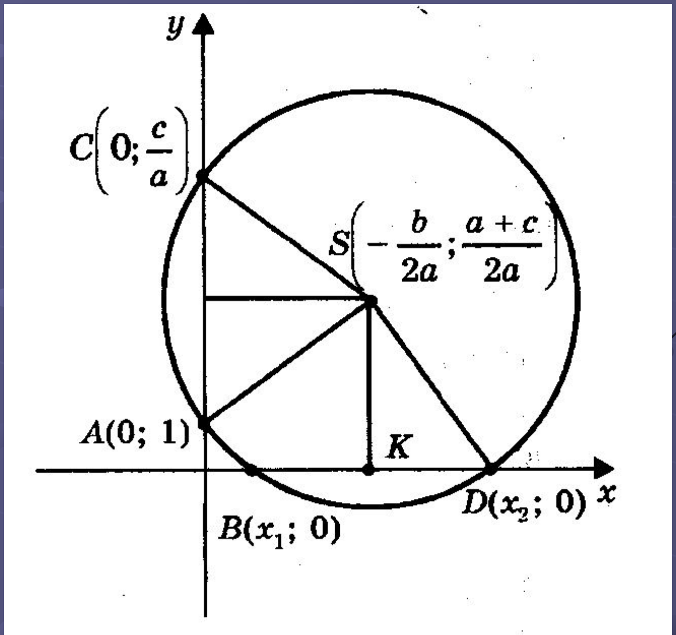


Рис. 5

$$SK = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-\frac{b}{a}}{2} = -\frac{b}{2a},$$

$$SF = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1 + \frac{c}{a}}{2} = \frac{a + c}{2a}.$$

- 1) Радиус окружности больше ординаты центра

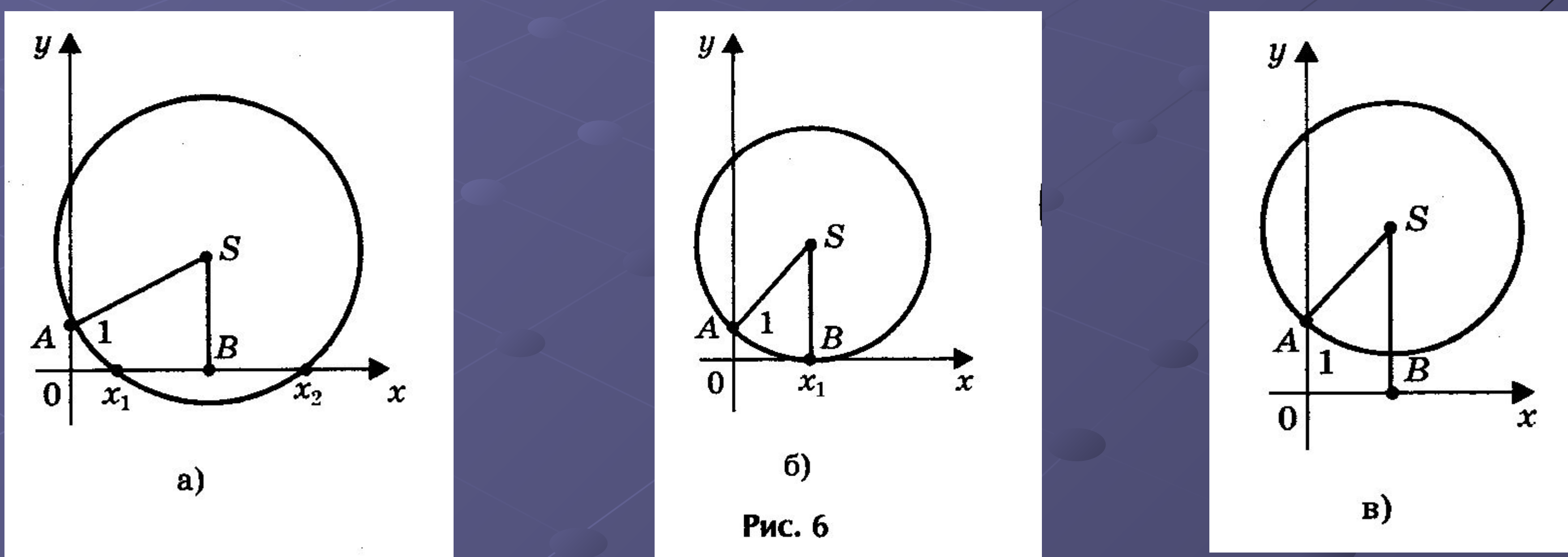
(AS > SK, или R > a + c/2a), окружность пересекает ось *Ox* в двух точках (6, а рис.) *B(x1; 0) и D(x2; 0),* где x_1 и x_2 - корни квадратного уравнения *ax2 + bx + c = 0.*

2) Радиус окружности равен ординате центра

(AS = SB, или R = a + c/2a), окружность касается оси *Ox* (рис. 6,б) в точке *B (x1; 0),* где x_1 - корень квадратного уравнения.

3) Радиус окружности меньше ординаты центра $\left(AS < SB, \text{ или } R < \frac{a+c}{2a}\right)$, окружность не имеет общих точек с осью абсцисс (рис.6,в), в этом случае

уравнение не имеет решения.



- **9. СПОСОБ:** *Решение квадратных уравнений с помощью номограммы.*

$$z^2 + pz + q = 0.$$

Криволинейная шкала номограммы построена по формулам (рис.11):

Полагая $OC = p$, $ED = q$, $OE = a$ (все в см.),

Из подобия треугольников CAH и CDF получим пропорцию

$$\frac{p - q}{p - AB} = \frac{a}{OB},$$

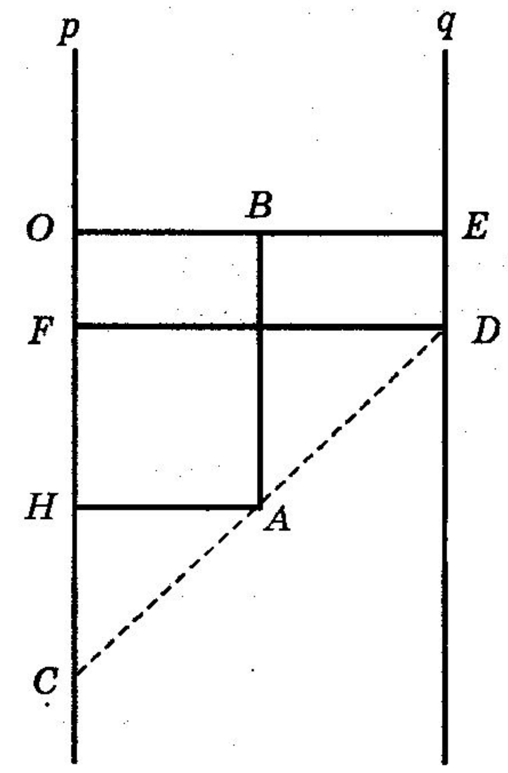


Рис. 11

- **Примеры.**

1) Для уравнения $z^2 - 9z + 8 = 0$ номограмма дает корни $z_1 = 8,0$ и $z_2 = 1,0$ (рис.12).

2) Решим с помощью номограммы уравнение

$2z^2 - 9z + 2 = 0.$

Разделим коэффициенты этого уравнения на 2,

получим уравнение

$z^2 - 4,5z + 1 = 0.$

Номограмма дает корни $z_1 = 4$ и $z_2 = 0,5.$

3) Для уравнения

$z^2 - 25z + 66 = 0$

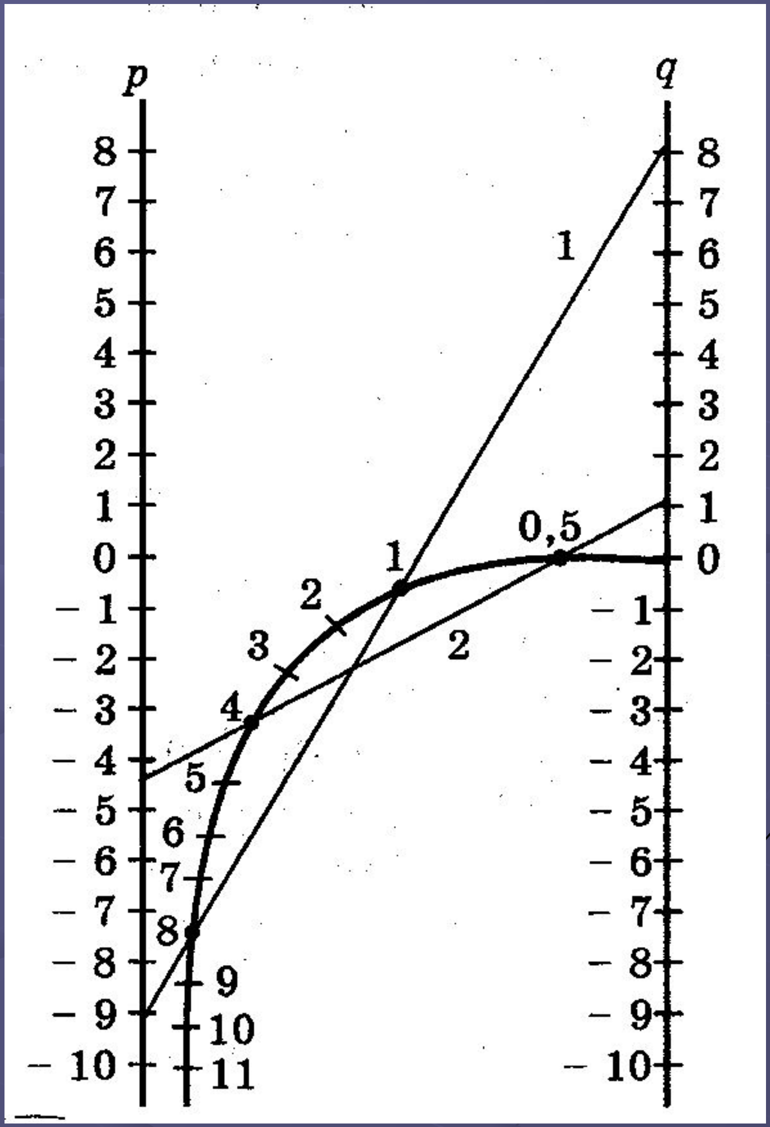
коэффициенты p и q выходят за пределы шкалы, выполним подстановку $z = 5t,$

получим уравнение

$t^2 - 5t + 2,64 = 0,$

которое решаем посредством номограммы и получим $t_1 = 0,6$ и $t_2 = 4,4,$ откуда

$z_1 = 5t_1 = 3,0$ и $z_2 = 5t_2 = 22,0.$



- **10. СПОСОБ:** Геометрический способ решения квадратных уравнений.

- **Примеры.**

1) Решим уравнение $x^2 + 10x = 39$.

В оригинале эта задача формулируется следующим образом :

«Квадрат и десять корней равны 39» (рис.15).

Для искомой стороны x первоначального квадрата получим

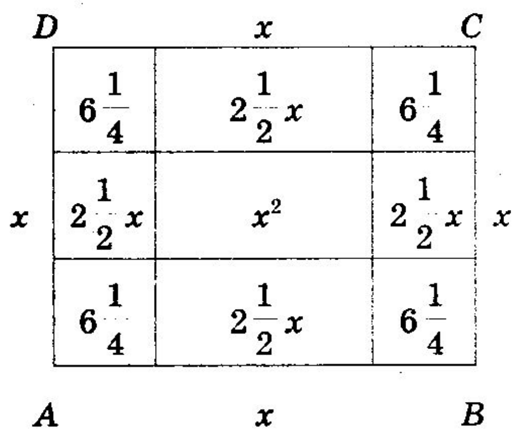


Рис. 15

$$x = 8 - 2\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} = 3.$$

$y^2 + 6y - 16 = 0.$

Решение представлено на рис. 16,

где $y^2 + 6y = 16$, *или*

$y^2 + 6y + 9 = 16 + 9.$

Решение. Выражения $y^2 + 6y + 9$

и $16 + 9$ геометрически представляют

собой один и тот же квадрат, а

исходное

уравнение

$y^2 + 6y - 16 + 9 - 9 = 0$ - одно и то же

уравнение.

Откуда и получаем, что $y + 3 = \pm 5$,

или $y_1 = 2$, $y_2 = - 8$ (рис.16).

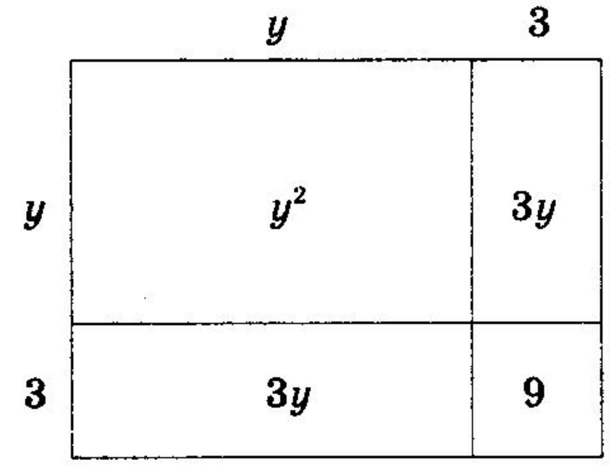


Рис. 16