10 способов решения квадратных уравнений

О теореме Виета

Теорема, выражающая связь между коэффициентами квадратного уравнения и его корнями, носящая имя Виета, была им сформулирована впервые в 1591 г. Следующим образом: «Если B+D, умноженное на A-A , равно BD, то A равно B и равно D».

Чтобы понять Виета, следует помнить, что A, как и всякая гласная буква , означало у него неизвестное (наше x), гласные же B,D- кэффициенты при неизвестном.

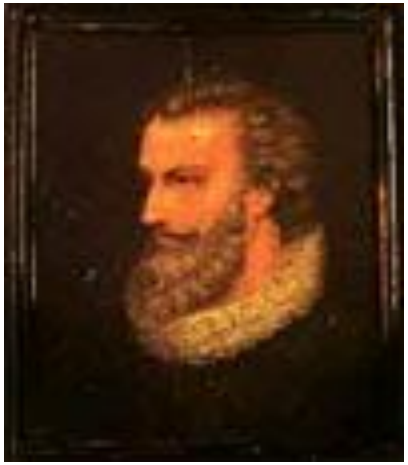
На языке современной алгебры вышеприведенная формулировка Виета означает:

Если приведенное квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ имеет действительные корни, то их сумма равна $-p$, а произведение равно q, то есть

$$x_1 + x_2 = -p ,$$

$$x_1 x_2 = q$$

(сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену).



Метод разложения на множители

Цель:

привести квадратное уравнение общего вида к виду:

$$A(x)\cdot B(x)=0,$$

где A(x) и B(x) – многочлены относительно x.

Способы:

- *Вынесение общего множителя за скобки;*
- *Использование формул сокращенного умножения;*
- *Способ группировки.*

Пример:

$$x^2 + 10x - 24 = 0$$

$$x^2 + 10x - 24 = 0$$

$$x^2 + 12x - 2x - 24 = 0$$

$$x(x + 12) - 2(x + 12) = 0$$

$$(x + 12)(x - 2) = 0$$

$$x = -12 \text{ или } x = 2$$

Метод выделения полного квадрата

Решим уравнение: $x^2 + 6x - 7 = 0.$

$x^2 + 6x - 7 = 0.$

$(x + 3)^2 - 16 = 0.$

$(x + 3)^2 = 16.$

$x + 3 = 4;\ x + 3 = -4.$

$x = 1,\ x = -7.$

Ответ: 1; -7.

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$

Решение квадратных уравнений по формуле

$$ax^2+bx+c=0$$

Выражение $D = b^2 - 4ac$ называют ***дискриминантом*** квадратного уравнения.

Корни квадратного уравнения:

Если D>0, $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Если D=0, $$x = \frac{-b}{2a}$$

Если D<0, ***Нет корней***

Решение уравнений с помощью теоремы Виета

если x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + px + q = 0$

то $x_1 + x_2 = -p$

$x_1 \cdot x_2 = q$ $\quad (D \geq 0)$

Например:

$X^2 + 3X - 10 = 0$

$X_1 \cdot X_2 = -10$, значит корни имеют разные знаки

$X_1 + X_2 = -3$, значит больший по модулю корень - отрицательный

Подбором находим корни: $X_1 = -5$, $X_2 = 2$

Решение уравнений способом «переброски»

Решите уравнение: $2x^2 - 11x + 15 = 0.$

Перебросим коэффициент 2 к свободному члену

$y^2 - 11y + 30 = 0.$

D>0, по теореме, обратной теореме Виета, получаем корни: 5;6,
далее возвращаемся к корням исходного уравнения: 2,5; 3.

Ответ: 2,5; 3.

Свойства коэффициентов квадратного уравнения

Если в квадратном уравнении *a+b+c=0*,
то один из корней равен 1, а
второй по теореме Виета равен с/а

Если в квадратном уравнении *a+c=b*,
то один из корней равен (-1),
а второй по теореме Виета равен –с/а

Пример: $137x^2 + 20x - 157 = 0.$

$a = 137,\ b = 20,\ c = -157.$

$a + b + c = 137 + 20 - 157 = 0.$

$x_1 = 1,\quad x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-157}{137}$

Ответ $\frac{-157}{137}$

Второй коэффициент - четный

Если $b = 2k$, то корни уравнения $ax^2 + 2kx + c = 0$ находят-

ся по формуле $\boxed{x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{D_1}}{a}}$,

где $\boxed{D_1 = \frac{D}{4} = k^2 - ac = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}$.

$\boxed{x^2 + px + q = 0}$ — **приведенное квадратное уравнение.**

Старший коэффициент равен 1.

Квадратное уравнение общего вида $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 1$	$\Leftrightarrow$	Приведенное квадратное уравнение: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, здесь $p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$

Формула корней приведенного квадратного уравнения.

$$\boxed{x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Графический способ решения квадратного уравнения

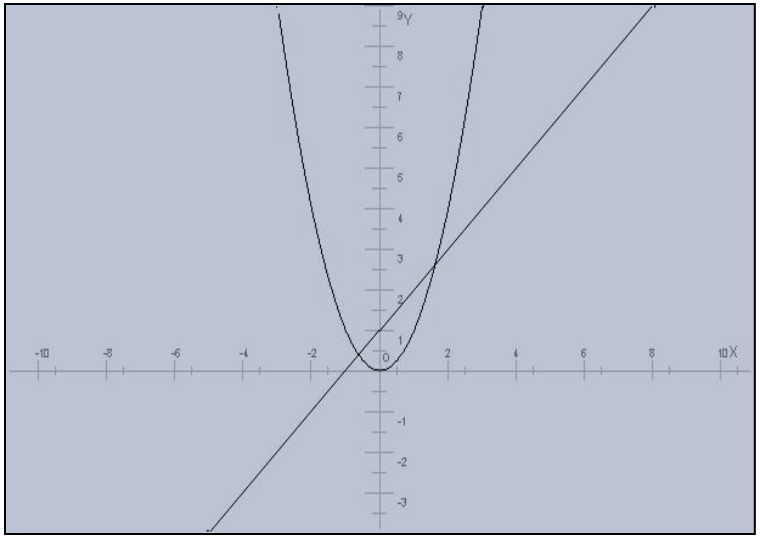
Не используя формул квадратное уравнение можно решить графическим способом. Решим уравнение $x^2 - x - 1 = 0.$

Для этого построим два графика: **1)y=x2**
2)y=x+1

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	9	4	1	0	1	4	9

X	-1	0	1
Y	0	1	2

Абсциссы точек пересечения графиков и будет корнями уравнения.
Если графики пересекаются в двух точках, то уравнение имеет два корня.
Если графики пересекаются в одной точке, то уравнение имеет один корень.
Если графики не пересекаются, то уравнение корней не имеет.



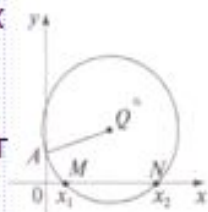
Ответ: $x \approx -0.6; x \approx 2.6$

Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки

Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) можно рассматривать как абсциссы точек пересечения окружности с центром ($\frac{b}{2a}$; $\frac{a+c}{2a}$), проходящей через точку A(O; 1), и оси *Ox*.

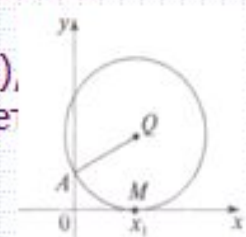
1) если QA > $\frac{a+c}{2a}$, то

окружность пересекает ось Ox в двух точках M(x_1; 0) и N(x_2; 0) уравнение имеет корни x_1; x_2;



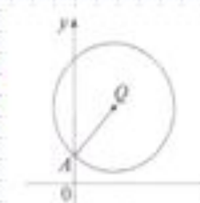
2) если QA = $\frac{a+c}{2a}$, то

окружность касается оси *Ox* в точке M(x_1; 0), уравнение имеет корень x_1.



если QA < $\frac{a+c}{2a}$,

то окружность не имеет общих точек с осью *Ox*, уравнения нет корней.



Решение квадратных уравнений с помощью номограммы

Это старый и незаслуженно забытый способ решения квадратных уравнений, помещенный на с.83 «Четырехзначные математические таблицы» Брадис В.М.

Таблица XXII. Номограмма для решения уравнения

$$z^2 + pz + q = 0$$

Эта номограмма позволяет, не решая квадратного уравнения, по его коэффициентам определить корни уравнения.

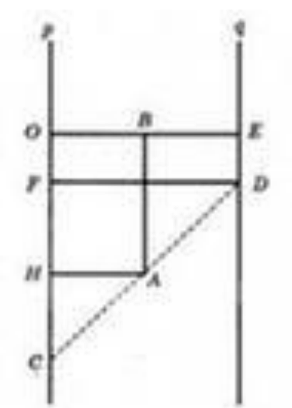
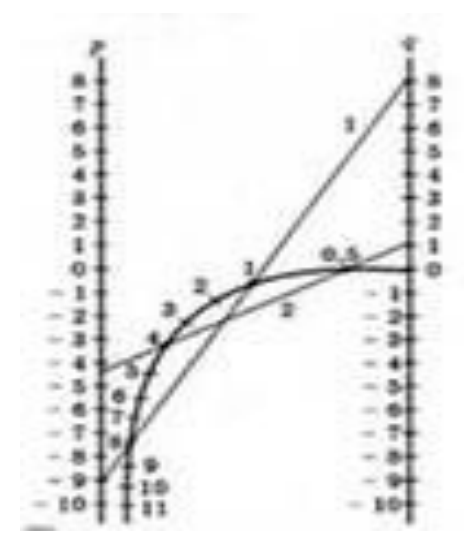


Рис. 11

Для уравнения $z^2 - 9z + 8 = 0$ ***номограмма дает корни***



$Z_1 = 8.0$ и $Z_2 = 1.0$

Геометрический способ решения квадратных уравнений

В древности, когда геометрия была более развита, чем алгебра, квадратные уравнения решали не алгебраически, а геометрически.

$y^2 + 6y - 16 = 0$ как древние греки решали уравнение:

$y^2 + 6y = 16$ или $y^2 + 6y + 9 = 16 + 9$

$y^2 + 6y + 9$ $16 + 9$

Выражения и геометрически пр $y^2 + 6y - 16 + 9 - 9 = 0$ один и тот же квадрат, а исходное уравнение $y + 3 = \pm 5$ $y_1 = 2, y_2 = -8$ одно и тоже уравнение.

Откуда и получаем чт

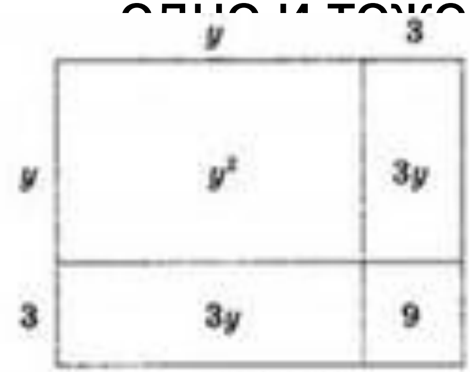


Рис. 16