

10 способов решения квадратных уравнений

О теореме Виета

Теорема, выражающая связь между коэффициентами квадратного уравнения и его корнями, носящая имя Виета, была им сформулирована впервые в 1591 г. Следующим образом: «Если $B+D$, умноженное на $A-A$, равно BD , то A равно B и равно D ».

Чтобы понять Виета, следует помнить, что A , как и всякая гласная буква, означало у него неизвестное (наше x), гласные же B, D — коэффициенты при неизвестном.

На языке современной алгебры вышеприведенная формулировка Виета означает:

Если приведенное квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ имеет действительные корни, то их сумма равна $-p$, а произведение равно q , то есть

$$x_1 + x_2 = -p,$$

$$x_1 x_2 = q$$

(сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену).



Метод разложения на множители

Цель:

привести квадратное уравнение общего вида к виду:

$$A(x) \cdot B(x) = 0,$$

где $A(x)$ и $B(x)$ — многочлены относительно x

Способы:

- Вынесение общего множителя за скобки;
- Использование формул сокращенного умножения;
- Способ группировки.

Пример:

$$x^2 + 10x - 24 = 0$$

$$x^2 + 12x - 2x - 24 = 0$$

$$x(x + 12) - 2(x + 12) = 0$$

$$(x + 12)(x - 2) = 0$$

$$x = -12 \text{ или } x = 2$$

Метод выделения полного квадрата

Решим уравнение: $x^2 + 6x - 7 = 0$.

$$x^2 + 6x - 7 = 0.$$

$$(x + 3)^2 - 16 = 0.$$

$$(x + 3)^2 = 16.$$

$$x + 3 = 4; \quad x + 3 = -4.$$

$$x = 1, \quad x = -7.$$

Ответ: 1; -7.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Решение квадратных уравнений по формуле

$$ax^2+bx+c=0$$

Выражение $D = b^2 - 4ac$ называют **дискриминантом** квадратного уравнения.

Корни квадратного уравнения:

Если $D > 0$,

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Если $D = 0$,

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Если $D < 0$, Нет корней

Решение уравнений с помощью теоремы

Виета

если x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + px + q = 0$

$$\begin{aligned} \text{то} \quad x_1 + x_2 &= -p \\ x_1 \cdot x_2 &= q \end{aligned} \quad (D \geq 0)$$

Например:

$$X^2 + 3X - 10 = 0$$

$X_1 \cdot X_2 = -10$, значит корни имеют разные знаки

$X_1 + X_2 = -3$, значит больший по модулю корень - отрицательный

Подбором находим корни: $X_1 = -5$, $X_2 = 2$

Решение уравнений способом «переброски»

Решите уравнение: $2x^2 - 11x + 15 = 0$.

Перебросим коэффициент 2 к свободному члену

$$y^2 - 11y + 30 = 0.$$

**$D > 0$, по теореме, обратной теореме Виета,
получаем**

корни: 5; 6,

**далее возвращаемся к корням исходного
уравнения: 2,5; 3.**

Ответ: 2,5; 3.

Свойства коэффициентов квадратного уравнения

Если в квадратном уравнении $a+b+c=0$,
то один из корней равен 1, а
второй по теореме Виета равен c/a

Если в квадратном уравнении $a+c=b$,
то один из корней равен (-1) ,
а второй по теореме Виета равен $-c/a$

Пример: $137x^2 + 20x - 157 = 0$.
 $a = 137, b = 20, c = -157$.
 $a + b + c = 137 + 20 - 157 = 0$.

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-157}{137}$$

Ответ $\frac{-157}{137}$

Второй коэффициент - четный

Если $b = 2k$, то корни уравнения $ax^2 + 2kx + c = 0$ находят

ся по формуле $x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{D_1}}{a}$,

где $D_1 = \frac{D}{4} = k^2 - ac = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$

$x^2 + px + q = 0$ — приведенное квадратное уравнение.

Старший коэффициент равен 1.

Квадратное
уравнение
общего вида
 $ax^2 + bx + c = 0,$
 $a \neq 1$

\Leftrightarrow

Приведенное
квадратное уравнение:
 $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$
здесь $p = \frac{b}{a}, q = \frac{c}{a}$

Формула корней приведенного квадратного уравнения.

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Графический способ решения квадратного уравнения

Не используя формул квадратное уравнение можно решить графическим способом. Решим уравнение $x^2 - x - 1 = 0$.

Для этого построим два графика:
1) $y = x^2$
2) $y = x + 1$

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	9	4	1	0	1	4	9

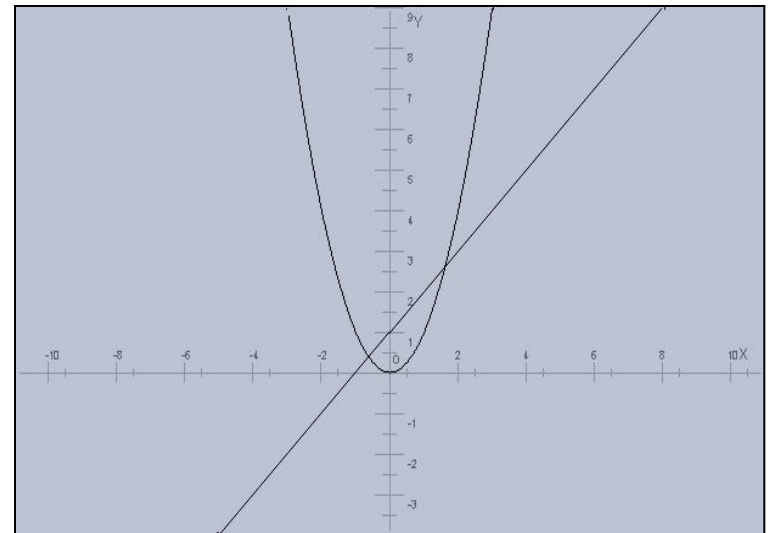
X	-1	0	1
Y	0	1	2

Абсциссы точек пересечения графиков и будут корнями уравнения.

Если графики пересекаются в двух точках, то уравнение имеет два корня.

Если графики пересекаются в одной точке, то уравнение имеет один корень.

Если графики не пересекаются, то уравнение корней не имеет.



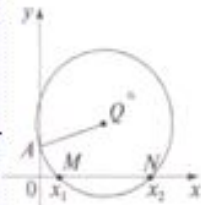
Ответ: $x \approx -0.6; x \approx 2.6$

Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки

Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) можно рассматривать как абсциссы точек пересечения окружности с центром $\frac{b}{2a}$ и $\frac{a+c}{2a}$;), проходящей через точку $A(0; 1)$, и оси Ox .

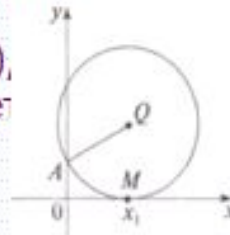
1) если $QA > \frac{a+c}{2a}$, то

окружность пересекает ось Ox в двух точках $M(x_1; 0)$ и $N(x_2; 0)$ уравнение имеет корни $x_1; x_2$;



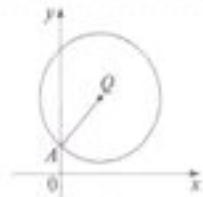
2) если $QA = \frac{a+c}{2a}$, то

окружность касается оси Ox в точке $M(x_1; 0)$, уравнение имеет корень x_1 .



если $QA < \frac{a+c}{2a}$,

то окружность не имеет общих точек с осью Ox , уравнения нет корней.



Геометрический способ решения квадратных уравнений

В древности, когда геометрия была более развита, чем алгебра, квадратные уравнения решали не алгебраически, а геометрически.

$y^2 + 6y - 16 = 0$ как древние греки решали уравнение:

$$y^2 + 6y = 16 \quad \text{ил} \quad y^2 + 6y + 9 = 16 + 9$$

$$y^2 + 6y + 9 = 16 + 9$$

Выражения $y^2 + 6y + 9$ и $16 + 9$ геометрически
 представляют один и тот же квадрат, а исходное
 уравнение $y^2 + 6y - 16 = 0$ равносильно уравнению

$$y + 3 = \pm 5 \quad y_1 = 2, y_2 = -8$$

или $y + 3 = \pm 5$ — это и есть уравнение.

Откуда и получаем что

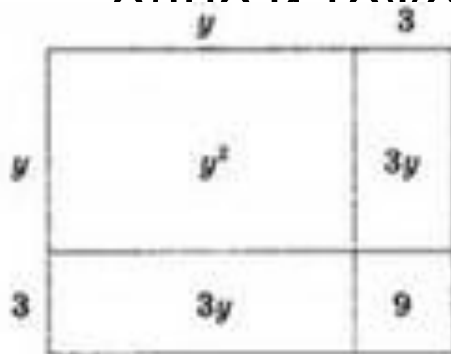


Рис. 16