

# Двойственная задача

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \rightarrow \max \quad Z(y) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 \rightarrow \min$$

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \leq b_2$$

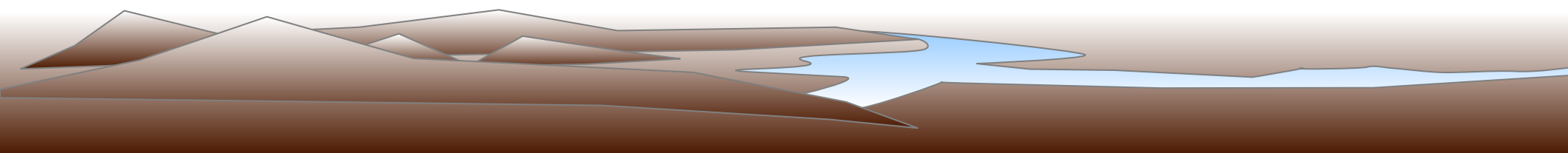
$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 \leq b_3$$

$$x_i \geq 0, i = 1 \div n$$

$$a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{31} y_3 \geq c_1$$

$$a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + a_{32} y_3 \geq c_2$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$



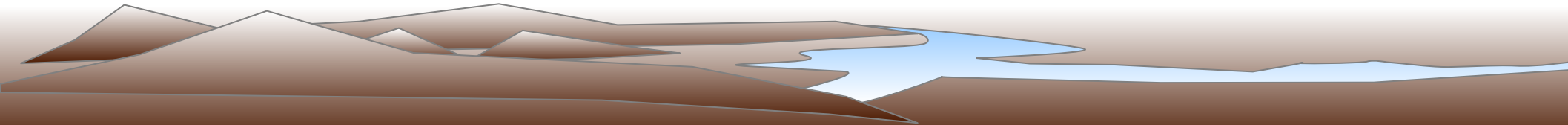
Каждой задаче линейного программирования  
соответствует задача **двойственная / сопряженная**  
по отношению к исходной задаче

$b_i$  — запас ресурса  $S_i$ ,  $a_{ij}$  — число единиц  
потребляемого ресурса  $S_i$  при производстве  
единицы продукции  $P_j$

$y_1, y_2, y_3$  -цены на ресурсы

Затраты на закупку этих ресурсов должны быть  
минимальными, т. е.:

$$Z(y) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 \rightarrow \min$$



С другой стороны, предприятие, продающее ресурсы, заинтересовано в том, чтобы полученная выручка была не менее той суммы, которую предприятие могло получить при переработке ресурсов в готовую продукцию. На изготовление продукции P1 расходуется  $a_{11}$  ресурса S1,  $a_{21}$  ресурса S2,  $a_{31}$  ресурса S3.

Следовательно:

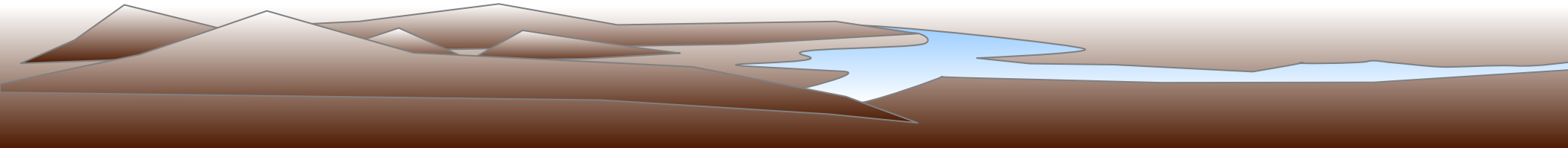
$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{31}y_3 \geq c_1 \quad a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 \geq c_2$$

Цены на ресурсы величины не могут быть отрицательными, значит

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

# Формулировка двойственной задачи:

Найти такой набор оценок ресурсов, при которых общие затраты а ресурсы будут минимальными при условии, что затраты на ресурсы при производстве каждого вида продукции будут не менее выручки с реализации этой продукции

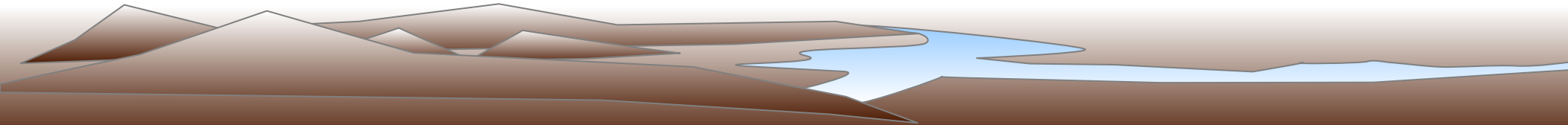


## Свойства взаимно двойственных задач:

1. В одной задаче ищут максимум целевой функции, а в другой минимум.
2. Коэффициенты при переменных в целевой функции одной задачи являются свободными членами системы ограничений в другой.
3. Каждая из задач задана в стандартной форме, причем в задаче на максимум все неравенства вида « $\leq$ », а в задаче на минимум — все неравенства вида « $\geq$ ».
4. Матрица коэффициентов при переменных в системах ограничений являются транспортированными друг к другу

5. Число неравенств в системе ограничений одной задачи совпадает с числом переменных в другой задаче.

6. Условия неотрицательности переменных имеются в обеих задачах.



## Пример решения задачи.

Составить двойственную задачу для заданной.

Дана целевая функция  $f(x) = -x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$

И система ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 1 \\ -x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \geq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Приведем систему неравенств к правильному виду (чтобы все знаки неравенств соответствовали задаче на максимум):

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq -1 \\ -x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ -x_1 - x_2 \leq -5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Тогда взаимно двойственная задача для исходной  
имеет вид:

$$\begin{cases} z(y) = -y_1 + 24y_2 + 3y_3 - 5y_4 \rightarrow \min \\ -2y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \geq -1 \\ y_1 + 4y_2 - y_3 - y_4 \geq 2 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

