Двойственная задача

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \le b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \le b_2 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 \le b_3 \\ x_i \ge 0,\ i = 1 \div n \end{cases}$$

$$Z(y) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 \rightarrow min$$

$$\begin{cases} a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{31} y_3 \ge c_1 \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + a_{32} y_3 \ge c_2 \\ Y_1,\ y_2, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

Каждой задаче линейного программирования соответствует задача **двойственная** / **сопряженная** по отношению к исходной задаче

b_i — запас ресурса S_i, a_{ij} — число единиц потребляемого ресурса Si при производстве единицы продукции Pj

y_1, y_2, y_3 -цены на ресурсы

Затраты на закупку этих ресурсов должны быть минимальными, т. е.:

$$Z(y) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 \to min$$

С другой стороны, предприятие, продающее ресурсы, заинтересовано в том, чтобы полученная выручка была не менее той суммы, которую предприятие могло получить при переработке ресурсов в готовую продукцию. На изготовление продукции Р1 расходуется а11 ресурса S1, а21 ресурса S2, а31 ресурса S3. Следовательно:

$$a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{31} y_3 \geq c_1 \qquad a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + a_{32} y_3 \geq c_2$$

Цены на ресурсы величины не могут быть отрицательными, значит

$$Y_1, \; y_2, y_3 \geq 0$$

Формулировка двойственной задачи:

Найти такой набор оценок ресурсов, при которых общие затраты а ресурсы будут минимальными при условии, что затраты на ресурсы при производстве каждого вида продукции будут не менее выручки с реализации этой продукции

Свойства взаимно двойственных задач:

1. В одной задаче ищут максимум целевой функции, а в другой минимум.
2. Коэффициенты при переменных в целевой функции одной задачи являются свободными членами системы ограничений в другой.
3. Каждая из задач задана в стандартной форме, причем в задаче на максимум все неравенства вида «≤ », а в задаче на минимум — все неравенства вида «≥».
4. Матрица коэффициентов при переменных в системах ограничений являются транспортированными друг к другу

5. Число неравенств в системе ограничений одной задачи совпадает с числом переменных в другой задаче.

6. Условия неотрицательности переменных имеются в обеих задачах.

Пример решения задачи.

Составить двойственную задачу для заданной.

Дана целевая функция $f(x) = -x_1 + 2x_2 \rightarrow max$

И система ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 1 \\ -x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \geq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Приведем систему неравенств к правильному виду (чтобы все знаки неравенств соответствовали задаче на максимум):

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq -1 \\ -x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ -x_1 - x_2 \leq -5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Тогда взаимно двойственная задача для исходной имеет вид:

$$z(y) = -y_1 + 24y_2 + 3y_3 - 5y_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -2y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \geq -1 \\ y_1 + 4y_2 - y_3 - y_4 \geq 2 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{cases}$$