ВЕКТОРЫ

Определение.

Отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой - концом, называется направленным отрезком или ***вектором.***

Вектор характеризуется следующими элементами:

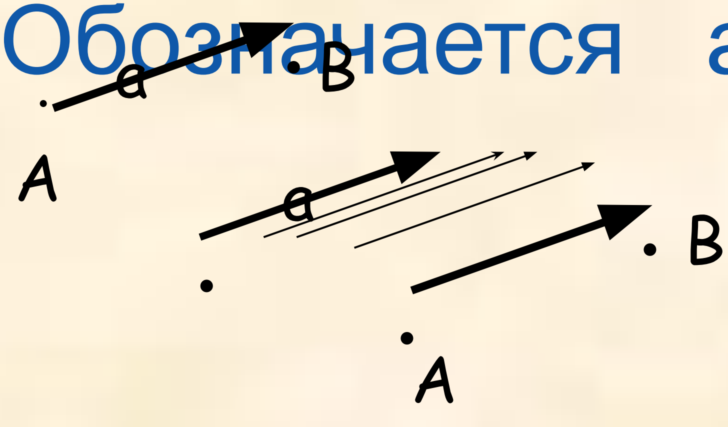
1) начальной точкой (точкой приложения);

2) направлением;

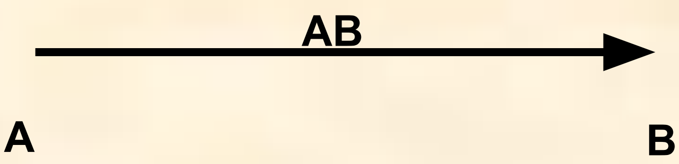
3) длиной («модулем вектора»).

Абсолютной величиной (или модулем) **вектора** называется длина отрезка, изображающего вектор. Абсолютная величина вектора а .

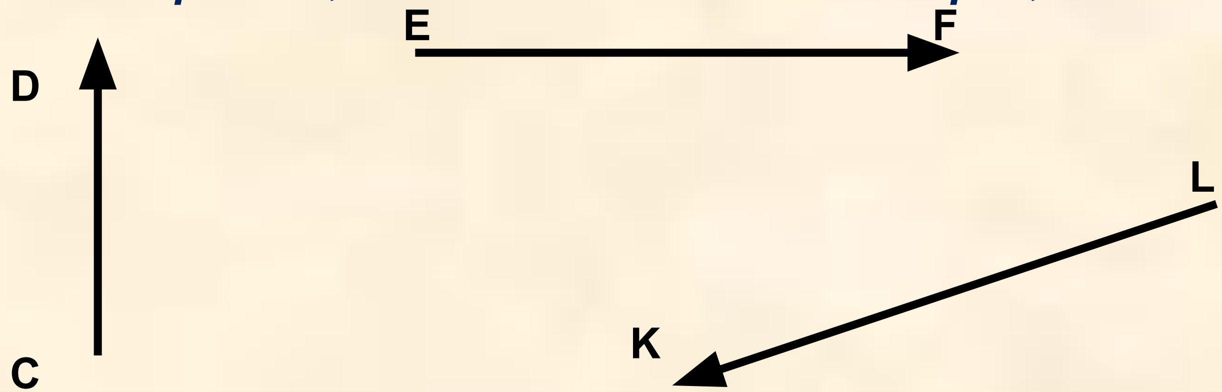
Обозначается а .



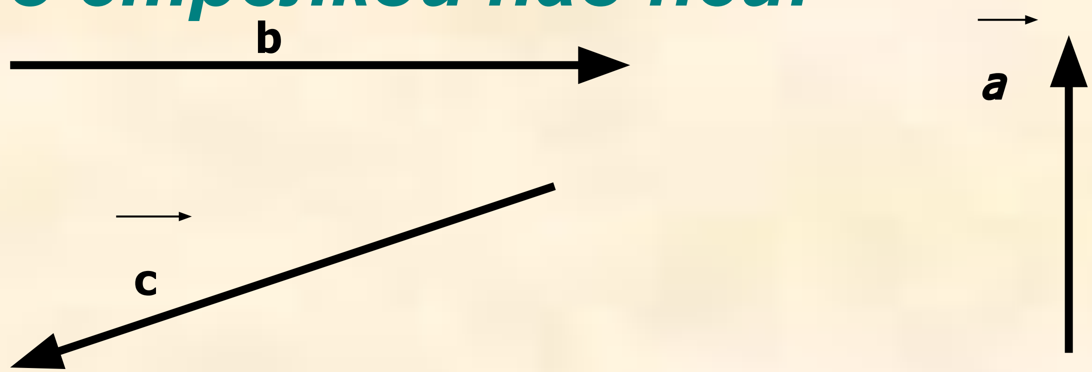
На рисунках вектор изображается отрезком со стрелкой



Вектор AB, A – начало вектора, B – конец.



Векторы часто обозначают и одной строчной латинской буквой со стрелкой над ней:



Любая точка плоскости также является вектором, который называется НУЛЕВЫМ. Начало нулевого вектора совпадает с его концом:

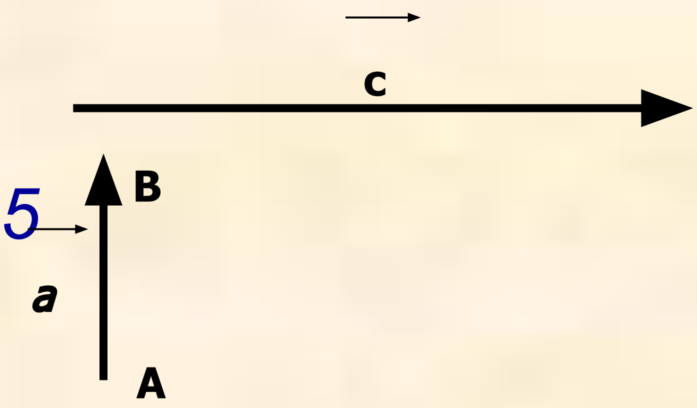
M

$\overrightarrow{MM} = \vec{0}$

Длиной или модулем ненулевого вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB:

$$|\overrightarrow{AB}| = |\vec{a}| = AB = 5$$

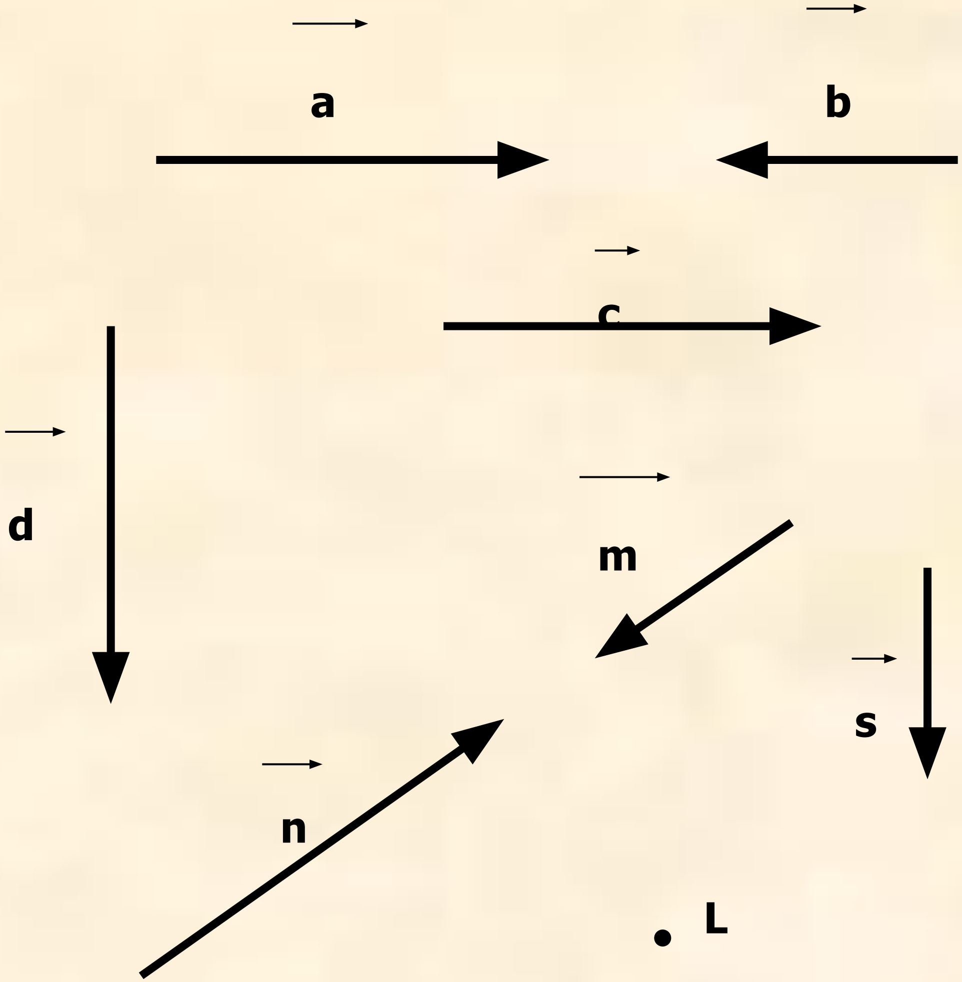
$$|\vec{c}| = 17$$



Длина нулевого вектора считается равной нулю:

Коллинеарные векторы

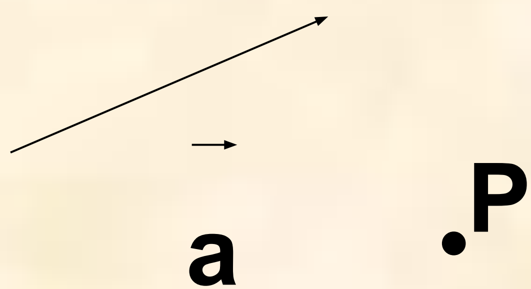
Ненулевые векторы называются **коллинеарными**, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых. Допусти́м, но не рекомендуется, синоним «параллельные» векторы. Коллинеарные векторы могут быть одинаково направлены («сонаправлены») или противоположно направлены (в последнем случае их иногда называют «антиколлинеарными» или «антипараллельными»).



$\vec{a}$
$\vec{b}$
$\vec{c}$
$\vec{d}$
$\vec{m}$
$\vec{s}$
$\vec{n}$
L

Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору, так как он сонаправлен с любым вектором.

$$\vec{a} \parallel \vec{0}$$



Равенство векторов

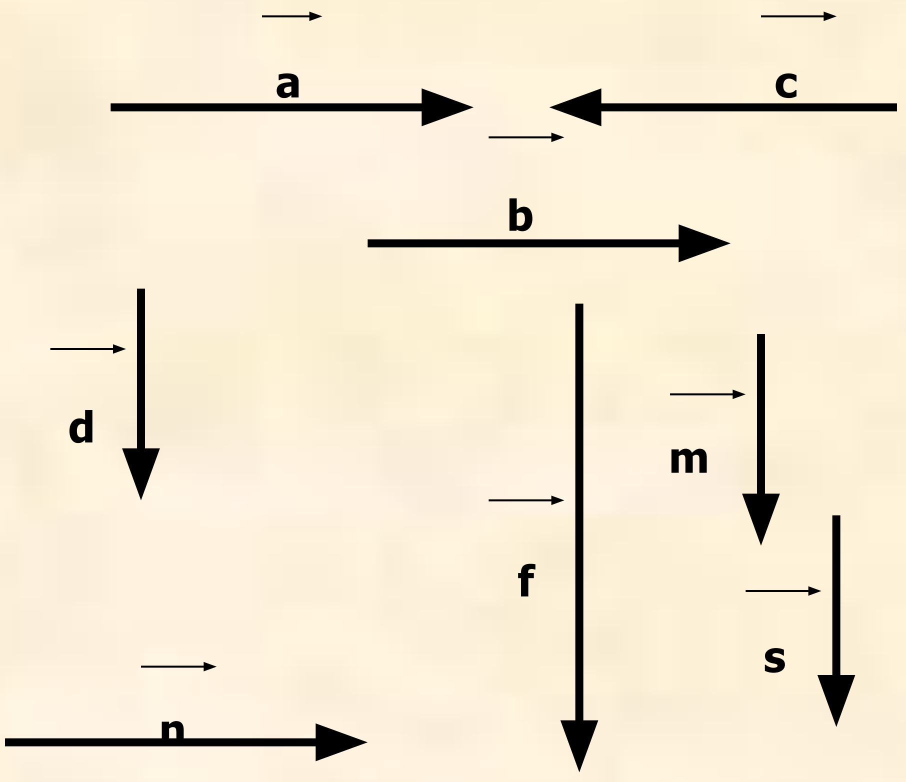
1 Определение.

Векторы называются **равными**, если они сонаправлены и их длины равны.

$\vec{a} = \vec{b}$, если

$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

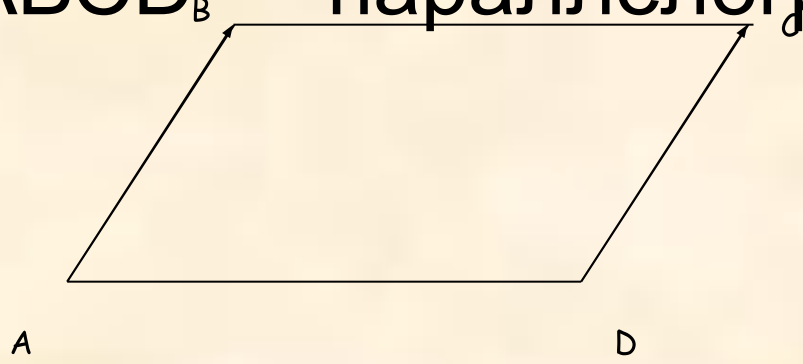
$|\vec{a}|\ |\vec{b}|$



2 Определение

Два вектора называются равными, если они совмещаются параллельным переносом.

ABCD — параллелограмм, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

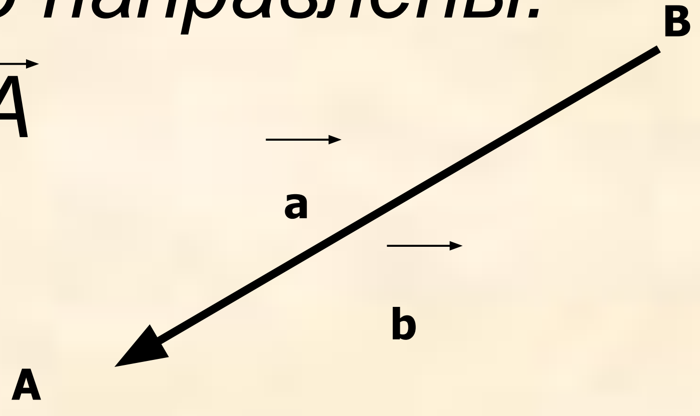


Противоположные векторы

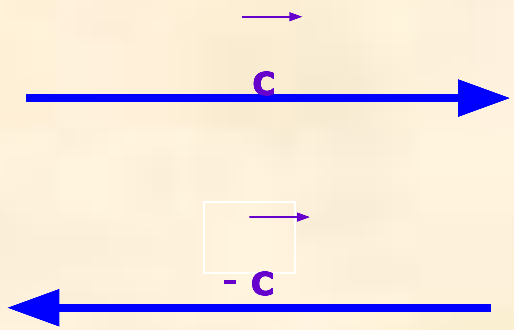
Пусть $\vec{a}$ – произвольный ненулевой вектор.

Определение. Вектор $\vec{b}$ называется противоположным вектору $\vec{a}$, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют равные длины и противоположно направлены.

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BA}$



Вектор, противоположный вектору $\vec{c}$, обозначается так: $-\vec{c}$.



Очевидно, $\vec{c}+(-\vec{c})=\vec{0}$ или $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$

Сумма двух векторов

Законы сложения векторов:

I. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

(П е р е м е с т и т е л ь н ы й закон).

II. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

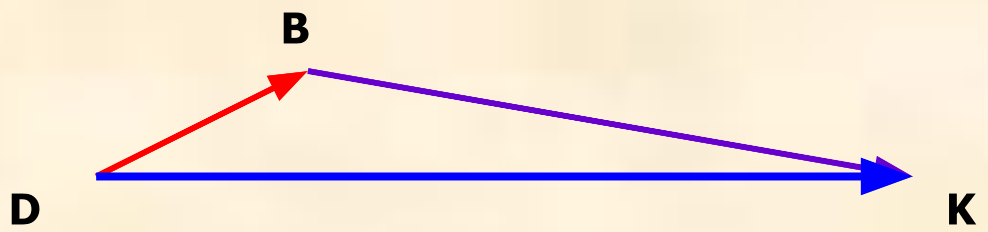
(С о ч е т а т е л ь н ы й закон).

III. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

IV. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Рассмотрим пример:

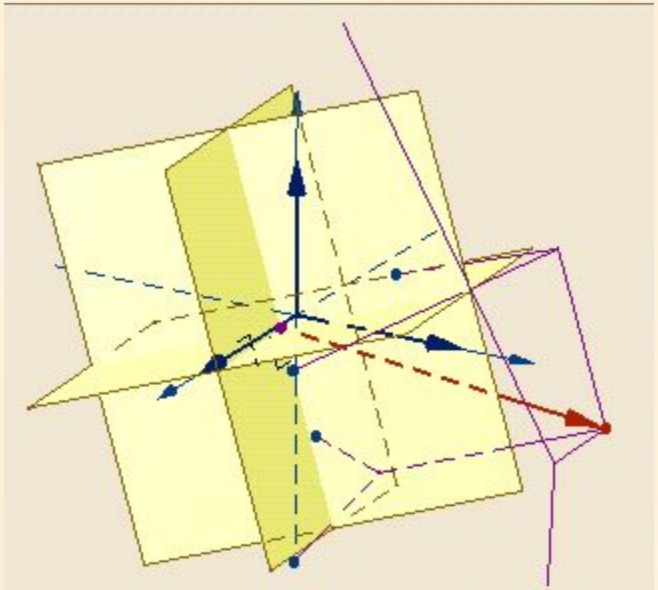
*Петя из дома(**D**) зашел к Васе(**B**), а потом поехал в кинотеатр(**К**).*

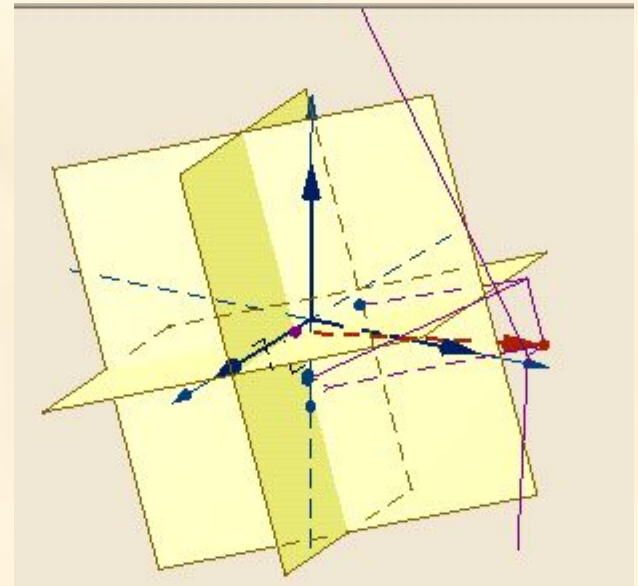


В результате этих двух перемещений, которые можно представить векторами $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{BK}$, Петя переместился из точки D в К, т.е. на вектор $\overrightarrow{DK}$:

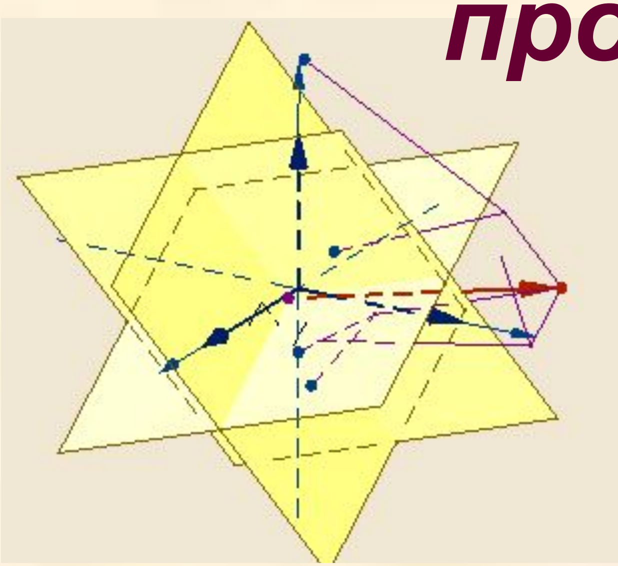
$$\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BK}.$$

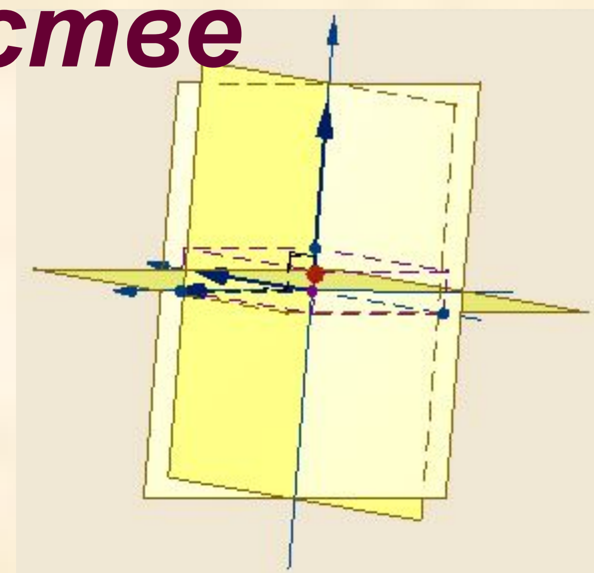
Вектор $\overrightarrow{DK}$ называется суммой векторов $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{BK}$.





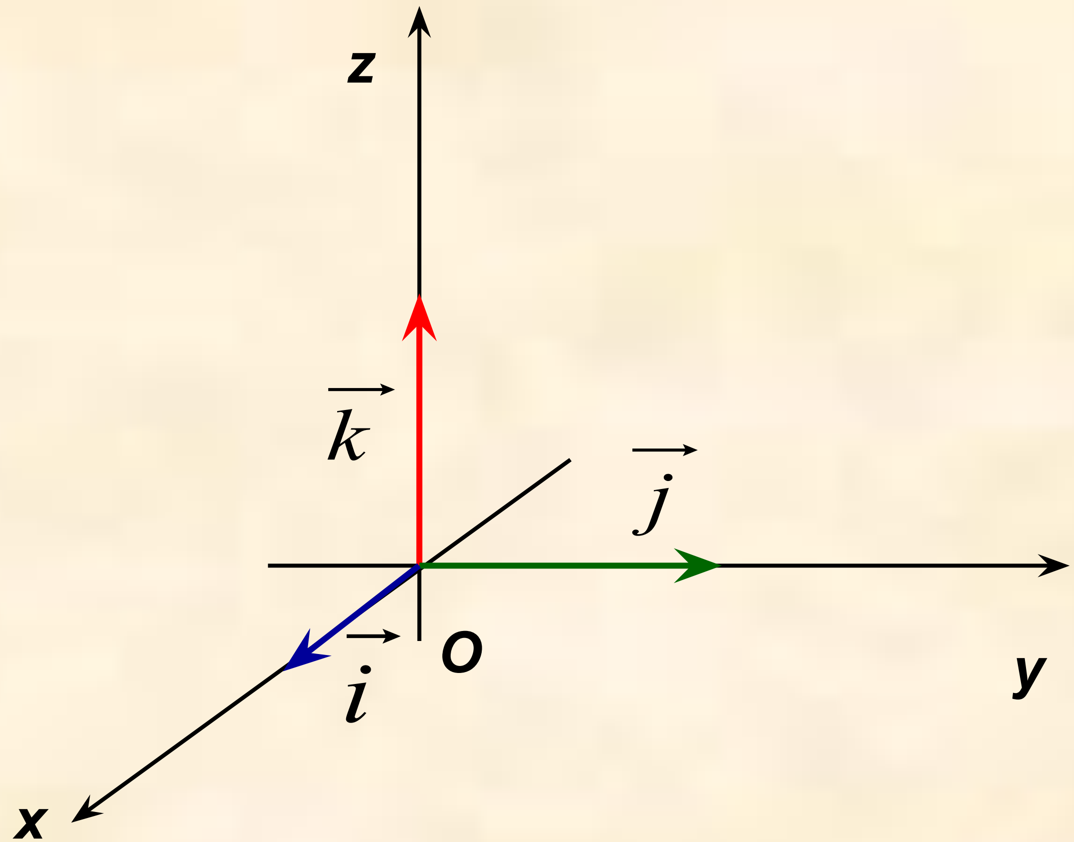
Координаты вектора в пространстве





Единичный вектор – вектор, длина которого равна 1.

i – единичный вектор оси абсцисс, **j** – единичный вектор оси ординат, **k** – единичный вектор оси аппликат.



Любой вектор ā можно разложить по координатным векторам, т.е. представить в виде:

$$\overrightarrow{a} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

Нулевой вектор можно представить в виде:

$$\overrightarrow{0} = 0\overrightarrow{i} + 0\overrightarrow{j} + 0\overrightarrow{k}$$

Координаты равных векторов соответственно равны, т.е., если

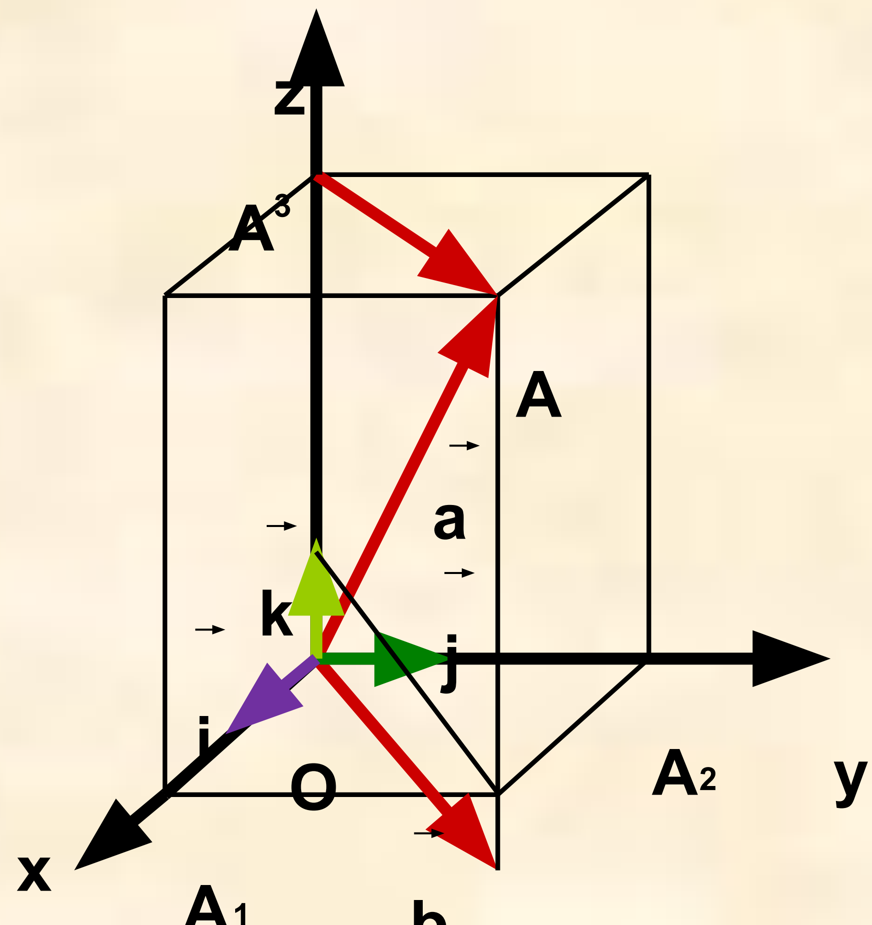
ā $\{x_1; y_1; z_1\} = \vec{b}\ \{x_2; y_2; z_2\}$, то

$x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$.

Запись координат вектора.

- Координаты вектора a будут записываться в фигурных скобках после обозначения вектора: $\vec{a}$ {x; y; z}.
- На рисунке справа изображен прямоугольный параллелепипед имеющий измерения: OA_1 =2, OA_2 =2, OA_3 =3.
- Координаты векторов изображенных на этом рисунке, таковы:

$\vec{a}$ {2; 2; 4}, $\vec{b}$ {2; 2; -1}, $\overrightarrow{AA_3}$ {2; 2;0}, $\vec{i}$ {1; 0; 0}, $\vec{j}$ {0;1;0}, $\vec{k}$ {0; 0; 1}



Правила нахождения суммы, разности и произведения на данное число.

1. *Сумма векторов:*

Каждая координата суммы двух или более векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов. Если $\vec{a}\{x_1;y_1;z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;y_2;z_2\}$ – данные векторы, то вектор $\vec{a}+\vec{b}$ имеет координаты

$$\vec{a}+\vec{b}=\{x_1+x_2;\ y_1+y_2;\ z_1+z_2\}.$$

2. *Разность векторов:*

Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов.

Если $\vec{a}\{x_1;y_1;z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;y_2;z_2\}$ – данные векторы, то вектор

$\vec{a}-\vec{b}$ имеет координаты

$$\vec{a}-\vec{b}=\{x_1-x_2;\, y_1-y_2;\, z_1-z_2\}.$$

3. ***Произведение вектора на число:***

Каждая координата произведения вектора на число равна произведение соответствующей координаты вектора на это число. Если $\vec{a}\,\{x; y; z\}$ – данный вектор, α - данное число, то вектор $\alpha\vec{a}$ имеет координаты

$$\alpha\vec{a} = \{\,\alpha x; \alpha y; \alpha z\,\}.$$

3. Произведение вектора на число:

Каждая координата произведения вектора на число равна произведение соответствующей координаты вектора на это число. Если $\vec{a}\{x; y; z\}$ – данный вектор, α - данное число, то вектор $\alpha\vec{a}$ имеет координаты

$$\boldsymbol{\alpha\vec{a} = \{\alpha x; \alpha y; \alpha z\}}.$$

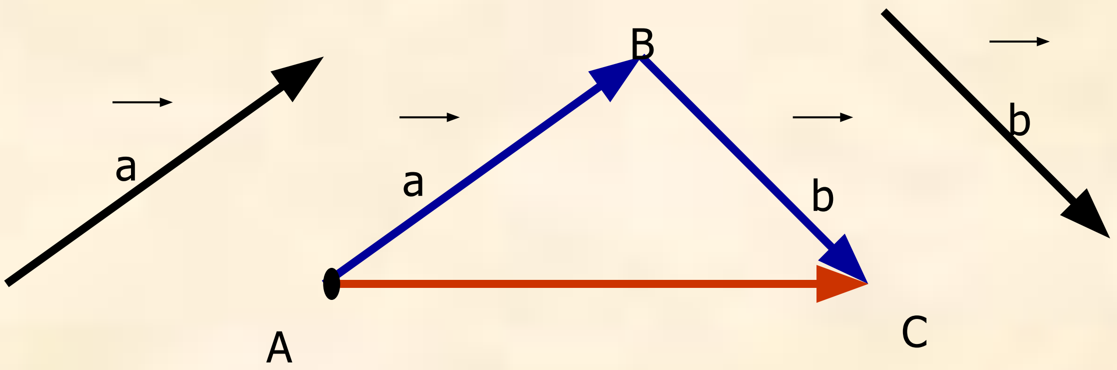
Сложение векторов

1. Правило треугольника.
2. Правило параллелограмма.
3. Правило многоугольника.
4. Правило параллелепипеда.

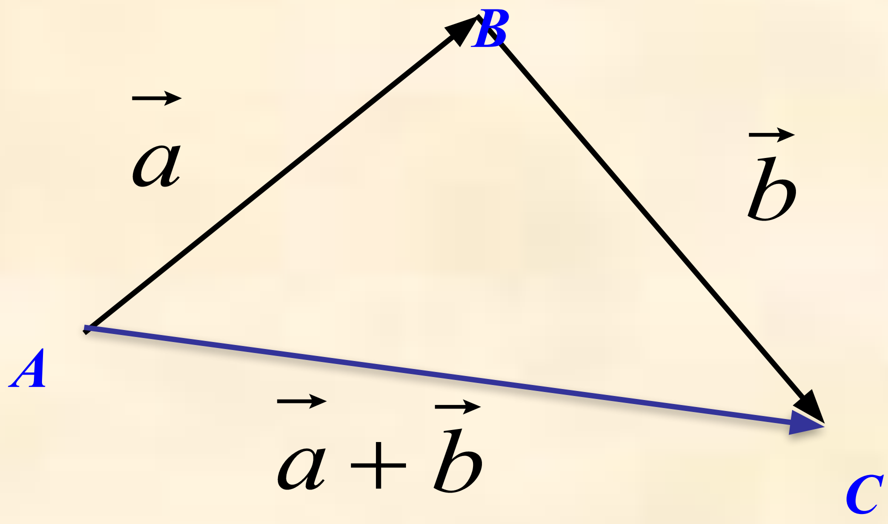
Правило треугольника

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два вектора. Отметим произвольную точку А и отложим от этой точки $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, затем от точки В отложим вектор $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$$



Правило треугольника

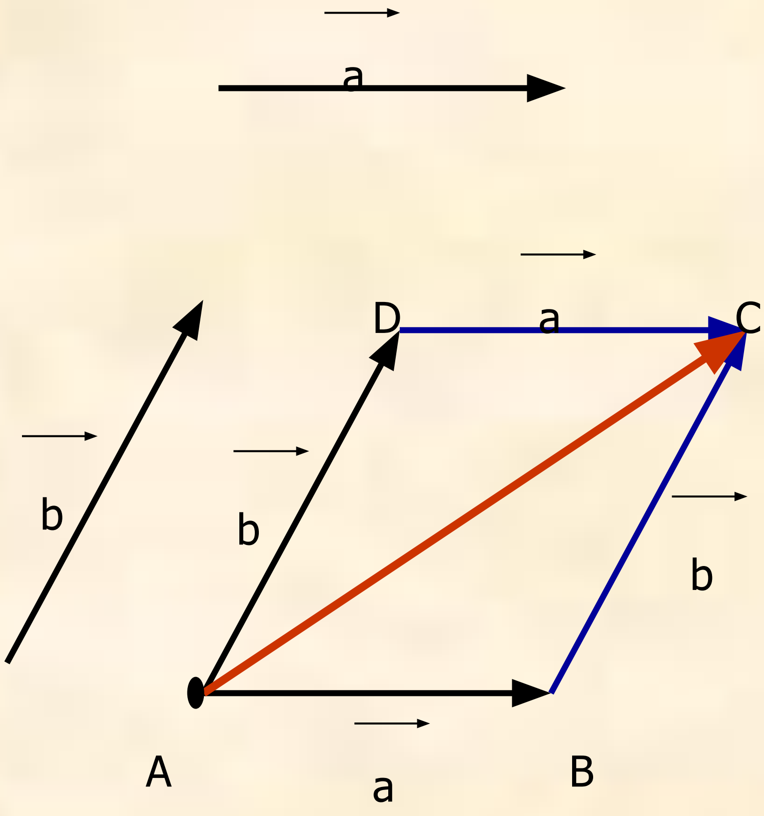


Для любых трех точек A, B и C справедливо равенство:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

Правило параллелограмма

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два вектора. Отметим произвольную точку А и отложим от этой точки $\vec{AB} = \vec{a}$, затем вектор $\vec{AD} = \vec{b}$. На этих векторах построим параллелограмм ABCD.

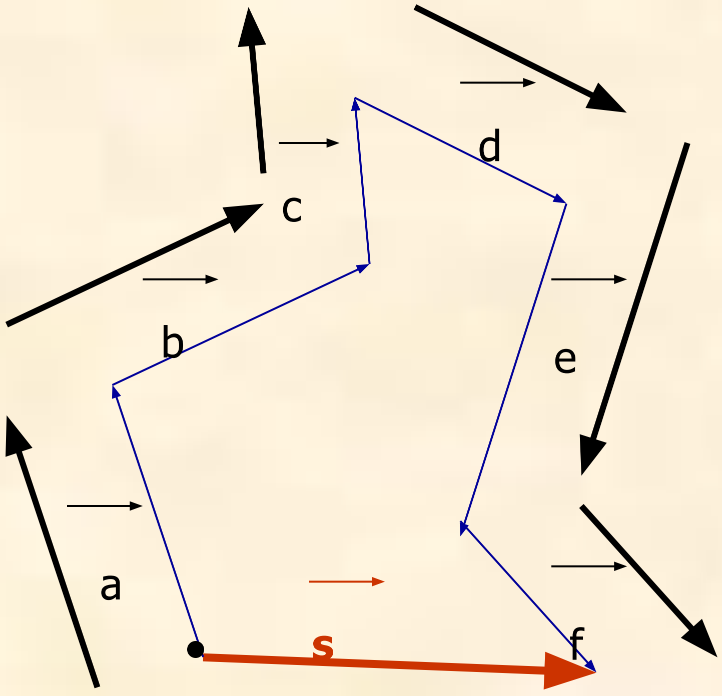


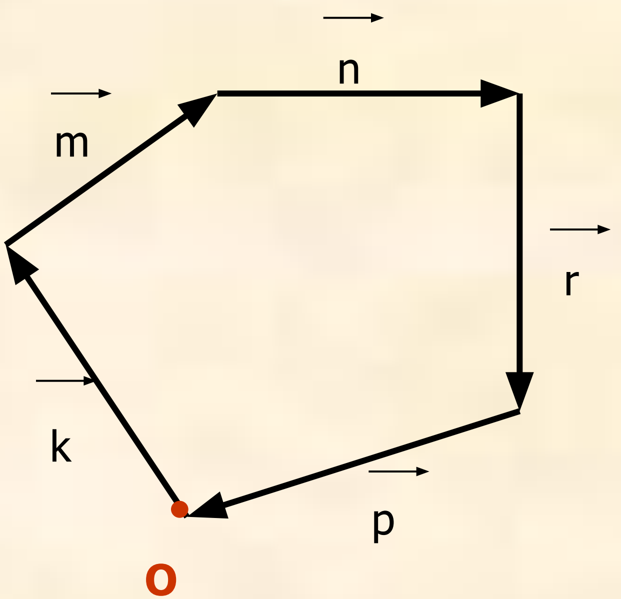
Сумма нескольких векторов

Правило многоугольника

$\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}+\vec{f}$

$\vec{k}+\vec{n}+\vec{m}+\vec{r}+\vec{p} = \vec{0}$





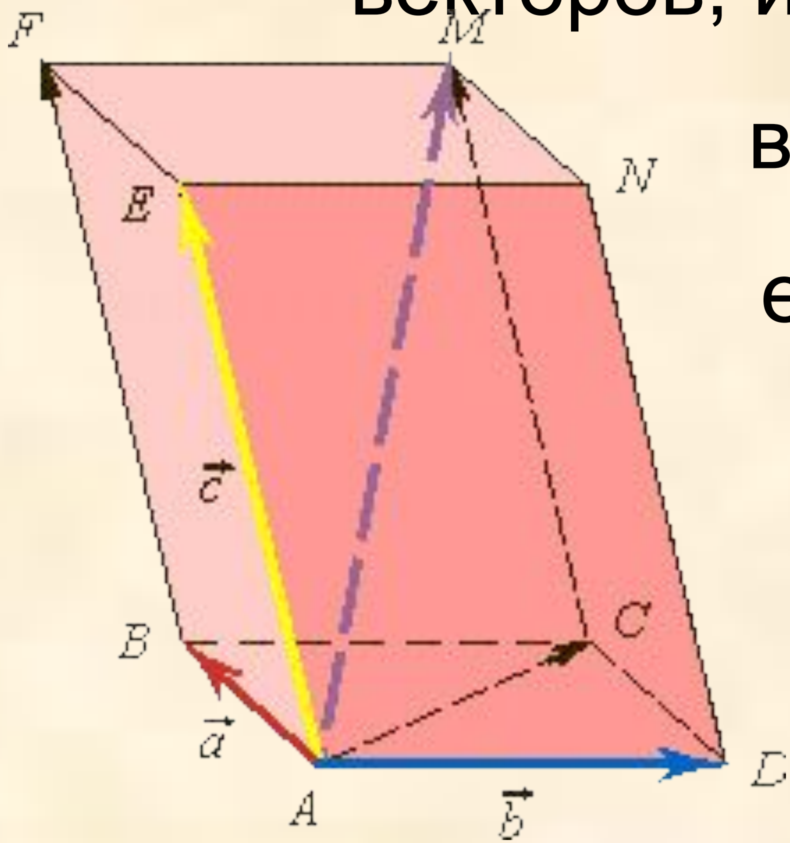
образующий диагональ

параллелепипеда, равен сумме трёх

векторов, исходящих из той же

вершины и образующих

его рёбра.



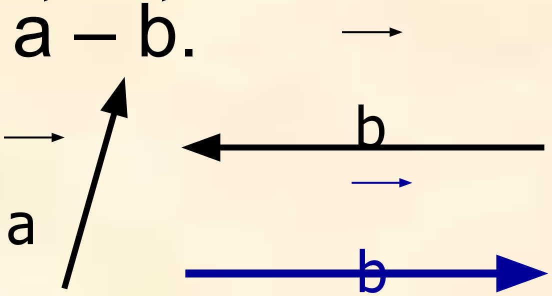
$$\mathbf{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{AM}}$$

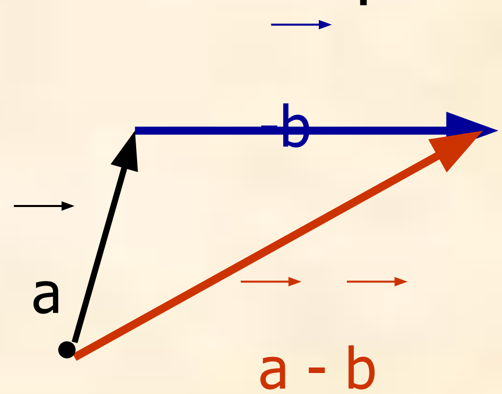
Вычитание векторов

Определение. *Разностью двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.*

Теорема. *Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо равенство $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.*

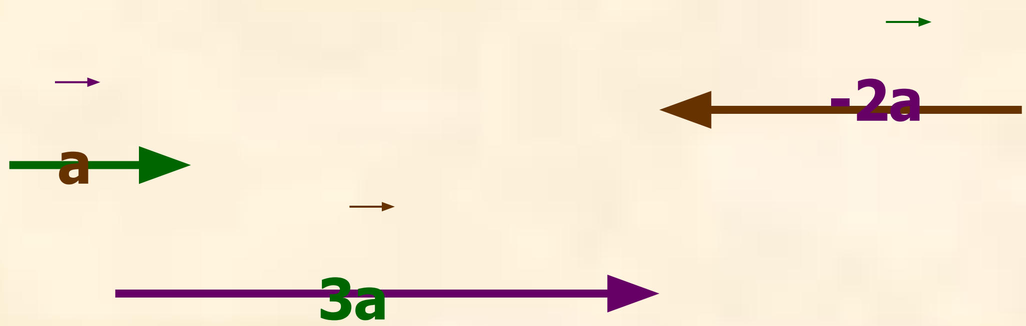
Задача. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Построить вектор $\vec{a} - \vec{b}$.





Умножение вектора на число

Определение. *Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k называется такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна вектору $|k|\,|\vec{a}|$, причем векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены при k ≥ 0 и противоположно направлены при k < 0.*



Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор.

Для любого числа k и любого вектора а векторы а и kа коллинеарны. Из этого определения следует также, произведение любого вектора на число нуль есть нулевой

Умножение вектора на число

Для любых чисел k, n и любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ справедливы равенства:

1. $(kn)\vec{a} = k(n\vec{a})$ *(сочетательный закон)*

2. $(k + n)\vec{a} = k\vec{a} + n\vec{a}$ *(первый распределительный закон)*

3. $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ *(второй распределительный закон)*

Свойства действий над векторами позволяют в выражениях, содержащих суммы, разности векторов и произведения векторов на числа, выполнять преобразования по тем же правилам, что и в числовых выражениях. Например,

$$\vec{p} = 2(\vec{a} - \vec{b}) + (\vec{c} + \vec{a}) - 3(\vec{b} - \vec{c} + \vec{a}) =$$

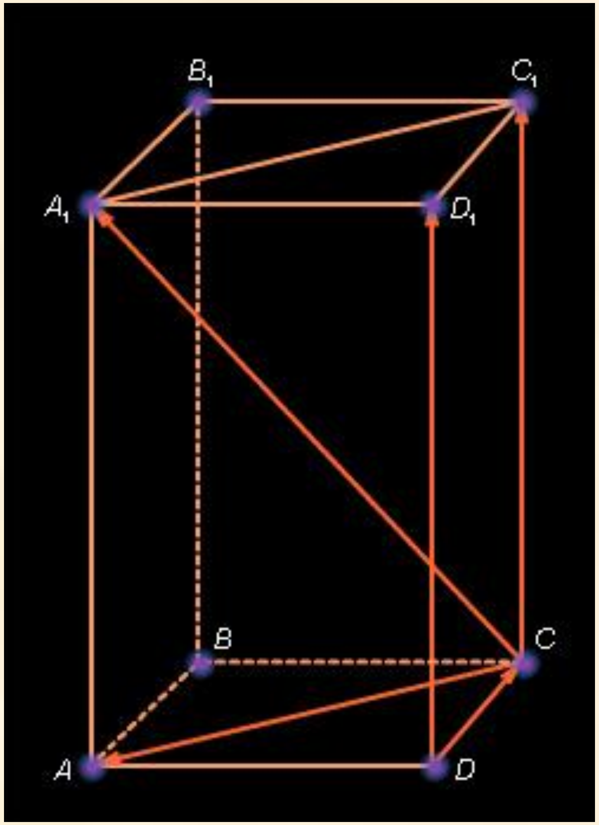
Компланарные векторы

[от лат. com (cum) — совместно и planum — плоскость], векторы, параллельные одной плоскости.

Определение

Векторы называются ***компланарными***, если имеются равные им вектора, параллельные одной плоскости.

Любые два вектора компланарны. Любые три вектора, среди которых есть два коллинеарных, компланарны.



Векторы CA, CA1 и DD1 - компланарны, так как, если отложить от точки *C* вектор CC1=DD1, то все три вектора CA, CA1 и CC1 окажутся лежащими в одной плоскости.

Векторы DC, CA и DD1 - не компланарны, так как вектор DD1 не лежит в плоскости *ACD*.

Признак компланарности трех векторов

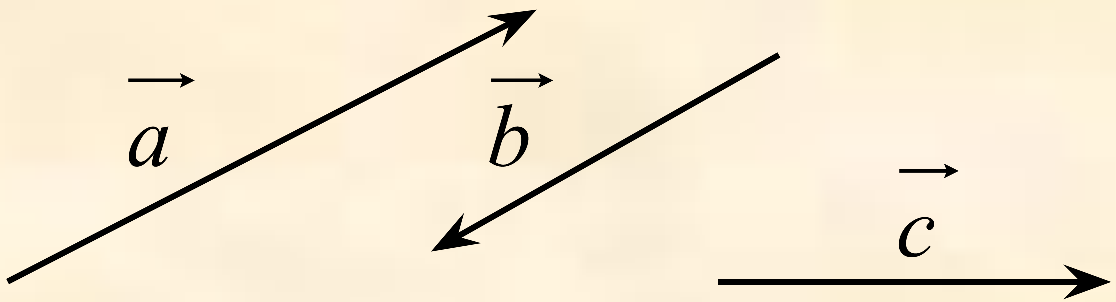
Если вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. представить в виде

$$\vec{c} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b},$$ где

где *x* и *y* — некоторые числа, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

Разложение вектора по координатным векторам

Векторы называются коллинеарными, если они параллельны.



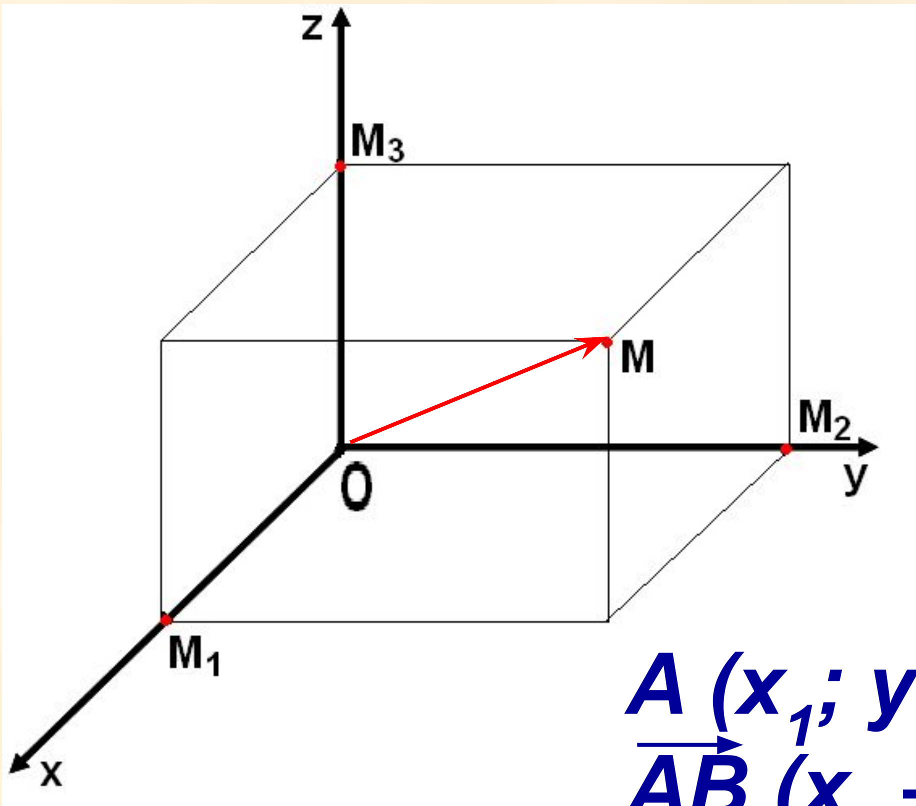
Если векторы $\vec{a}$ { x_1; y_1; z_1 } и $\vec{b}$ { x_2; y_2; z_2 }, то:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = k$$

Связь между координатами векторов и координатами точек

Вектор, конец которого совпадает с данной точкой, а начало – с началом координат, называется радиус-вектором данной точки.

Координаты любой точки равны соответствующим координатам её радус-вектора.



$M\ (x;\ y;\ z)$

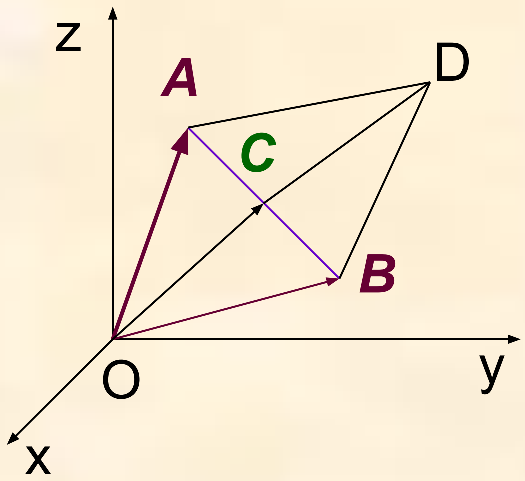
$\overrightarrow{OM}\ (x;\ y;\ z)$

$A\ (x_1;\ y_1;\ z_1),\ B\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$

$\overrightarrow{AB}\ (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$

Простейшие задачи в координатах

1. Координаты середины отрезка.



$A\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$,

$C\ (x;\ y;\ z)$ – середина AB.

$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$, тогда

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2),\ y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2),\ z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$$

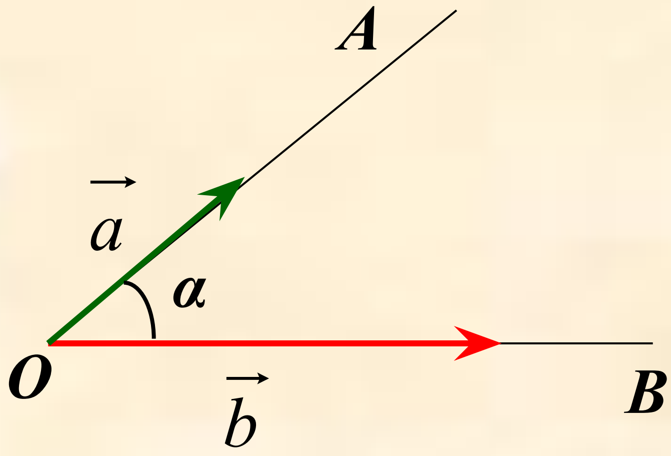
2. Вычисление длины вектора по его координатам:

если $\vec{a}\ \{\ x;\ y;\ z\ \}$, то $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

3. Расстояние между двумя точками:

$$|\overrightarrow{AB}| = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Угол между векторами



$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = \alpha$$

- ***Если a || b и a и b сонаправлены, то α = 0°.***
- ***Если a || b и a и b противоположно направлены, то α = 180°.***
- ***Если a ⊥ b, то α = 90°.***

Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение

Скалярным произведением *двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.*

$$\vec{a}\vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos(\vec{a};\vec{b})$$

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{b})$

2) $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

3) $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Спасибо за внимание!