Методика использования систем задач, сконструированных методом «снежного кома», на уроках геометрии.

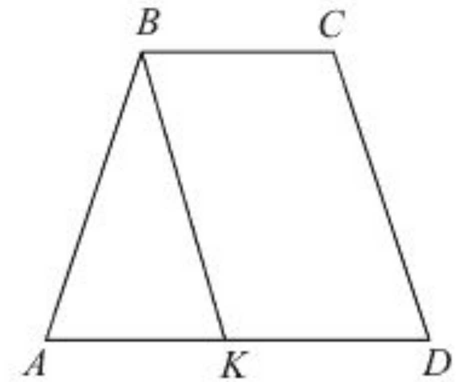
Выделим две разновидности «снежного кома»:

В первом случае идет *использование* ***доказанного*** *утверждения*:

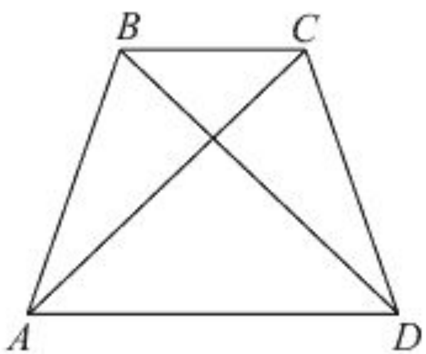
- Докажите, что прямая, проходящая через вершину равнобедренной трапеции параллельно ее боковой стороне, отсекает равнобедренный треугольник.
- Докажите, что у равнобедренной трапеции углы при основании равны.
- Докажите, что у равнобедренной трапеции диагона ли равны.
- 4. Докажите, что середины сторон равнобедренной трапеции являются вершинами ромба.

Решение:

- 1.В равнобокой трапеции *ABCD* прямая *BK* параллельна стороне *CD*. Докажите, что треугольник *ABK*- равнобедренный. По определению *KBCD*- параллелограмм. Тогда стороны *BK* и *CD* равны. А по условию стороны трапеции *AB* и *CD* равны. Следовательно, отрезки *AB* и *BK* равны и треугольник *ABK* -равнобедренный.



2.При решении второй задачи воспользуемся доказанным выше фактом. Для этого проведем прямую *BK,* параллельную стороне *CD* равнобокой трапеции *ABCD.*Треугольник *ABK* - равнобедренный. Тогда $\angle A = \angle K$. А $\angle D = \angle K$ как соответственные при параллельных прямых *BK* и *CD* и секущей *AD*. Следовательно, $\angle A = \angle D$.

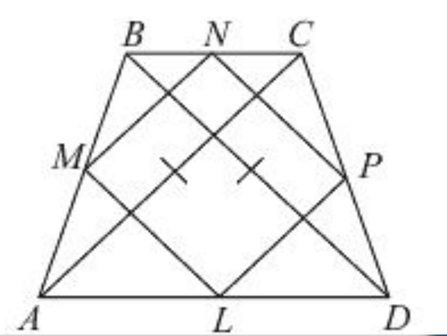


.Чтобы доказать, что у равнобокой трапеции *ABCD* диагонали *AC* и *BD* равны, достаточно доказать равенство треугольников *ABD* и *ACD*. Для этого воспользуемся результатом решения предыдущей задачи, что $\angle A = \angle D$. Тогда треугольники *ABD* и *ACD* будут равны по двум сторонам и углу между ними.

4. *MN* и *PL* - средние линии треугольников *ABC* и *ACD* соответственно. Следовательно, они параллельны диагонали *AC* и равны ее половине. Тогда отрезки *MN* и *PL* - параллельны и равны. Следовательно, четырехугольник *MNPL* - параллелограмм.

Чтобы доказать, что он является ромбом, достаточно показать равенство соседних сторон *MN* и *NP*. *NP* - средняя линия треугольника *BCD*. Тогда $NP = \frac{1}{2}BD$. По предыду

BD = *AC*. Следовательно, *MN*= *NP*.



Вторая разновидность рассматриваемого метода предполагает ***повторение операции предыдущей задачи.***

Например:

- Площадь треугольника равна 100, а две его стороны равны 40 и 10. Найдите угол между этими сторонами.
- Две стороны остроугольного треугольника равны $2\sqrt{2}$ и 3, а площадь этого треугольника равна 3. Найдите третью сторону.
- 3.Площадь треугольника ABC равна 48. найдите сторону BC, если сторона AC равна 8, длина медианы AD равна 10.

Решение:

1. Воспользуемся формулой $S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Имеем $100=\frac{1}{2}10\text{-}40\sin\gamma$, $\sin\gamma=\frac{1}{2}$, $\gamma=30$ или $\gamma=150°$.

2.Найдем угол между известными сторонами треугольника, как это делали в предыдущей задаче:

$3=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3\cdot\sin\gamma.\sin\gamma=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\gamma=45°$ или $\gamma=135°$. По теореме косинусов

найдем третью сторону: $c^2=3^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2-2\cdot 3\cdot 2\sqrt{2}\cdot\cos 45°$ или

$c^2=3^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2-2\cdot 3\cdot 2\sqrt{2}\cdot\cos 135^0$. Отсюда $c=\sqrt{5}$ или $c=\sqrt{29}$.

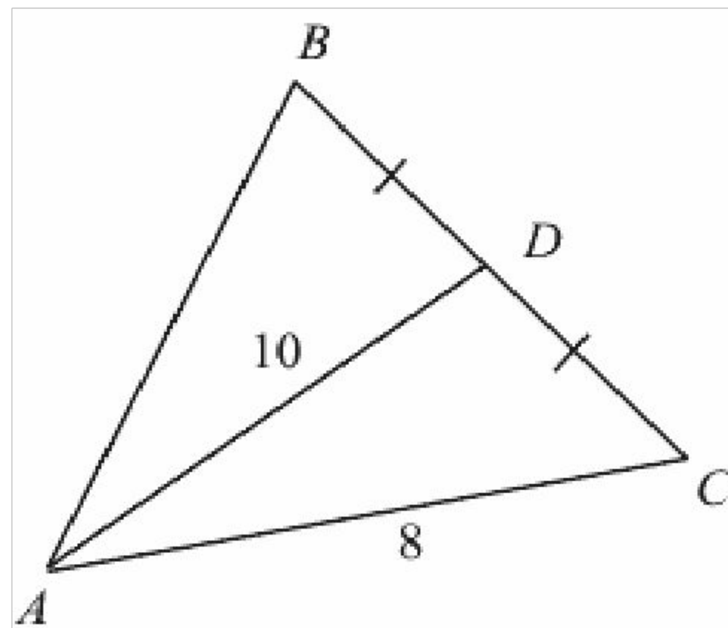
3. Чтобы найти длину стороны *BC,* достаточно знать длину DC, так как *BC* = *2DC.* Длину *DC* можно узнать как в предыдущей задаче, используя тот факт, что медиана делит треугольник на два равновеликих:

$S_{ABD}=S_{ADC}=24$

$24=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 8\cdot\sin\gamma$ s, $\sin\gamma=0.6$,

$\cos a\,\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=0{,}8$

$DC^2=10^2\text{-}2\cdot 10\cdot 8\cdot 0{,}8=36$, DC = 6, BC=12.



Системы задач, составленные методом «снежного кома», могут быть использованы на разных этапах урока.

Цель ***этапа актуализации*** - выделение опорных знаний и приведение их в «боевую» готовность. Зачастую учителя в начале урока пытаются «освежить» опорные знания путем опроса учащихся. Основным средством актуализации знаний учащихся является задача.

Приведем пример:

Пусть на уроке должна изучаться теорема о суммах длин противоположных сторон описанного четырехугольника. Анализируя ее доказательство, замечаем, что в нем используется теорема о равенстве отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки. Учащиеся к этому моменту могут не помнить данной теоремы, поэтому целесообразно предложить им выполнить систему задач:

1.Из точки A к окружности с центром в точке O проведена касательная AB, которая касается окружности в точке B. Найдите величину угла ABO.

2.Из точки A к окружности проведены две касательные, касающиеся окружности в точках B и C. AB = 3. Чему равна длина AC?

3.Прямые AB и AC касаются окружности в точках B и C. Угол BAC равен 70°. Найдите углы ABC и AC B.

Этап создания мотивации. В методической литературе довольно часто встречается утверждение, что мотивировать изучение материала нужно с помощью постановки проблемной задачи. Этот прием наиболее удачен. Для того чтобы учащиеся правильно восприняли предложенную задачу, необходимо осознание ими того, какими знаниями они уже обладают, а каких знаний еще не хватает. Эффективно использование системы задач, когда решение первых задач системы не вызывает у них затруднений, а последняя задача дает четкое представление о необходимости получения новых знаний или умений.

Например, для мотивации изучения теоремы косинусов при решении треугольников можно предложить следующую систему задач.

1.Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 6, а острый угол 60°. Найдите остальные элементы треугольника.

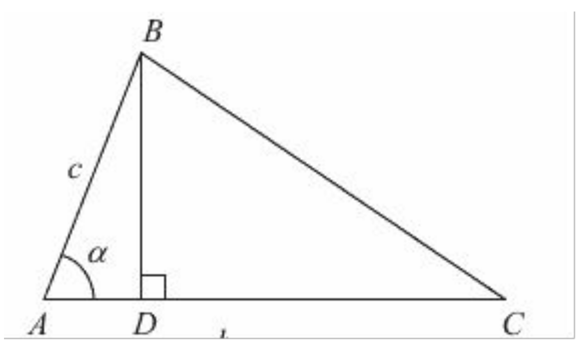
2.Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 12, а угол при основании 30°. Найдите основание треугольника.

3.Дан остроугольный треугольник, две стороны которого равны 4 и 7, а угол между ними равен 45°. Найдите неизвестную сторону треугольника.

3. **На этапе изучения нового материала** целесообразно использовать систему задач, решение которых приводит к идее доказательства теоремы либо к ознакомлению с существенными признаками понятий, а также задач, в процессе решения которых учащиеся самостоятельно «открывают» и формулируют новые теоремы.

Например, сформулируем последнюю рассмотренную задачу в общем виде: «В треугольнике ABC, ∠AB = c , ∠ AC = $в$, BAC =α . Найдите BC» и представим ее требование как систему задач, составленную методом «снежного кома». Тогда постепенное продвижение учащихся от задачи к задаче позволит им самостоятельно открыть новое соотношение между сторонами и углами в треугольнике.

Найдите: 1)AD; 2) DC; 3) BD; 4) BC.



$$AD = c \cdot \cos\alpha,\ \ DC = b - \cos\alpha,$$
$$BD = c \cdot \sin\alpha,\ \ BC^2 = BD^2 + DC^2,$$
$$BC^2 = (c \cdot \sin\alpha)^2 + (b - \cos\alpha)^2,$$
$$BC^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha.$$

4. **Основное назначение системы задач** на этапе формирования умении и навыков - довести знания до полного усвоения и применения их как в стандартных, так и нестандартных условиях.

Рассмотрим следующую систему:

1. Докажите, что отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной около данного треугольника окружности.

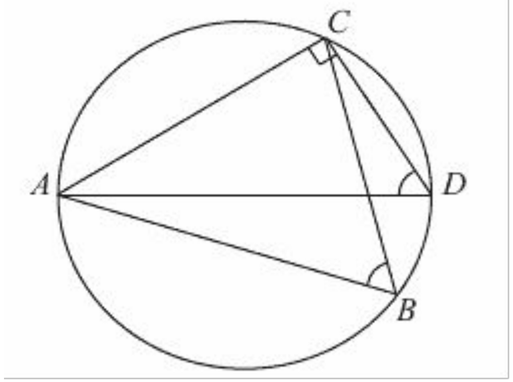
2.Докажите, что площадь треугольника можно вычислить по формуле $S = \frac{abc}{4R}$.

3.Чему равен радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 10см, 10 см и 16 см?

4.Найдите радиус описанной около трапеции окружности, если ее основания равны 10 см и 24 см, а высота 17 см.

Решение: 1.

1. Пусть AD - диаметр описанной около треугольника ABC окружности. По свойству вписанного угла, опирающегося на диаметр,



угол ACD- прямой. ТогдаAD= $\dfrac{AC}{\sin ADC}$

$\angle$ ABC = $\angle$ ADC как вписанные,

опирающиеся на одну дугу AC.

Следовательно, AD = $\dfrac{AC}{\sin ADC}$

Таким образом, отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной около данного треугольника окружности.

2. Площадь треугольника можно вычислить по формуле $S = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$

По доказанному выше утверждению ,откуда $\dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$ $\sin\gamma = \dfrac{c}{2R}$

Подставляя вформулу площади, получим $S = \dfrac{abc}{4R}$.

3. Воспользуемся результатом решения предыдущей задачи R $= \dfrac{a}{4}$ Площадь треугольника найдем по формуле Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

В нашем случае $S = \sqrt{18 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 2} = 48$. Следовательно, $R = \dfrac{10 \cdot 10 \cdot 16}{4 \cdot 48} = 8\dfrac{1}{3}$.

Чтобы использовать формулу, выведенную в предыдущей задаче, рассмотрим треугольник ABD. Найдем его площадь как половину произведения стороны на высоту, проведенную к этой стороне.

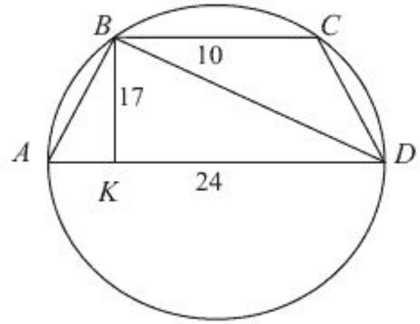
$S_{ABD}=\frac{1}{2}\cdot 24\cdot 17=204$.

Найдем, $AK=\frac{24-10}{2}=7$,

$AB=\sqrt{7^2+17^2}=\sqrt{338}=13\sqrt{2}$, $KD=24-7=1$

$BD=\sqrt{17^2+17^2}=17\sqrt{2}$.

Тогда $R=\frac{17\sqrt{2}\cdot 13\sqrt{2}\cdot 24}{4\cdot 204}=13$.



Как видно из рассмотренных примеров, возможность индивидуальной траектории при решении таких систем задач, возрастание уровня сложности и трудности задач обеспечивают дифференциацию обучения.

Представленные системы задач, являясь сложной задачной конструкцией, соединяющей в себе несколько обыкновенных задач, можно рассматривать как одно из средств реализации концепции укрупнения дидактических единиц в обучении математике, хорошо зарекомендовавшей себя в практике общеобра зовательных школ.

Таким образом, в зависимости от поставленных дидактических целей в учебном процессе на каждом этапе урока могут быть использованы системы задач, построенные методом «снежного кома».