

**Методика использования
систем задач,
сконструированных методом
«снежного кома», на уроках
геометрии.**

Выделим две разновидности «снежного кома»:

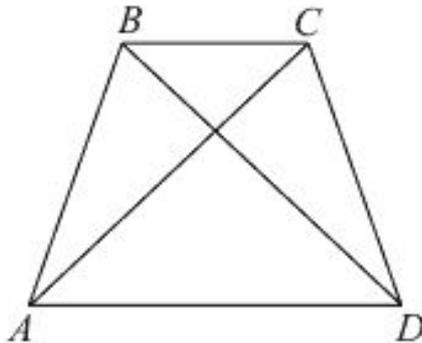
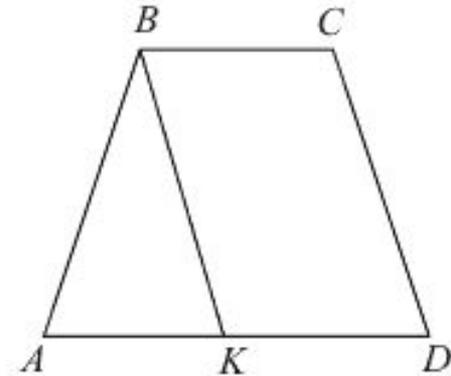
В первом случае идет *использование доказанного утверждения*:

- Докажите, что прямая, проходящая через вершину равнобедренной трапеции параллельно ее боковой стороне, отсекает равнобедренный треугольник.
- Докажите, что у равнобедренной трапеции углы при основании равны.
- Докажите, что у равнобедренной трапеции диагонали равны.
- 4. Докажите, что середины сторон равнобедренной трапеции являются вершинами ромба.

Решение:

1. В равнобокой трапеции $ABCD$ прямая BK параллельна стороне CD . Докажите, что треугольник ABK - равнобедренный. По определению $KBCD$ - параллелограмм. Тогда стороны BK и CD равны. А по условию стороны трапеции AB и CD равны. Следовательно, отрезки AB и BK равны и треугольник ABK - равнобедренный.

2. При решении второй задачи воспользуемся доказанным выше фактом. Для этого проведем прямую BK , параллельную стороне CD равнобокой трапеции $ABCD$. Треугольник ABK - равнобедренный. Тогда $\angle A = \angle K$. А $\angle D = \angle K$ как соответственные при параллельных прямых BK и CD и секущей AD . Следовательно, $\angle A = \angle D$.

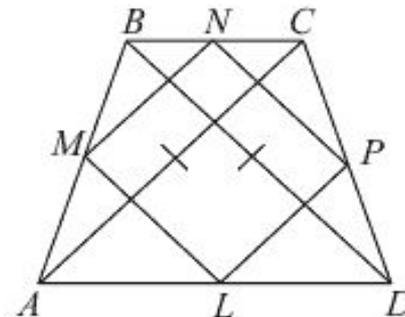


. Чтобы доказать, что у равнобокой трапеции $ABCD$ диагонали AC и BD равны, достаточно доказать равенство треугольников ABD и ACD . Для этого воспользуемся результатом решения предыдущей задачи, что $\angle A = \angle D$. Тогда треугольники ABD и ACD будут равны по двум сторонам и углу между ними.

... и NP - средние линии треугольников ABC и ACD соответственно. Следовательно, они параллельны диагонали AC и равны ее половине. Тогда отрезки MN и PL - параллельны и равны. Следовательно, четырехугольник $MNPL$ - параллелограмм.

Чтобы доказать, что он является ромбом, достаточно показать равенство соседних сторон MN и NP . NP - средняя линия треугольника BCD . Тогда $NP = \frac{1}{2}BD$. По предыдущему

$BD = AC$. Следовательно, $MN = NP$.



Вторая разновидность рассматриваемого метода предполагает *повторение операции предыдущей задачи.*

Например:

- Площадь треугольника равна 100, а две его стороны равны 40 и 10. Найдите угол между этими сторонами.
- Две стороны остроугольного треугольника равны $2\sqrt{2}$ и 3, а площадь этого треугольника равна 3. Найдите третью сторону.
- 3.Площадь треугольника ABC равна 48. найдите сторону BC , если сторона AC равна 8, длина медианы AD равна 10.

Решение:

1. Воспользуемся формулой $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$. Имеем $100 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 40 \sin \gamma$, $\sin \gamma = \frac{1}{2}$, $\gamma = 30$ или $\gamma = 150^\circ$.

2. Найдем угол между известными сторонами треугольника, как это делали в предыдущей задаче:

$$3 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \sin \gamma \cdot \sin \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}, \gamma = 45^\circ \text{ или } \gamma = 135^\circ. \text{ По теореме косинусов}$$

найдем третью сторону: $c^2 = 3^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ$ или

$$c^2 = 3^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \cos 135^\circ. \text{ Отсюда } c = \sqrt{5} \text{ или } c = \sqrt{29}.$$

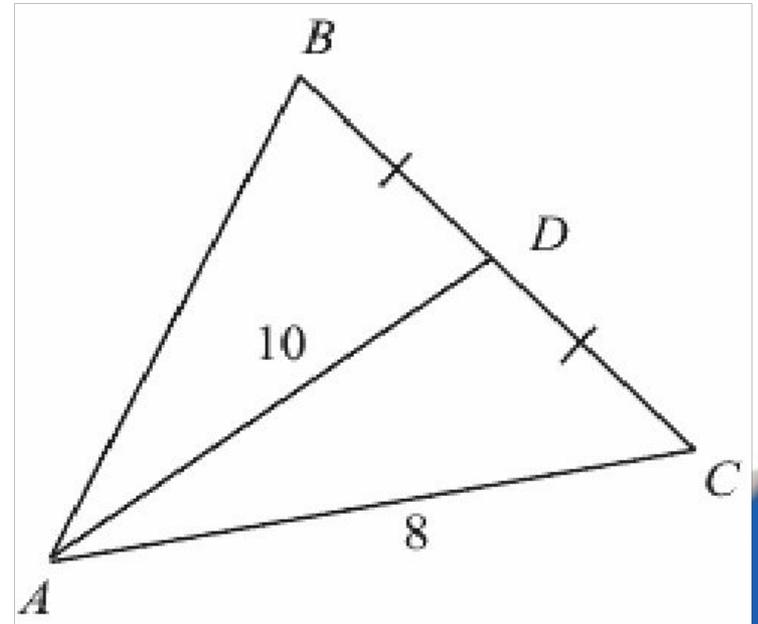
3. Чтобы найти длину стороны BC , достаточно знать длину DC , так как $BC = 2DC$. Длину DC можно узнать как в предыдущей задаче, используя тот факт, что медиана делит треугольник на два равновеликих:

$$S_{ABD} = S_{ADC} = 24$$

$$24 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8 \cdot \sin \gamma, \sin \gamma = 0,6,$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = 0,8$$

$$DC^2 = 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 0,8 = 36, DC = 6, BC = 12.$$



Системы задач, составленные методом «снежного кома», могут быть использованы на разных этапах урока.

Цель *этапа актуализации* - выделение опорных знаний и приведение их в «боевую» готовность. Зачастую учителя в начале урока пытаются «освежить» опорные знания путем опроса учащихся. Основным средством актуализации знаний учащихся является задача.

Приведем пример:

Пусть на уроке должна изучаться теорема о суммах длин противоположных сторон описанного четырехугольника. Анализируя ее доказательство, замечаем, что в нем используется теорема о равенстве отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки. Учащиеся к этому моменту могут не помнить данной теоремы, поэтому целесообразно предложить им выполнить систему задач:

- 1. Из точки A к окружности с центром в точке O проведена касательная AB , которая касается окружности в точке B . Найдите величину угла ABO .*
- 2. Из точки A к окружности проведены две касательные, касающиеся окружности в точках B и C . $AB = 3$. Чему равна длина AC ?*
- 3. Прямые AB и AC касаются окружности в точках B и C . Угол BAC равен 70° . Найдите углы ABC и ACB .*

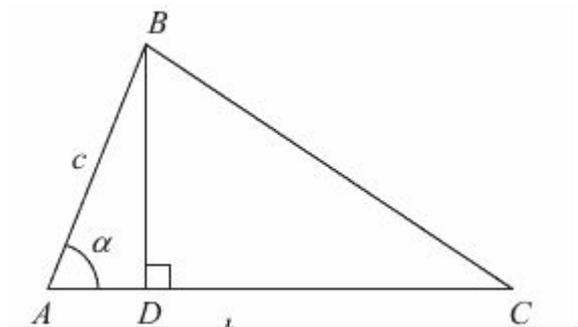
Этап создания мотивации. В методической литературе довольно часто встречается утверждение, что мотивировать изучение материала нужно с помощью постановки проблемной задачи. Этот прием наиболее удачен. Для того чтобы учащиеся правильно восприняли предложенную задачу, необходимо осознание ими того, какими знаниями они уже обладают, а каких знаний еще не хватает. Эффективно использование системы задач, когда решение первых задач системы не вызывает у них затруднений, а последняя задача дает четкое представление о необходимости получения новых знаний или умений. Например, для мотивации изучения теоремы косинусов при решении треугольников можно предложить следующую систему задач.

- 1. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 6, а острый угол 60° . Найдите остальные элементы треугольника.*
- 2. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 12, а угол при основании 30° . Найдите основание треугольника.*
- 3. Дан остроугольный треугольник, две стороны которого равны 4 и 7, а угол между ними равен 45° . Найдите неизвестную сторону треугольника.*

3. На этапе изучения нового материала целесообразно использовать систему задач, решение которых приводит к идее доказательства теоремы либо к ознакомлению с существенными признаками понятий, а также задач, в процессе решения которых учащиеся самостоятельно «открывают» и формулируют новые теоремы.

Например, сформулируем последнюю рассмотренную задачу в общем виде: «В треугольнике ABC , $\angle A = \alpha$, $AB = c$, $AC = b$. Найдите BC » и представим ее требование как систему задач, составленную методом «снежного кома». Тогда постепенное продвижение учащихся от задачи к задаче позволит им самостоятельно открыть новое соотношение между сторонами и углами в треугольнике.

Найдите: 1) AD ; 2) DC ; 3) BD ; 4) BC .



$$\begin{aligned}AD &= c \cdot \cos \alpha, \quad DC = b - c \cdot \cos \alpha, \\BD &= c \cdot \sin \alpha, \quad BC^2 = BD^2 + DC^2, \\BC^2 &= (c \cdot \sin \alpha)^2 + (b - c \cdot \cos \alpha)^2, \\BC^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha.\end{aligned}$$

4. Основное назначение системы задач на этапе формирования умения и навыков - довести знания до полного усвоения и применения их как в стандартных, так и нестандартных условиях.

Рассмотрим следующую систему:

1. Докажите, что отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной около данного треугольника окружности.

2. Докажите, что площадь треугольника можно вычислить по формуле $S = \frac{abc}{4R}$.

3. Чему равен радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 10 см, 10 см и 16 см?

4. Найдите радиус описанной около трапеции окружности, если ее основания равны 10 см и 24 см, а высота 17 см.

Решение: 1.

1. Пусть AD - диаметр описанной около треугольника ABC окружности. По свойству вписанного угла, опирающегося на диаметр,

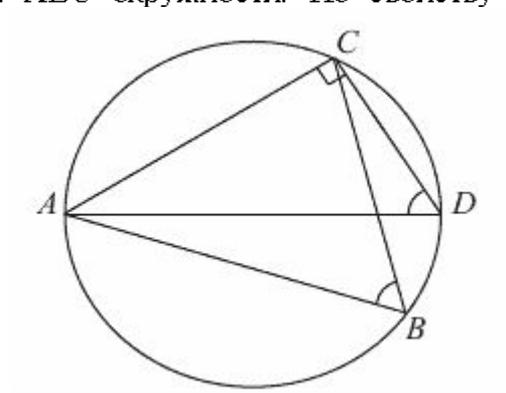
угол ACD - прямой. Тогда $AD = \frac{AC}{\sin \angle ADC}$

$\angle ABC = \angle ADC$ как вписанные,

опирающиеся на одну дугу AC .

Следовательно, $AD = \frac{AC}{\sin \angle ABC}$

Таким образом, отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной около данного треугольника окружности.



2. Площадь треугольника можно вычислить по формуле

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

По доказанному выше утверждению, откуда

$$\frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

$$\sin \gamma = \frac{c}{2R}$$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

Подставляя в формулу площади, получим

3. Воспользуемся результатом решения предыдущей задачи $R = \frac{a}{4}$ Площадь треугольника найдем по формуле Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

В нашем случае $S = \sqrt{18 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 2} = 48$. Следовательно, $R = \frac{10 \cdot 10 \cdot 16}{4 \cdot 48} = 8 \frac{1}{3}$.

Чтобы использовать формулу, выведенную в предыдущей задаче, рассмотрим треугольник ABD. Найдем его площадь как половину произведения стороны на высоту, проведенную к этой стороне.

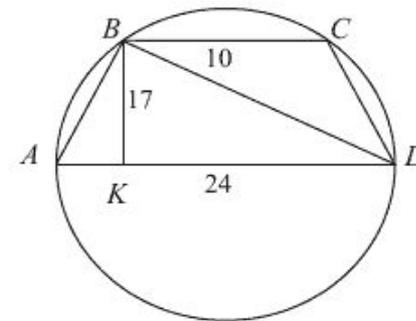
$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 17 = 204.$$

$$\text{Найдем, } AK = \frac{24 - 10}{2} = 7,$$

$$AB = \sqrt{7^2 + 17^2} = \sqrt{338} = 13\sqrt{2}, \quad KD = 24 - 7 = 17$$

$$BD = \sqrt{17^2 + 17^2} = 17\sqrt{2}.$$

$$\text{Тогда } R = \frac{17\sqrt{2} \cdot 13\sqrt{2} \cdot 24}{4 \cdot 204} = 13.$$



Как видно из рассмотренных примеров, возможность индивидуальной траектории при решении таких систем задач, возрастание уровня сложности и трудности задач обеспечивают дифференциацию обучения.

Представленные системы задач, являясь сложной задачей конструкцией, соединяющей в себе несколько обыкновенных задач, можно рассматривать как одно из средств реализации концепции укрупнения дидактических единиц в обучении математике, хорошо зарекомендовавшей себя в практике общеобразовательных школ.

Таким образом, в зависимости от поставленных дидактических целей в учебном процессе на каждом этапе урока могут быть использованы системы задач, построенные методом «снежного кома».