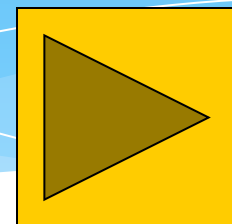


**Проект по математике.**

**Автор проекта:**

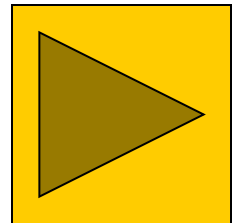
**Красноперова Л.А.**

**Белгород 2014.**



# Тема проекта:

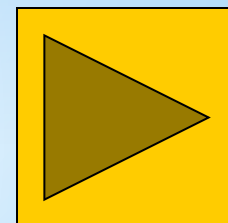
Иррациональные  
уравнения в школьном  
курсе математики. Методы  
решения.



# \* Актуальность темы

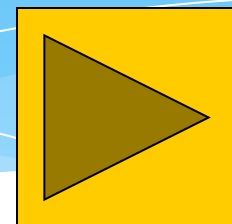
**Материал, связанный с уравнениями, составляет значительную часть школьного курса математики. Однако в школе иррациональным уравнениям уделяется достаточно мало внимания, но задания по теме "Иррациональные уравнения" встречаются на ЕГЭ, и они могут стать "камнем преткновения" для выпускников.**

**Так как при решении иррациональных уравнений в школе применяются тождественные преобразования, то чаще всего возникают ошибки, которые обычно связаны с потерей или приобретением посторонних корней в процессе решения. Поэтому необходимо рассмотреть такие ситуации, показать, как их распознавать и как с ними можно бороться.**



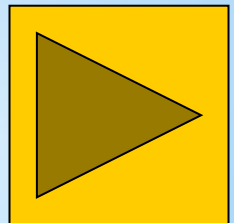
# Цель проекта.

Разработать методику обучения решению иррациональных уравнений в школе, а также выявить возможности использования общих методов решения уравнений при решении иррациональных уравнений.



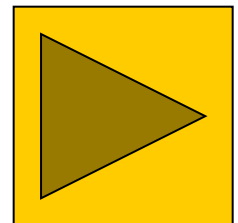
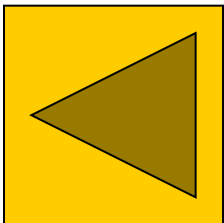
# \* Задачи проекта!

- Подобрать теоретический материал, связанный с равносильностью уравнений, равносильностью преобразований, методами решения иррациональных уравнений;
- Показать, как общие методы решения уравнений применимы для решения иррациональных уравнений;
- Подобрать примеры решения иррациональных уравнений демонстрации излагаемой теории.



# Содержание

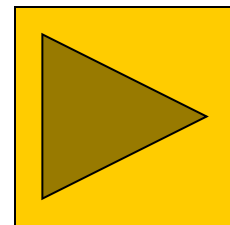
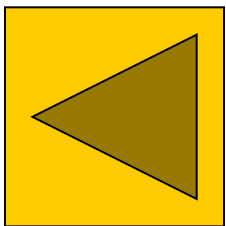
1. [Эпиграф.](#)
2. [Определение иррациональных уравнений.](#)
3. [Упражнения на распознавание видов уравнений.](#)
4. [Работаем устно.](#)
5. [Методы решения.](#)
6. [Графический метод.](#)
7. [Функционально-графический метод.](#)
8. [Решите уравнения.](#)
9. Возведение в степень ([алгоритм 1](#)).
10. [Алгоритм 2.](#)
11. [Пример](#) по алгоритму 1.
12. [Пример](#) по алгоритму 2.
13. [Специальные](#) методы решения уравнений.
14. Справка по [ОДЗ](#).
15. Справка. [Корень n-й степени.](#)
16. Справка. [Модуль.](#)



*Именно математика  
дает надежнейшие правила:  
кто им следует – тому  
не опасен обман чувств.*



*Л. Эйлер*

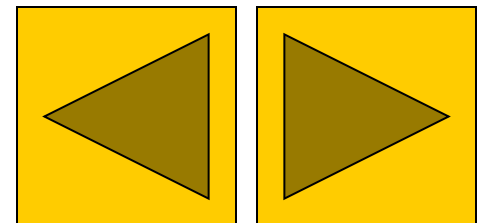


# *Определение*

*Иррациональное уравнение* –  
уравнение, содержащее  
переменную под знаком  
корня (радикала).

*(примеры)*

*(справка)*





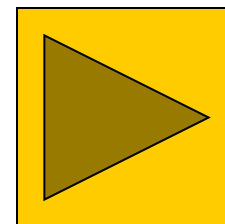
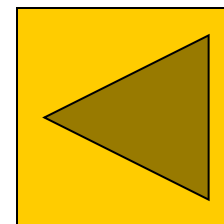
# *Какие из данных уравнений являются иррациональными?*

1.  $\frac{x}{\sqrt{2}-1} + 3x^2 = 4$

2.  $3x - \sqrt[3]{7} = 0$

3.  $\sqrt{x-1} = x-3$

4.  $2^{\sqrt{x}} = 2^x$



# Работаем устно

1)  $\sqrt[3]{x} = 2;$

2)  $\sqrt{x-1} = 2;$

3)  $\sqrt[3]{x} = 0;$

4)  $\sqrt{2-x} = 0;$

5)  $\sqrt[4]{-x} = -1$

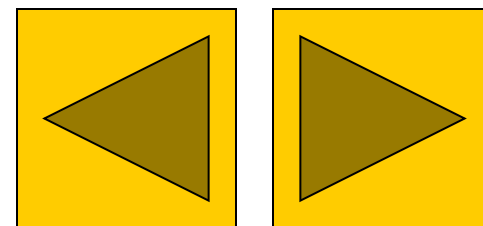
6)  $\sqrt[8]{2x} = 1$

7)  $\sqrt{x-2} = -\sqrt{2};$

8)  $\sqrt[4]{-5-x^2} = 25;$

9)  $\sqrt{x} + \sqrt{2x-3} = -2;$

10)  $\sqrt{2-x} + 0,01 = 0.$



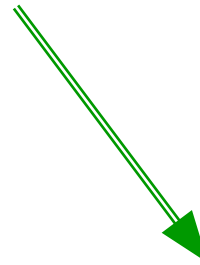
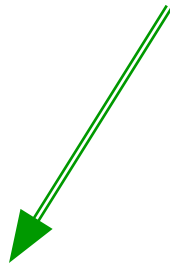
# Методы решения

Графический

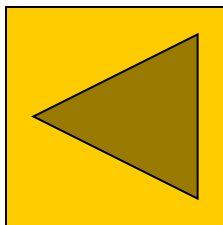
(Функционально-  
графический)

Основные  
алгебраические

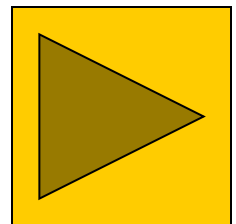
Специальные



- **Возведение обеих частей уравнения в степень**  
(подробнее)



- **Переход к равносильной системе**  
(подробнее)

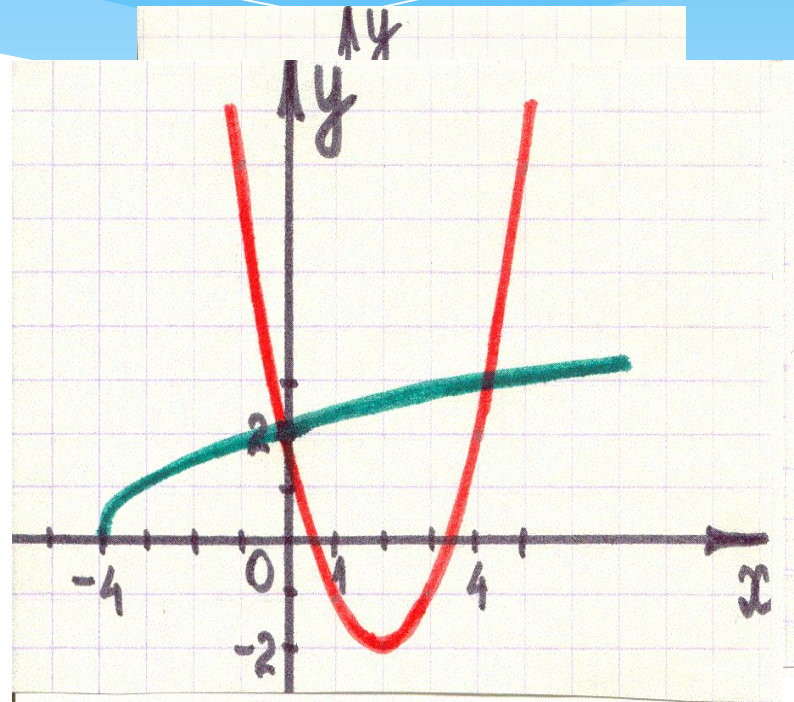


# Графический метод (пример 1)

\* Решите графически уравнение

$$\sqrt{x+4} = x^2 - 4x + 2$$

- 1) Строим график  $y = \sqrt{x+4}$ .
- 2) Строим график  $y = x^2 - 4x + 2$  в той же системе координат.
- 3) Находим абсциссы точек Пересечения графиков (значения берутся приближенно).
- 4) Записываем ответ.



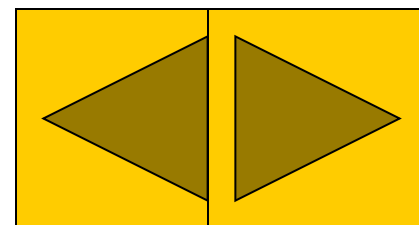
Ответ.  $x=0$ ;  $x=4,2$ .

# Функционально-графический метод

Пример: решите уравнение  $\sqrt{x+7} = 5-x$

*Решение.*

1.  $f(x) = \sqrt{x+7}$  - возрастает на  $D(f)$ .
  2.  $g(x) = 5-x$ , убывает на  $D(g)$ .
  3. Уравнение  $f(x) = g(x)$  имеет не более одного корня.
  4. Подбором находим, что  $x=2$ .
- Ответ. 2.



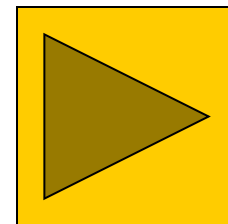
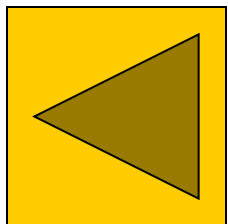
# Решите уравнения

1)  $\sqrt[3]{3x-1} = x-1,$       [\(алгоритм 2\)](#)

2)  $\sqrt{3-3x} = x-1.$       [\(алгоритм 1\)](#)

3)  $\sqrt{x^2 + 2x + 10} = 2x - 1$

[\(алгоритм\)](#)

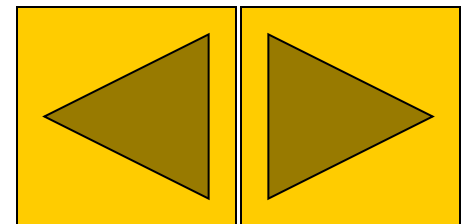


# Алгоритм 1

При  $n$  – четном

1. **Уедини** корень (если необходимо);
2. Возведи обе части уравнения в степень  $n$ ;
3. Если необходимо, то выполни п.1;
4. Реши полученное уравнение;
5. Выполни **проверку!**
6. Запиши ответ.

(к методам)

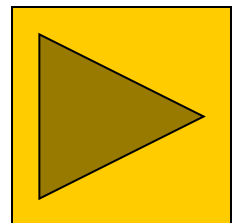
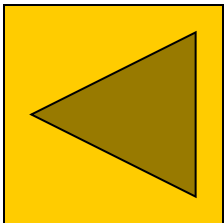


# Алгоритм 2

## При $n$ - нечетном

1. **Уедини** корень (если необходимо);
2. Возведи обе части уравнения в степень  $n$ ;
3. Если необходимо, то выполни п.1;
4. Реши полученное уравнение;
5. Запиши ответ.

[\(к методам\)](#)





## Возведение в степень

$$* \sqrt{3 - 3x} = x - 1$$

**Решение.** Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$3 - 3x = x^2 - 2x + 1$$

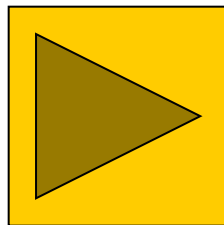
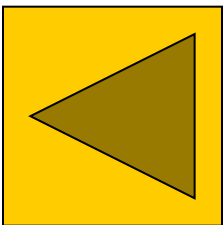
Преобразуем:  $x^2 + x - 2 = 0$

$$x = 1, \quad x = -2$$

**Проверка.** Если  $x=1$ , то в левой части 0, в правой части 0,  
 $0=0$  (верно).

Если  $x=-2$ , то в левой части 3, в правой части -3,  
3 не равно -3, значит, -2 не является корнем.

**Ответ.** 1.



# Возведение в степень

$$\ast \quad \sqrt[3]{3x-1} = x-1$$

Решение. Возведем обе части уравнения в 3-ю степень:

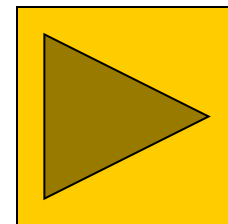
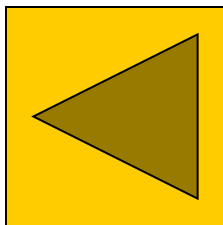
$$3x-1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

Преобразуем:  $x^3 - 3x^2 = 0$

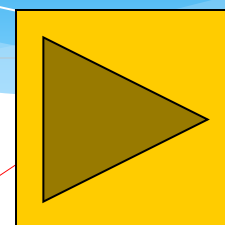
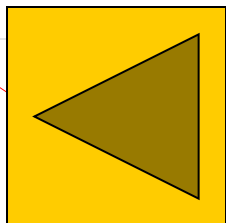
$$x^2(x-3) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{или} \quad x = 3$$

Ответ. 0 ; 3.



# Переход к равносильной системе



1. Определить условия (если  $n$  –четно), при которых обе части уравнения неотрицательны;
2. Возвести обе части уравнения в  $n$ -ю степень;
3. Составить систему из уравнения и неравенства;
4. Решить систему;
5. Записать ответ.

---

Определение.  $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x)$ , что 1)  $g(x) \geq 0$ ,

$$2) g^{2n}(x) = f(x).$$

# Переход к равносильной системе

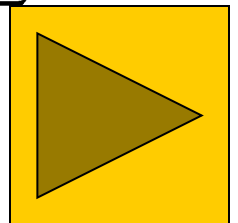
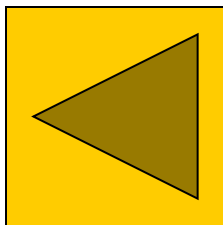
$$* \quad \sqrt{x^2 + 2x + 10} = 2x - 1$$

Решение. Перейдем к равносильной системе

$$\begin{cases} 2x - 1 \geq 0, \\ x^2 + 2x + 10 = 4x^2 - 4x = 1; \\ \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0, \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Откуда  $x=3$ .

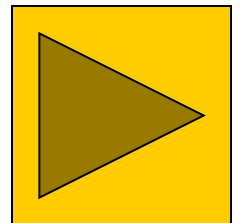
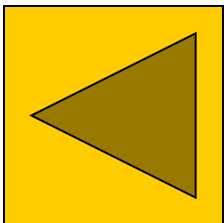
Ответ. 3.



# Специальные методы решения

(справка)

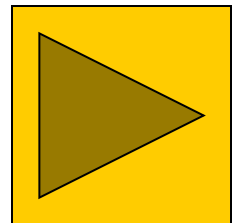
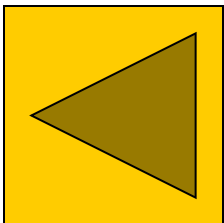
- \* Метод пристального взгляда (справка)
- \* Найди ОДЗ
- \* Выполни замену
- \* Умножай на сопряженное
- \* Переходи к модулю (справка)
- \* Оцени обе части уравнения



# Область определения уравнения (ОДЗ) –

**это все значения переменной, при  
которых данное уравнение имеет смысл.**

*Замечание. Если **ОДЗ** уравнения есть  
пустое множество, то говорят, что  
данное уравнение не определено на  
множестве  $R$  и решений заведомо быть  
не может.*



# Справка

• Корень  $n$ -й степени из  $a$  ( $\sqrt[n]{a}$ ) - это такое число  $b$ , что  $b^n = a$

• Арифметический корень  $n$ -й степени:

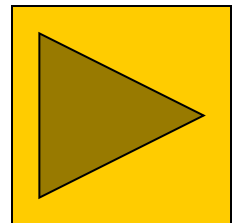
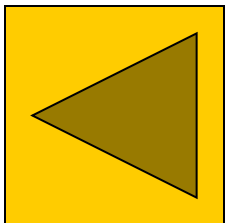
$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ что } 1) b \geq 0, \quad 2) b^n = a.$$

---

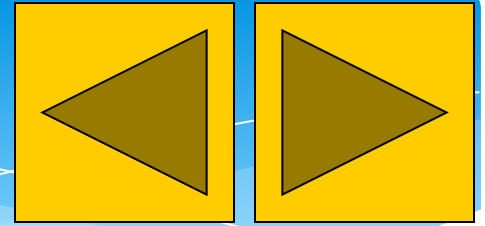
$$\sqrt[n]{a^n} = a, \text{ } n - \text{нечетно,}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|, \text{ } n - \text{четно,}$$

$$(\sqrt[n]{a})^n = a, \text{ } n - \text{любое.}$$

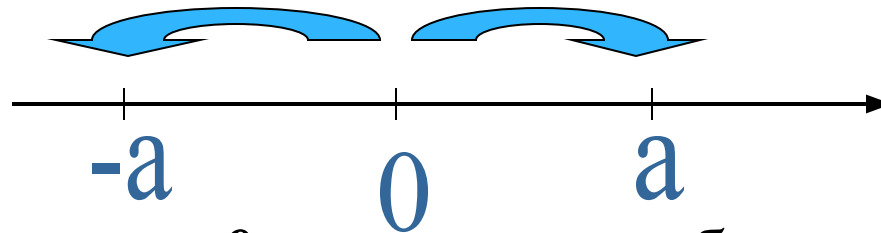


# Справка



Модуль числа:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ 0, & \text{если } a = 0, \\ -a, & \text{если } a \leq 0. \end{cases}$$



Расстояние от  $0$  до точки, изображающей  $a$  на  
числовой оси



## Источники:

---

- ▶ А. Н. Колмогоров «Алгебра и начала анализа: учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений».
- ▶ В. С. Крамор, К. Н. Лунгу, А. К. Лунгу. «Математика: Типовые примеры на вступительных экзаменах. Пособие для старшеклассников и абитуриентов».
- ▶ Э. Н. Балаян «Практикум по решению задач. Иррациональные уравнения, неравенства и системы».
- ▶ Л. О. Денищева, Е. М. Бойченко, Ю. А. Глазков и др. «Готовимся к Единому Государственному экзамену. Математика».
- ▶ Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2010»



\* *Спасибо за внимание.*

