Тема: «Определители»

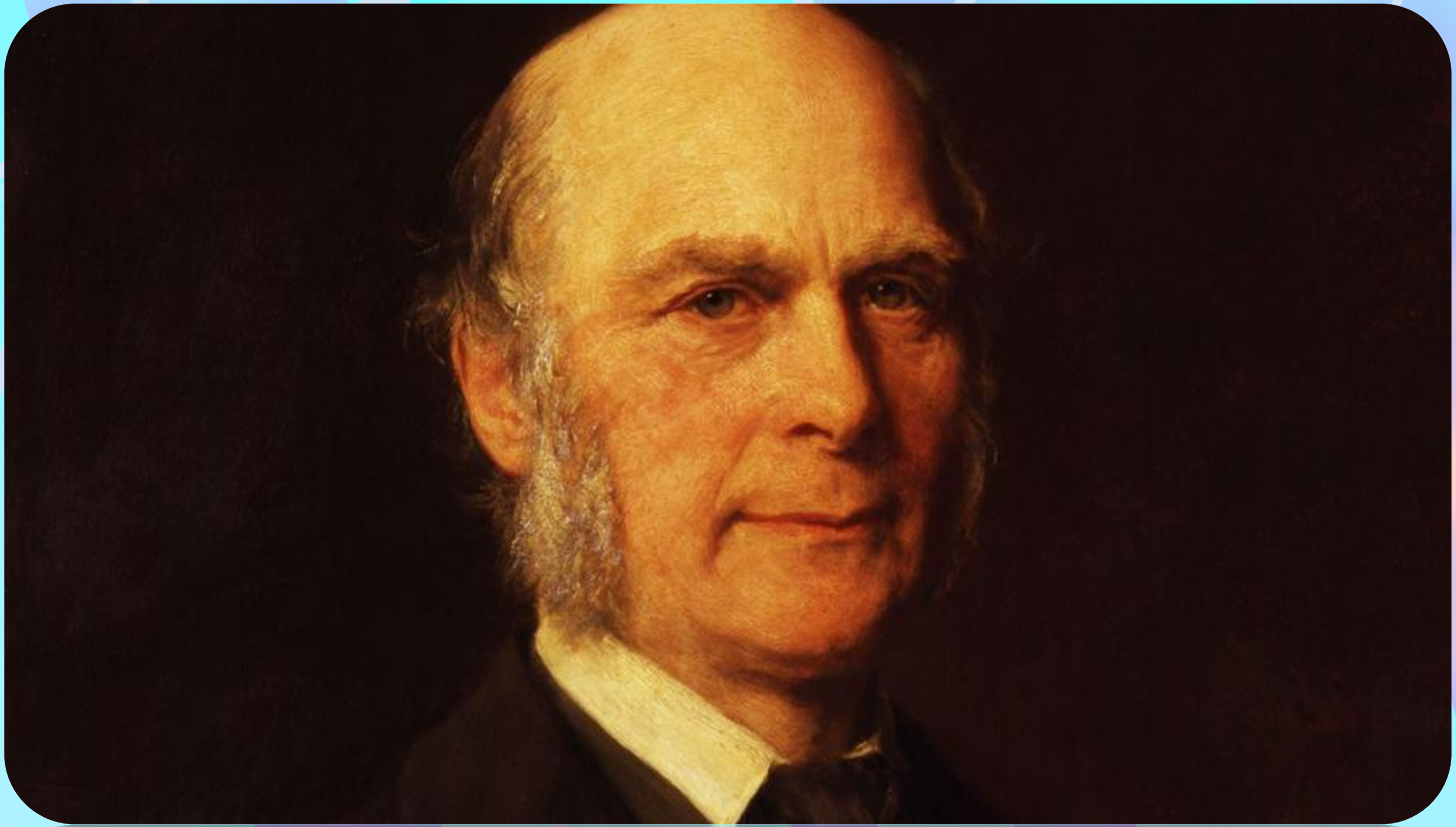
Подготовили студентки гр.БУ-23
Сандулова Надежда и Самбур Виктория

ГПОУ «Амвросиевский индустриально-экономический колледж», 2016 г.

В ходе решения задач по высшей математике очень часто возникает необходимость ***вычислить определитель матрицы****. Определитель матрицы используется в линейной алгебре, аналитической геометрии, математическом анализе, поэтому без навыка решения определителей просто не обойтись.*

Цель работы: *повторить правила и определить возможности упрощения вычислений определителей порядка выше третьего.*

«Где это возможно, считайте!»



Фрэнсис Гальтон (16.02.1822 – 17.01.1911)

английский исследователь, географ, психолог

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ

Определитель – это число, характеризующее квадратную матрицу.

Обозначается: $|A|$, Δ, $\det A$

Определителем **первого порядка** матрицы $A=(a_{11})$ называется число a_{11}, то есть:

$$\boxed{|A| = |a_{11}| = a_{11}}$$

Определителем **второго порядка** матрицы А называется число, которое определяется по правилу:

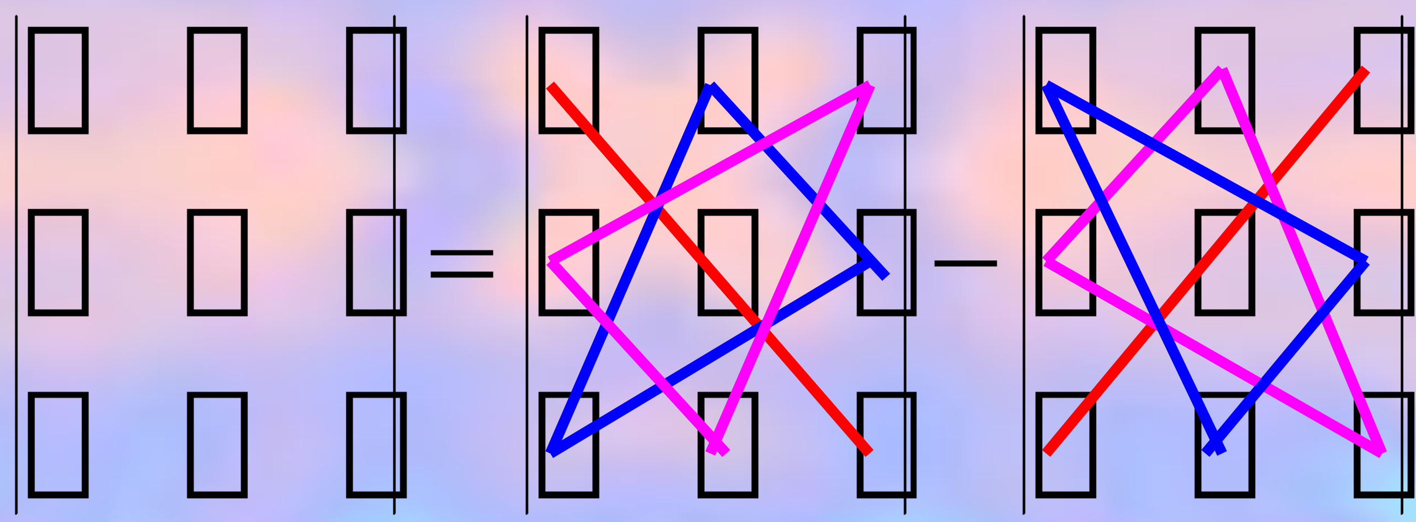
$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}}$$

<u>Определителем третьего порядка</u> называется число, которое определяется по правилу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

Для вычисления определителей третьего порядка удобно пользоваться <u>правилом треугольников:</u>



Пример **Вычислить определители матриц**:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - (-3) \cdot 2 = 11$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = 5$$

<u>Минором</u> некоторого элемента определителя называется определитель, полученный из исходного вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.

Минор элемента определителя a_{ij} обозначается как M_{ij}

<u>Алгебраическим дополнением</u> некоторого элемента определителя называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^S$, где S – сумма номеров строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^S M_{ij} \qquad S = i + j}$$

В частности, минор элемента a_{11}

определителя третьего порядка найдется по правилу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Его алгебраическое дополнение:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11}$$

Теорема о вычислении определителя
(теорема Лапласа)

Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения

Пусть задан $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, *тогда*

$$\det A = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$$

ПРИМЕЧАНИЯ

1.Обычно выбирают ту строку или столбец, в котором есть нули.

2. В подавляющем большинстве случаев определители требуется раскрывать именно с использованием теоремы Лапласа

Пример

Вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Решение:

Раскладываем определитель по третьей строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{31} + 1 \cdot A_{32} + 1 \cdot A_{33} + 0 \cdot A_{34} = A_{32} + A_{33} \quad =$$

Находим алгебраические дополнения:

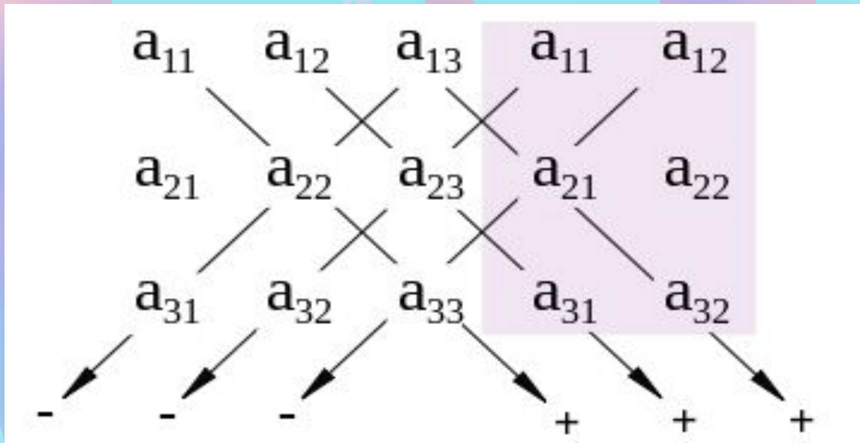
$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -(3 + 6 + 16 - 24 - 3 - 4) = 6$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 4 + 12 - 16 - 2 - 3 = -3$$

Подставляем полученный результат: $= \quad 6 + (-3) = 3$

Правило Саррюса

Первые два столбца матрицы записываются справа возле матрицы. Произведения элементов, стоящих на линиях с пометкой «плюс», складываются, затем из результата вычитаются произведения элементов, находящихся на линиях с пометкой «минус»



Свойства определителей

1

Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы.

$$\boxed{|A| = |A^T|}$$

Например:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$|B^T| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2+2-1-1+4-1=5$$

2 ***Перестановка двух строк или столбцов определителя эквивалентна умножению его на (-1).***

Например:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

Меняем местами первую и вторую строки:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 1 + 1 + 1 - 2 - 2 = -5$$

3

Если определитель имеет две одинаковые строки или столбца, то он равен нулю.

Например:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 + 12 - 12 - 4 + 4 = 0$$

4

Общий множитель строки или столбца можно выносить за знак определителя.

Например:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2 + 2 - 2 + 4 - 2 = 4$$

Выносим из второй строки множитель 2:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (2 - 1 + 1 - 1 + 2 - 1) = 2 \cdot 2 = 4$$

5 **Определитель не изменится, если к элементам одной строки или столбца прибавить соответственные элемент другой строки или столбца, умноженные на одно и то же число.**

Например:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

Первую строку умножаем на 2 и складываем со второй:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 3 + 4 + 1 + 8 - 3 = 5$$

Потренироваться, раскрыть, провести расчёты — это очень хорошо и полезно. Но сколько времени вы потратите на большой определитель? Нельзя ли как-нибудь быстрее и надёжнее?

Оказывается, время, которое потратится на вычисления определителя, зависит от вашего опыта и от знаний свойств определителей.

Рациональные приёмы, упрощающие вычисления:

– треугольный определитель равен произведению чисел его главной диагонали;

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot (-3) = 6$$

– чтобы избавиться от «минуса» перед определителем, рациональнее поменять местами любые две строки или любые два столбца.

$$-\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 6 \\ 9 & 1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \\ 9 & 1 & 8 \end{vmatrix} = \ldots$$

– определитель выгоднее раскрывать по ТОЙ строке(столбцу), где нулей побольше и числа поменьше.

Возникает вопрос, а нельзя ли нули организовать специально с помощью какого-нибудь преобразования? Можно!
Ещё один очень мощный способ —
Понижение порядка определителя

Норберт Винер,
(26.11.1894 – 18.03.1964)

«Едва ли кто-нибудь из нематематиков в состоянии освоиться с мыслью, что цифры могут представлять собой культурную или эстетическую ценность, или иметь какое-нибудь отношение к таким понятиям, как красота, сила, вдохновение. Я решительно протестую против этого косного представления о математике. Математика — один из видов искусства.»

Подводя итоги мы можем с уверенностью сказать, что мы научились вычислять определители разных порядков , повторили правила и возможности упрощения вычислений определителей порядка выше третьего.