Решение прикладных задач с помощью интегрального исчисления

интегральное исчисление

неопределенный интеграл

(первообразная)

Ньютон

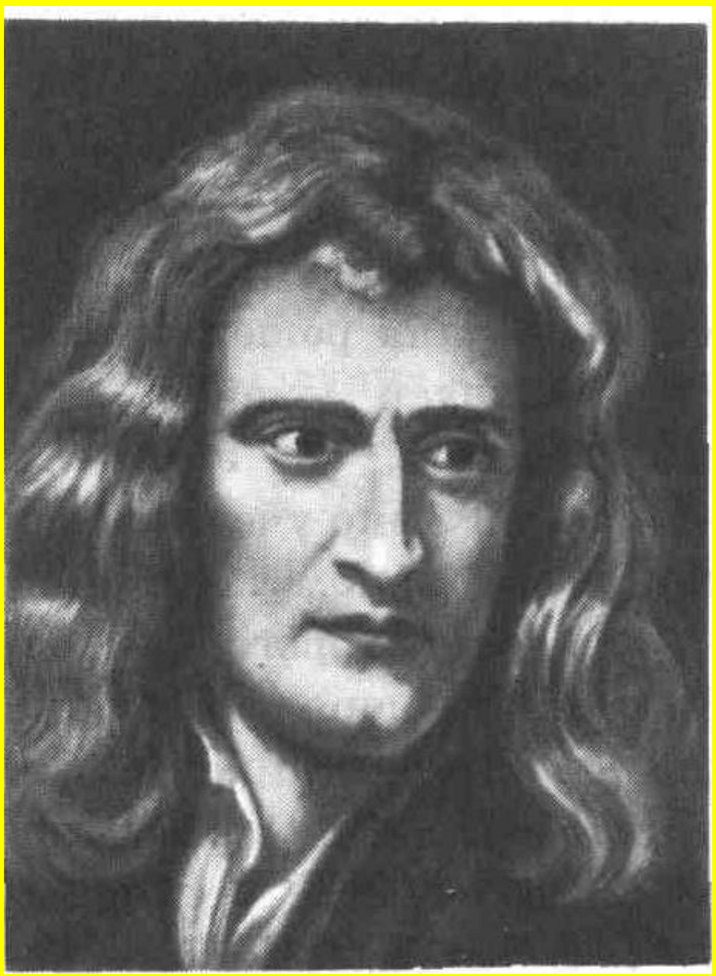
определенный интеграл

(площадь криволинейной фигуры)

Лейбниц

$$S=\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

Исаак Ньютон (1643-1727)



Разумом он превосходил род человеческий

Лукреций

Лейбниц Готфрид Вильгельм (1646-1716)

«Общее искусство знаков представляет чудесное пособие, так как оно разгружает воображение… Следует заботиться о том, чтобы обозначения были удобны для открытий. Обозначения коротко выражают и отображают сущность вещей. Тогда поразительным образом сокращается работа мысли».

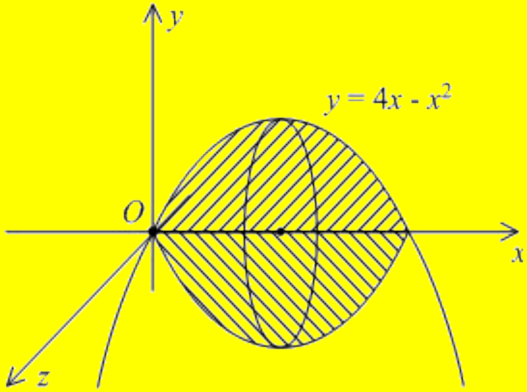
Лейбниц

Задача о нахождении объёма тела

Найдём объём тела, ограниченного поверхностью вращения линии $y = 4x - x^2$ вокруг оси Ox (при $0 \leqslant x \leqslant 4$).

Для вычисления объёма тела вращения применим формулу:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx.$$



Имеем:

$$V = \pi \int_0^4 (4x - x^2)^2 \, dx = \pi \int_0^4 (16x^2 - 8x^3 + x^4) \, dx = \pi \Big(16 \cdot \frac{x^3}{3} - 8 \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\Big)\Big|_0^4 =$$

$$= \pi\Big(\frac{16}{3} \cdot 4^3 - 2 \cdot 4^4 + \frac{1}{5} \cdot 4^5\Big) = \pi\Big(\frac{1024}{3} - 512 + \frac{1024}{5}\Big) = 1024\pi\Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\Big) = \frac{512\pi}{15}.$$

Физические приложения определенного интеграла

А) Вычисление работы движущегося тела

Б) Вычисление перемещения движущегося тела

В) Вычисление массы тела

Г) Вычисление электрического заряда в проводнике под напряжением

Схема решения физических задач с использованием определенного интеграла

А) сделать чертеж, соответствующий условию задачи,

Б) выбрать систему координат,

В) выбрать независимую переменную,

Г) выбрать формулу классической физики, соответствующую условию задачи,

Д) найти дифференциал искомой величины на основании этой формулы,

Е) установить промежуток интегрирования,

Ж) вычислить интеграл, т.е. найти искомую величину.

Величины	Соотношение в дифференциалах	Вычисление производной	Вычисление интеграла
A– работа F– сила N– мощность	$dA=F(x)dx$ $dA=N(t)dt$	$F(x)=\frac{dA}{dx}$ $N(t)=\frac{dA}{dt}$	$A=\int_{x_1}^{x_2}F(x)dx$ $A=\int_{t_1}^{t_2}N(t)dt$
m– масса тонкого стержня ρ– линейная плотность	$dm=\rho(x)dx$	$\rho(x)=\frac{dm}{dx}$	$m=\int_{x_1}^{x_2}\rho(x)dx$
q–электрический заряд I– сила тока	$dq=I(t)dt$	$I(t)=\frac{dq}{dt}$	$q=\int_{t_1}^{t_2}I(t)dt$
s– перемещение v– скорость	$ds=V(t)dt$	$v(t)=\frac{ds}{dt}$	$s=\int_{t_1}^{t_2}v(t)dt$
Q– количество теплоты c– теплоемкость	$dQ=c(t)dt$	$c(t)=\frac{dQ}{dt}$	$Q=\int_{t_1}^{t_2}c(t)dt$

Пример 1. Нахождение пути по заданной скорости.

Пусть точка движется со скоростью V(t). Нужно найти путь s, пройденный точкой от момента t=a до момента t=b. Обозначим s(t) путь, пройденный точкой за время t от момента a. Тогда s'(t)=V(t), т.е. s(t) – первообразная для функции V(t). Поэтому по формуле Ньютона - Лейбница найдём:

$$s=\int_a^b V(t)dt.$$

Например, если точка движется со скоростью V(t)=2t+1(м/с), то путь, пройденный точкой за первые 10 с, по формуле равен

$$S=\int^{10} (2t+1)dt = (t^2 + t)\big|^{10} = 110(м)$$

Пример 2. Задача о вычислении работы переменной силы.

Пусть тело, рассматриваемое как материальная точка, движется по оси O_x под действием силы F (x), направленной вдоль оси O_x. Вычислим работу силы при перемещении тела из точки x=a в точку x=b.

Пусть A (x) – работа данной силы при перемещении тела из точки a в точку x. При малом h силу F на отрезке можно считать постоянной и равной F (x). Поэтому A (x + h) – A (x) =F (x)h, т.е. :

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} = F(x)$$

Устремляя h к нулю, получаем, что A′ (x) = F (x), т.е. A (x) – первообразная для функции F (x). По формуле Ньютона – Лейбница получаем

$$A(b) = \int_a^b F(x)\,dx, \text{ так как } A(a) = 0$$

Итак, работа силы F (x) при перемещении тела из точки a в точку b равна:

$$A(b) = \int_a^b F(x)\,dx$$

Пример 3

Капля с начальной массой *M* падает под действием силы тяжести и равномерно испаряется, теряя массу *m*. Какова работа силы тяжести за время падения до полного испарения?

Проведем ось t с началом в начальной точке движения капли, по которой будем отсчитывать время. Пусть M– начальная масса капли, m– масса воды, испаряющейся в единицу времени, тогда капля движется по закону $m(t)= M - mt$. К концу движения $m=0$, отсюда $t = \frac{M}{m}$. Обозначим работу, затраченную за это время $A(t)$. Выберем малый промежуток времени Δt, на котором массу и путь можно считать постоянными.

Работа вычисляется по формуле

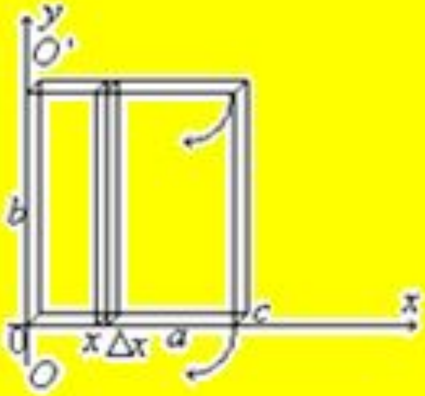
$A=Fs$, в которой $F= mg$, $s = \frac{gt^2}{2}$. $dA = dFds$, отсюда:

$$A=\int_0^{\frac{M}{m}} F(t)ds=\int_0^{\frac{M}{m}} F(t)gtdt=\int_0^{\frac{M}{m}}(M-mt)g^2tdt=g^2\int_0^{\frac{M}{m}}(M-mt)tdt=$$

$$=g^2\int_0^{\frac{M}{m}}(Mt-mt^2)dt=g^2\left(\frac{Mt^2}{2}-\frac{mt^3}{3}\right)\Big|_0^{\frac{M}{m}}=g^2\left[\frac{M^3}{2m^2}-\frac{M^3}{3m^2}\right]=\frac{1}{6}\frac{M^3}{m^2}g^2 \text{ (Дж)}$$

Ответ: $\frac{1}{6}\frac{M^3}{m^2}g^2$ Дж.

Пример 4.Вычисление кинетической энергии



Проведем оси x и y. Кинетическая энергия вычисляется по формуле $E=\frac{mv^2}{2}$.

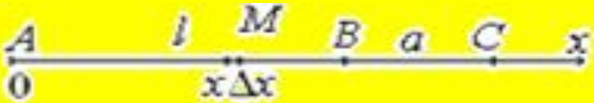
Массу будем считать как $m(x)=\gamma V$, где γ - плотность пластины. $V=bc\Delta x$, $v=\omega r, r=x \Rightarrow v=\omega x$, отсюда,

$dE=\frac{\gamma bcdx\omega^2 x^2}{2}$, следовательно:

$$E=\int_0^a \frac{\gamma bc\omega^2}{2}x^2dx=\frac{\gamma bc\omega^2}{2}\int_0^a x^2dx=\frac{\gamma bc\omega^2}{2}\frac{x^3}{3}\Bigg|_1^a=\frac{\gamma bc\omega^2}{6}a^3(Дж)$$

Ответ: $\frac{\gamma bc\omega^2}{6}a^3 Дж$

Пример 5.Нахождение силы.



Для нахождения силы взаимодействия стержня и точки воспользуемся законом $F=\gamma\frac{m_1m_2}{r_{12}^2}$. Из соотношения $\frac{M}{m}=\frac{l}{\Delta x}$, получим, что

$m=\frac{M}{l}\Delta x$, отсюда $dF=\gamma\frac{\frac{M}{l}\Delta xm}{(a+l-x)^2}=\frac{\gamma Mm}{l(a+l-x)^2}\Delta x$.

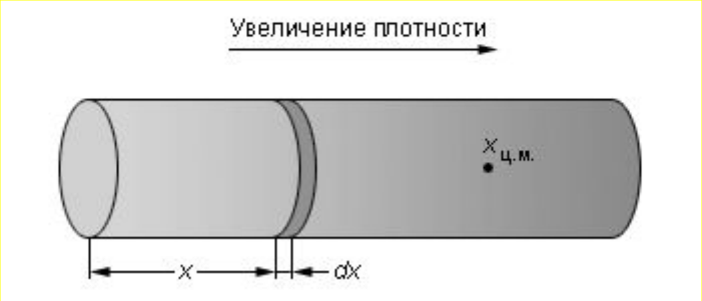
$$F=\int_0^l\gamma\frac{Mm}{l(a+l-x)^2}dx=\frac{\gamma Mm}{l}\int_0^l\frac{dx}{(a+l-x)^2}=\frac{\gamma Mm}{l}\int_0^l\frac{d(a+l-x)}{(a+l-x)^2}=$$

$$=\frac{\gamma Mm}{l}\frac{1}{a+l-x}\Bigg|_0^l=\frac{\gamma Mm}{l}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+l}\right)=\frac{\gamma Mm}{l}\frac{l}{a(a+l)}=\frac{\gamma Mm}{a(a+l)}(H)$$

Ответ: $\frac{\gamma Mm}{a(a+l)}H.$

Масса стержня

Пусть плотность ρ (x) стержня с **постоянным** сечением S зависит от расстояния до начала стержня. Тогда масса стержня будет равна:



$$M = S\int_0^L \rho(x)dx,$$

где L – длина стержня, а центр масс стержня находится на расстоянии:

$$x_0 = \frac{\int_M x\,dm}{M} = \frac{\int_0^L x\rho(x)dx}{\int_0^L \rho(x)dx}.$$