

Решение прикладных задач с помощью интегрального исчисления



ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

неопределенный интеграл
(первообразная)

НЬЮТОН

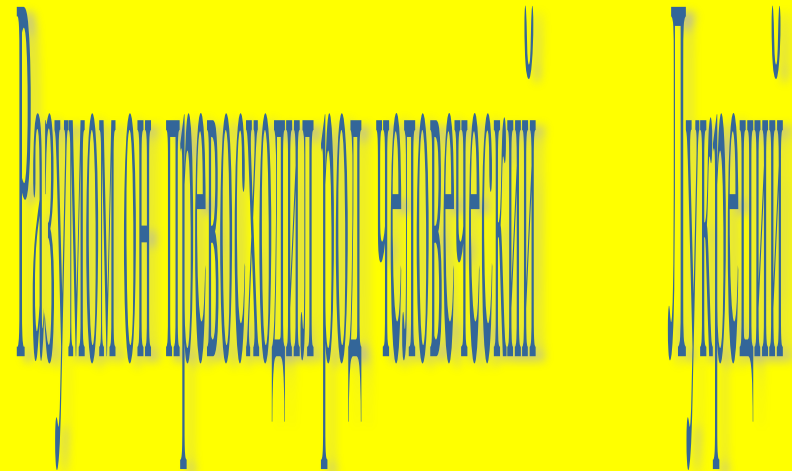
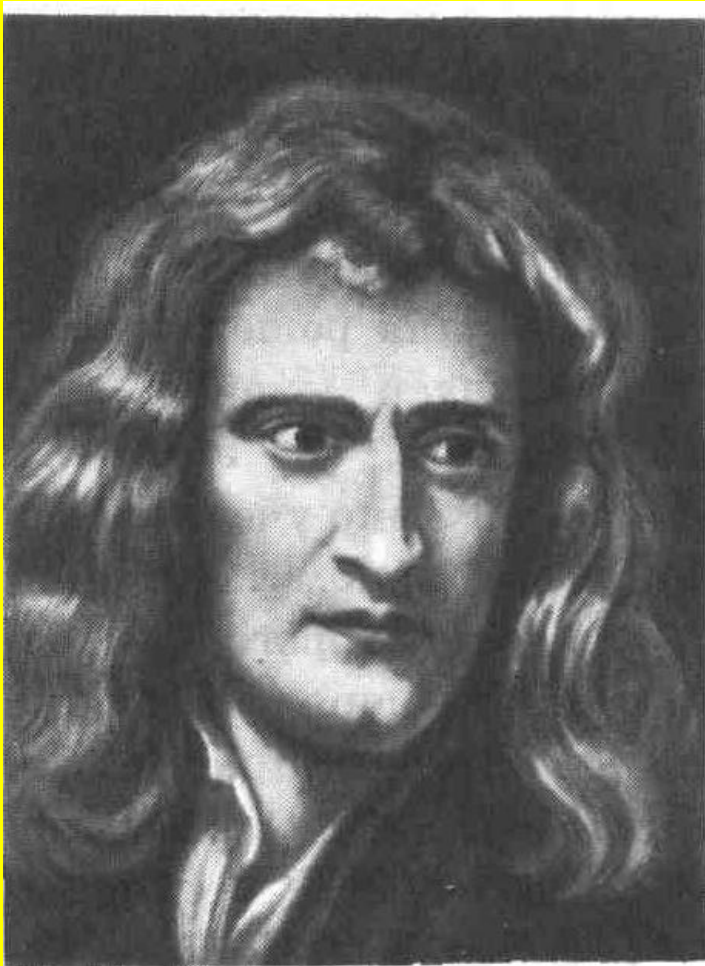
$$S = \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

определенный интеграл

(площадь криволинейной фигуры)

Лейбниц

Исаак Ньютон (1643-1727)



Лейбниц Готфрид Вильгельм (1646-1716)



«Общее искусство знаков представляет чудесное пособие, так как оно разгружает воображение... Следует заботиться о том, чтобы обозначения были удобны для открытий. Обозначения коротко выражают и отображают сущность вещей. Тогда поразительным образом сокращается работа мысли».

Лейбниц

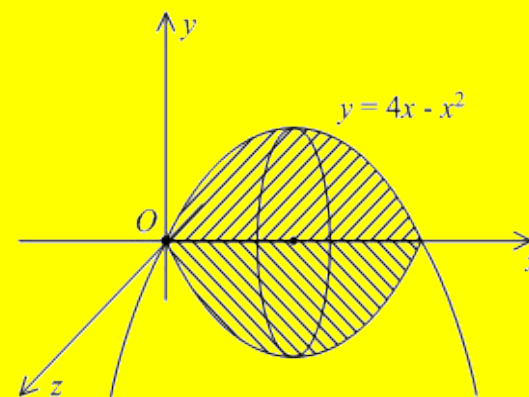
Задача о нахождении объёма тела

Найдём объём тела, ограниченного поверхностью вращения линии $y = 4x - x^2$ вокруг оси Ox (при $0 \leq x \leq 4$).

Для вычисления объёма тела вращения применим формулу:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Имеем:



$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^4 (4x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^4 (16x^2 - 8x^3 + x^4) dx = \pi \left(16 \cdot \frac{x^3}{3} - 8 \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^4 = \\ &= \pi \left(\frac{16}{3} \cdot 4^3 - 2 \cdot 4^4 + \frac{1}{5} \cdot 4^5 \right) = \pi \left(\frac{1024}{3} - 512 + \frac{1024}{5} \right) = 1024\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) = \frac{512\pi}{15}. \end{aligned}$$

Физические приложения определенного интеграла

- А) Вычисление работы движущегося тела
- Б) Вычисление перемещения движущегося тела
- В) Вычисление массы тела
- Г) Вычисление электрического заряда в проводнике под напряжением

Схема решения физических задач с использованием определенного интеграла

- А) сделать чертеж, соответствующий условию задачи,
- Б) выбрать систему координат,
- В) выбрать независимую переменную,
- Г) выбрать формулу классической физики, соответствующую условию задачи,
- Д) найти дифференциал искомой величины на основании этой формулы,
- Е) установить промежуток интегрирования,
- Ж) вычислить интеграл, т.е. найти искомую величину.

Величины	Соотношение в дифференциалах	Вычисление производной	Вычисление интеграла
<p>A– работа</p> <p>F– сила</p> <p>N– мощность</p>	$dA = F(x)dx$ $dA = N(t)dt$	$F(x) = \frac{dA}{dx}$ $N(t) = \frac{dA}{dt}$	$A = \int_x^x F(x)dx$ $A = \int_t^t N(t)dt$
<p>m– масса тонкого стержня</p> <p>ρ– линейная плотность</p>	$dm = \rho(x)dx$	$\rho(x) = \frac{dm}{dx}$	$m = \int_x^x \rho(x)dx$
<p>q–электрический заряд</p> <p>I– сила тока</p>	$dq = I(t)dt$	$I(t) = \frac{dq}{dt}$	$q = \int_t^t I(t)dt$
<p>s– перемещение</p> <p>v– скорость</p>	$ds = v(t)dt$	$v(t) = \frac{ds}{dt}$	$s = \int_t^t v(t)dt$
<p>Q– количество теплоты</p> <p>c– теплоемкость</p>	$dQ = c(t)dt$	$c(t) = \frac{dQ}{dt}$	$Q = \int_t^t c(t)dt$

Пример 1. Нахождение пути по заданной скорости.

Пусть точка движется со скоростью $V(t)$. Нужно найти путь s , пройденный точкой от момента $t=a$ до момента $t=b$. Обозначим $s(t)$ путь, пройденный точкой за время t от момента a . Тогда $s'(t)=V(t)$, т.е. $s(t)$ – первообразная для функции $V(t)$. Поэтому по формуле Ньютона - Лейбница найдём:

$$s = \int_a^b V(t) dt.$$

Например, если точка движется со скоростью $V(t)=2t+1$ (м/с), то путь, пройденный точкой за первые 10 с, по формуле равен

$$S = \int_0^{10} (2t+1) dt = (t^2 + t) \Big|_0^{10} = 110(\text{м})$$

Пример 2. Задача о вычислении работы переменной силы.

Пусть тело, рассматриваемое как материальная точка, движется по оси O_x под действием силы $F(x)$, направленной вдоль оси O_x . Вычислим работу силы при перемещении тела из точки $x=a$ в точку $x=b$.

Пусть $A(x)$ – работа данной силы при перемещении тела из точки a в точку x . При малом h силу F на отрезке можно считать постоянной и равной $F(x)$. Поэтому $A(x+h) - A(x) = F(x)h$, т.е. :

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} = F(x)$$

Устремляя h к нулю, получаем, что $A'(x) = F(x)$, т.е. $A(x)$ – первообразная для функции $F(x)$. По формуле Ньютона – Лейбница получаем

$$A(b) = \int_a^b F(x) dx, \text{ так как } A(a) = 0$$

Итак, работа силы $F(x)$ при перемещении тела из точки a в точку b равна:

$$A(b) = \int_a^b F(x) dx$$

Пример 3

Капля с начальной массой M падает под действием силы тяжести и равномерно испаряется, теряя массу m . Какова работа силы тяжести за время падения до полного испарения?



Проведем ось t с началом в начальной точке движения капли, по которой будем отсчитывать время. Пусть M — начальная масса капли, m — масса воды, испаряющейся в единицу времени, тогда капля движется по закону $m(t) = M - mt$. К концу движения $m=0$, отсюда $t = \frac{M}{m}$. Обозначим работу, затраченную за это время $A(t)$. Выберем малый промежуток времени Δt , на котором массу и путь можно считать постоянными.

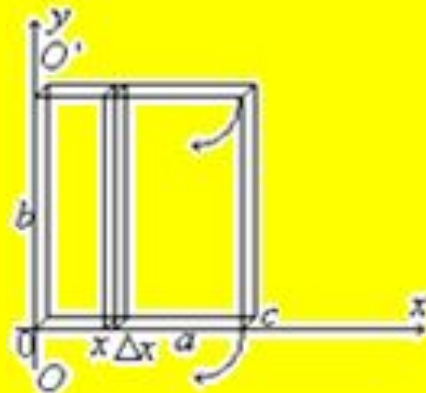
Работа вычисляется по формуле

$A = F s$, в которой $F = mg$, $s = \frac{gt^2}{2}$. $dA = dF ds$, отсюда:

$$A = \int_0^{\frac{M}{m}} F(t) ds = \int_0^{\frac{M}{m}} F(t) g t dt = \int_0^{\frac{M}{m}} (M - mt) g^2 t dt = g^2 \int_0^{\frac{M}{m}} (M - mt) t dt =$$
$$= g^2 \int_0^{\frac{M}{m}} (Mt - mt^2) dt = g^2 \left(\frac{Mt^2}{2} - \frac{mt^3}{3} \right) \Big|_0^{\frac{M}{m}} = g^2 \left[\frac{M^3}{2m^2} - \frac{M^3}{3m^2} \right] = \frac{1}{6} \frac{M^3}{m^2} g^2 \quad (\text{Дж})$$

Ответ: $\frac{1}{6} \frac{M^3}{m^2} g^2$ Дж.

Пример 4. Вычисление кинетической энергии



Проведем оси x и y . Кинетическая

энергия вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$.

Массу будем считать как $m(x) = \gamma V$, где

γ - плотность пластины. $V = bc\Delta x$,

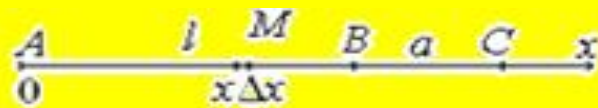
$v = \omega r, r = x \Rightarrow v = \omega x$, отсюда,

$$dE = \frac{\gamma b c \Delta x \omega^2 x^2}{2}, \text{ следовательно:}$$

$$E = \int_0^a \frac{\gamma b c \omega^2}{2} x^2 dx = \frac{\gamma b c \omega^2}{2} \int_0^a x^2 dx = \frac{\gamma b c \omega^2}{2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^a = \frac{\gamma b c \omega^2}{6} a^3 \text{ (Дж)}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\gamma b c \omega^2}{6} a^3 \text{ Дж}$$

Пример 5. Нахождение силы.



Для нахождения силы взаимодействия стержня и точки воспользуемся законом

$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$. Из соотношения $\frac{M}{m} = \frac{l}{\Delta x}$, получим, что

$$m = \frac{M}{l} \Delta x, \text{ отсюда } dF = \gamma \frac{\frac{M}{l} \Delta x m}{(a+l-x)^2} = \frac{\gamma M m}{l(a+l-x)^2} \Delta x.$$

$$\begin{aligned} F &= \int_0^l \gamma \frac{M m}{l(a+l-x)^2} dx = \frac{\gamma M m}{l} \int_0^l \frac{dx}{(a+l-x)^2} = \frac{\gamma M m}{l} \int_0^l \frac{d(a+l-x)}{(a+l-x)^2} = \\ &= \frac{\gamma M m}{l} \frac{1}{a+l-x} \Big|_0^l = \frac{\gamma M m}{l} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+l} \right) = \frac{\gamma M m}{l} \frac{l}{a(a+l)} = \frac{\gamma M m}{a(a+l)} \text{ (Н)} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{\gamma M m}{a(a+l)}$ Н.

Масса стержня

Пусть плотность $\rho(x)$ стержня с **постоянным** сечением S зависит от расстояния до начала стержня. Тогда масса стержня будет равна:

$$M = S \int_0^L \rho(x) dx,$$

где L – длина стержня, а центр масс стержня находится на расстоянии:

$$x_0 = \frac{\int_0^L x dm}{M} = \frac{\int_0^L x \rho(x) dx}{\int_0^L \rho(x) dx}.$$

