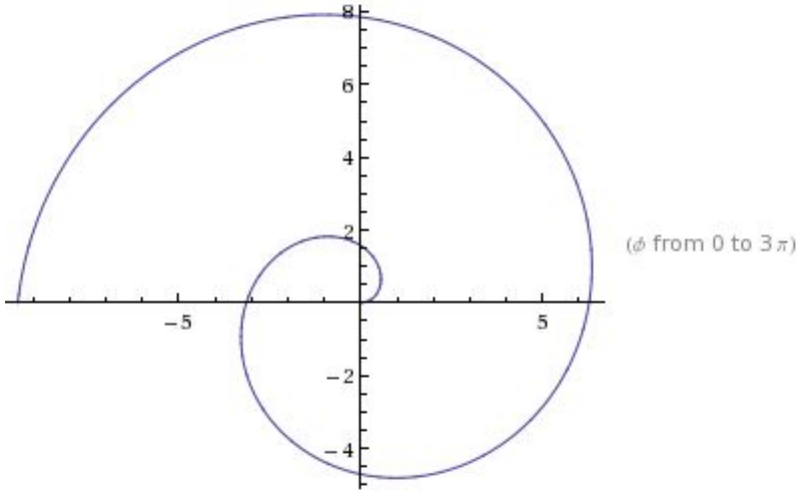
Красота в математике. Графики функций



Проектную работу выполнили ученицы 8 «А» класса МБОУ СОШ №141 Яброва Евгения и Люфт Марина

Актуальность проекта

- Преобразование графиков функции является одним из фундаментальных математических понятий
- Обучение учащихся построению и преобразованию графиков функции является одной из главных задач обучению математике в школе.

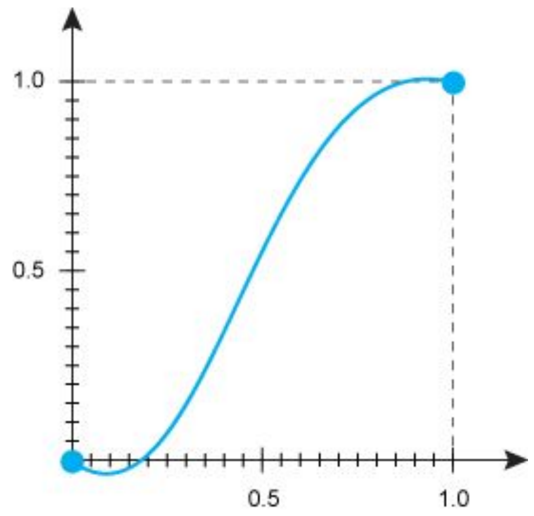
Цель проекта

Рассмотреть графический метод решения уравнений, неравенств, систем уравнений. Научиться строить графики с помощью преобразований и графики функций с модулем.

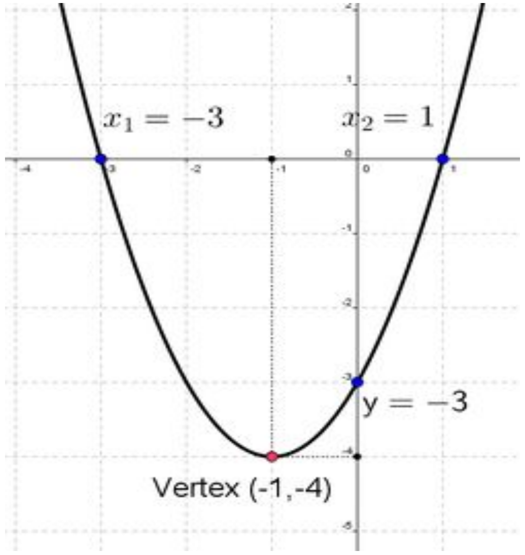
Задачи

1. Рассмотреть графики различных функций и их свойства.
2. Научиться применять графический способ решения:
   1) Уравнений;
   2) систем уравнений;
   3) неравенств.
3. Изучить способы преобразования графиков.
4. Научиться строить графики функций с модулем, графики дробно-линейной функции и квадратичной функции.
5. Подготовиться к сдаче ОГЭ на данную тему.
6. Систематизировать все знания о функциях и создать диск учебных видеороликов.

Определения



Функцией называют такую зависимость переменной y от переменной x, при которой каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y.



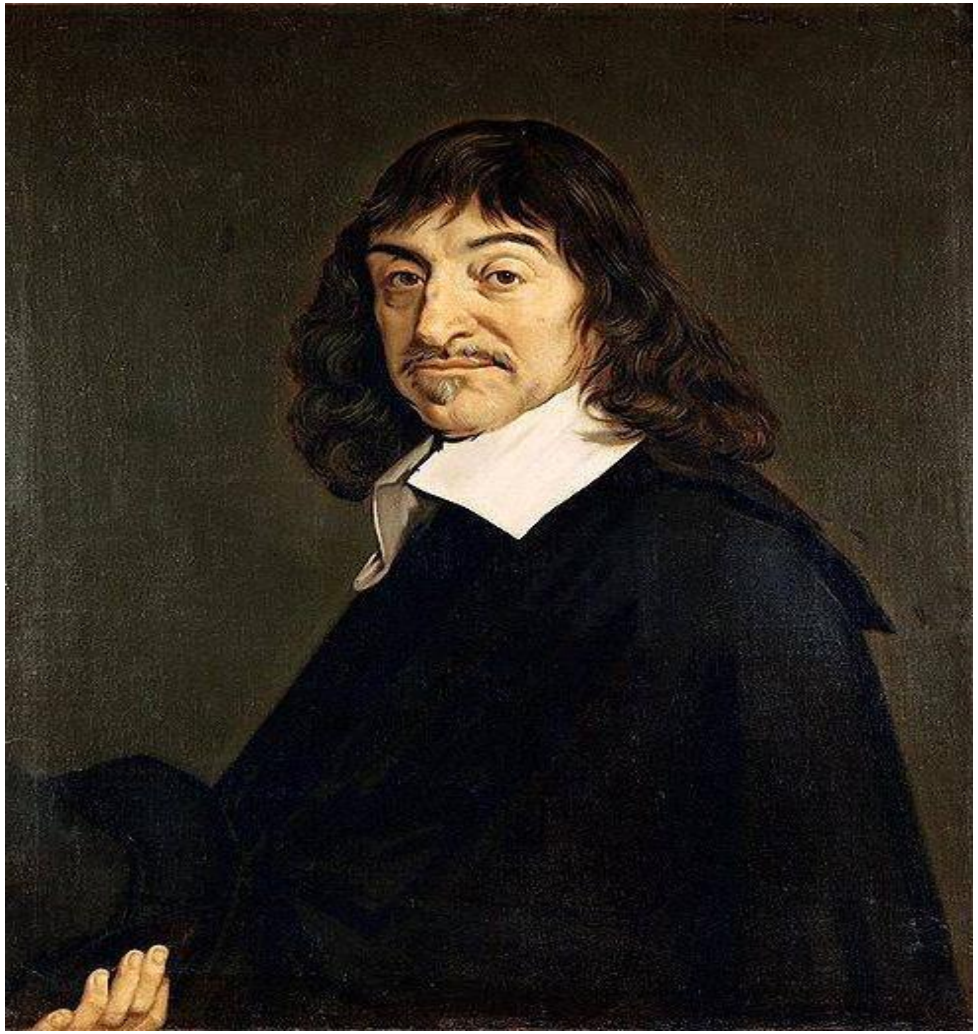
Графиком функции называют множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значению аргумента, а ординаты – соответствующим значениям функции.

Из истории…

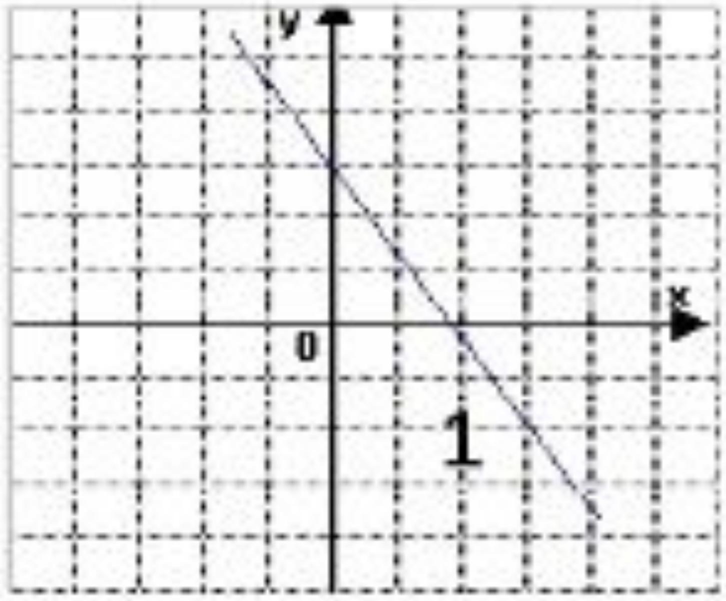
Понятие функции уходит своими корнями в ту далёкую эпоху, когда люди впервые поняли, что окружающие их предметы взаимосвязаны. Они ещё не умели считать, но уже знали, что:

- чем больше оленей удастся убить на охоте, тем дольше племя будет избавлено от голода;
- чем сильнее натянута тетива лука, тем дальше полетит стрела;
- чем дольше горит костёр, тем теплее в пещере.

Понятие переменной величины было введено в науку французским учёным и математиком **Рене Декартом** (1596-1650).



Линейная функция y=kx+b



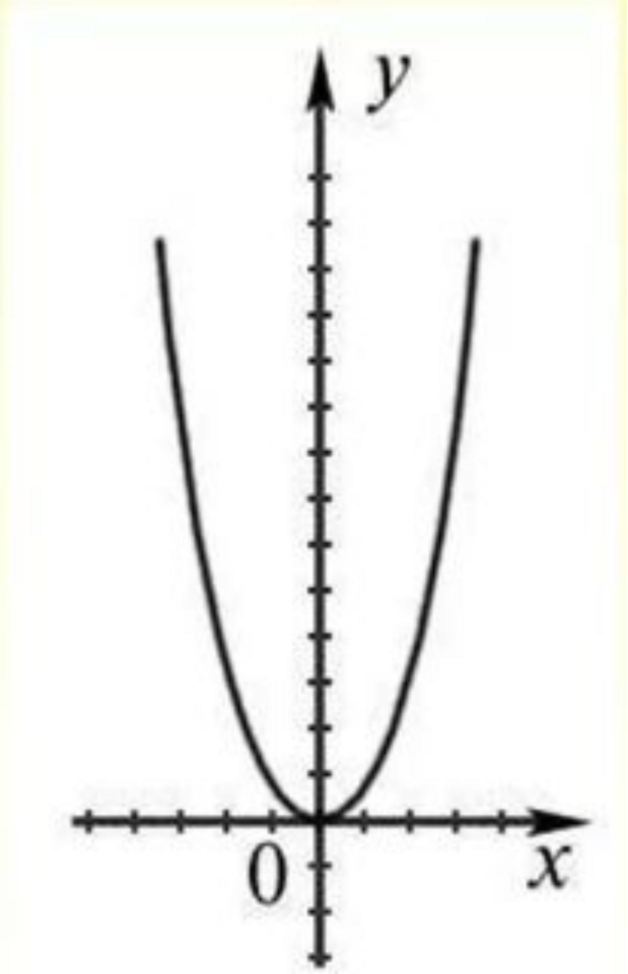
Свойства функции:

1. D(f)=(- ∞;+∞)
2. E(f)=(- ∞;+∞)
3. Функция монотонна
4. унаим. - не сущ., унаиб.- не сущ.
5. Непрерывная
6. Неограниченная

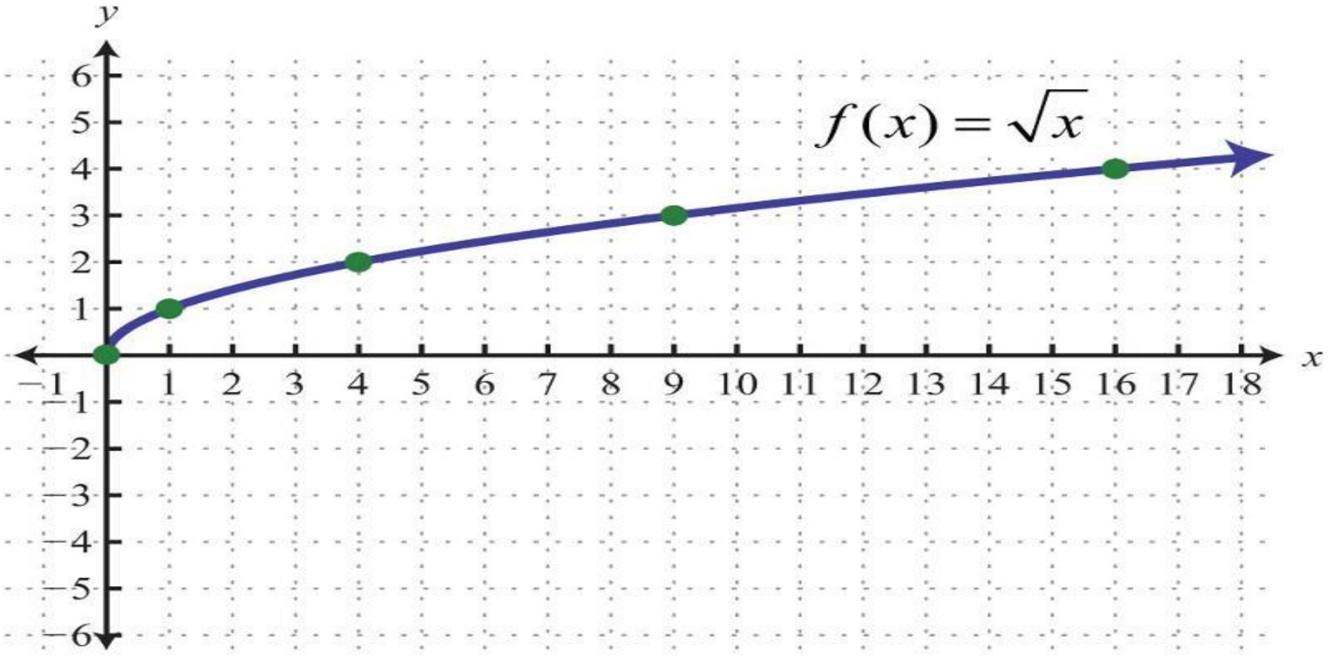
Квадратичная функция $y = ax^2+bx+c$

Свойства функции:

1. $D(f)=(-\infty;+\infty)$
2. $E(f)=[0;+\infty)$
3. $y=0$, при $x=0$, $y>0$, при x $(-\infty;+\infty)$
4. Убывает на луче $(-\infty;0]$, возрастает на луче $[0;+\infty)$.
5. $y_{наим.}=0$, $y_{наиб.}$- не сущ.
6. Непрерывная
7. Выпукла вниз
8. Ограничена снизу



Функция y=$\sqrt{x}$



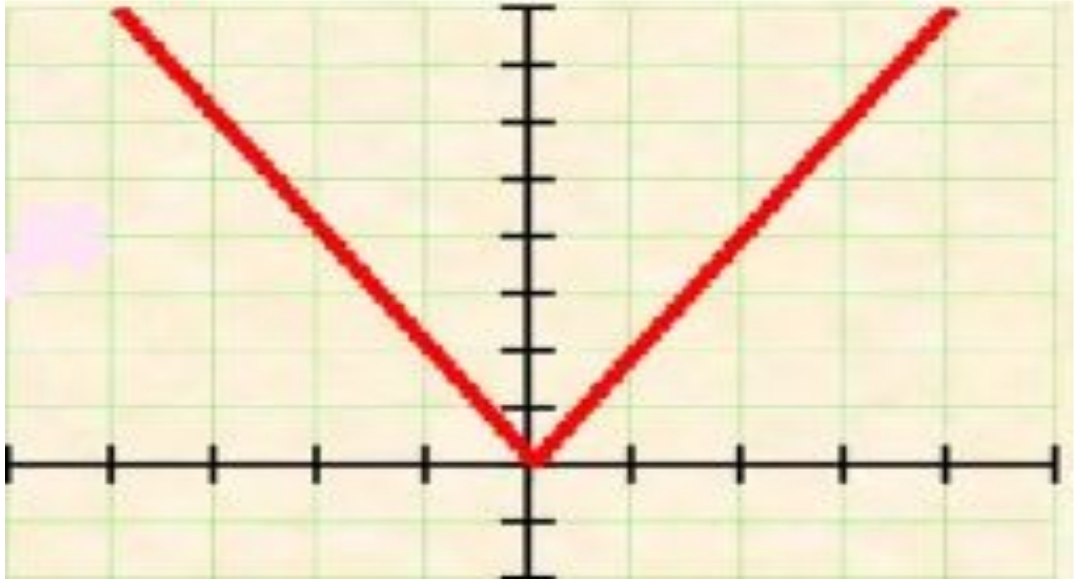
Свойства функции:

1. D(f)=[0;+∞)
2. E(f)=[0;+∞)
3. y=0, при x=0, y>0, при x>0
4. Возрастает на луче [0;+∞)
5. yнаим.=0, yнаиб.- не сущ.
6. Непрерывная
7. Выпукла вверх
8. Ограничена снизу

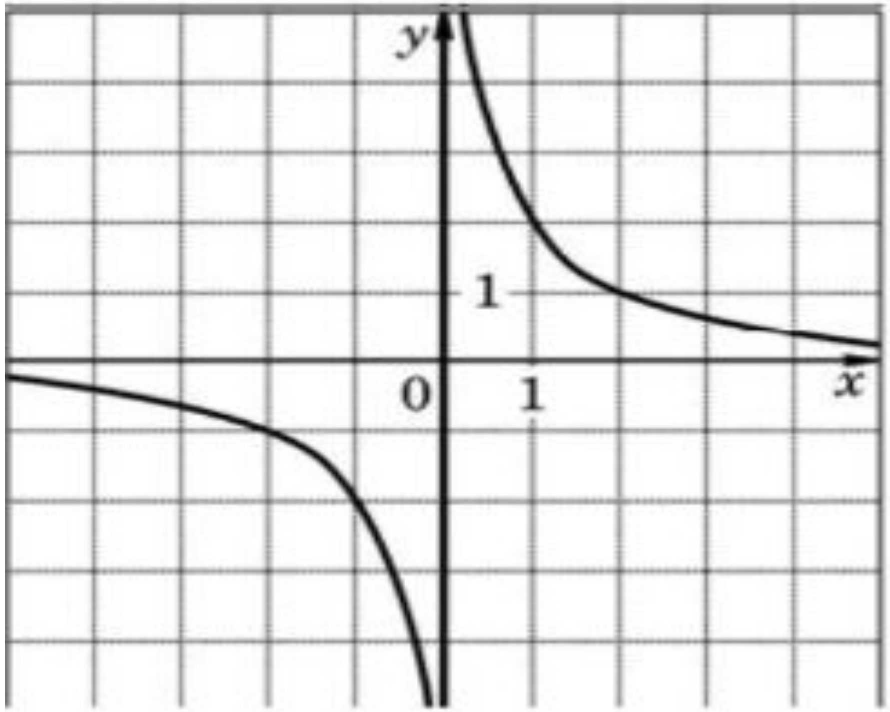
Функция y=|x|

Свойства функции:

1. D(f)=(- ∞;+∞)
2. E(f)= [0;+∞)
3. y=0, при x=0, y>0, при x (- ∞;+∞)
4. Убывает на луче (-∞;0], возрастает на луче [0;+∞).
5. yнаим.=0, yнаиб.- не сущ.
6. Непрерывная
7. Ограничена снизу



Функция обратной пропорциональности y= $\frac{k}{x}$



Свойства функции:

1. D(f)=(-∞;0) ∪ (0;+∞)
2. E(f)= (-∞;0) ∪ (0;+∞)
3. y>0 при x>0, y<0 при x<0
4. Убывает на промежутке (-∞;0) и (0;+∞)
5. yнаим.- не сущ., yнаиб.- не сущ.
6. Неограниченная
7. Выпукла и вверх, и вниз
8. Прерывная

Алгоритм решения уравнений графическим способом.

1) Рассмотреть две функции.
2) В одной системе координат построить графики этих функций.
3) Найти точки пересечения построенных графиков
4) Абсциссы точек пересечения – это корни уравнения. Записать их в ответ.

Пример 1

Решим уравнение графическим способом:

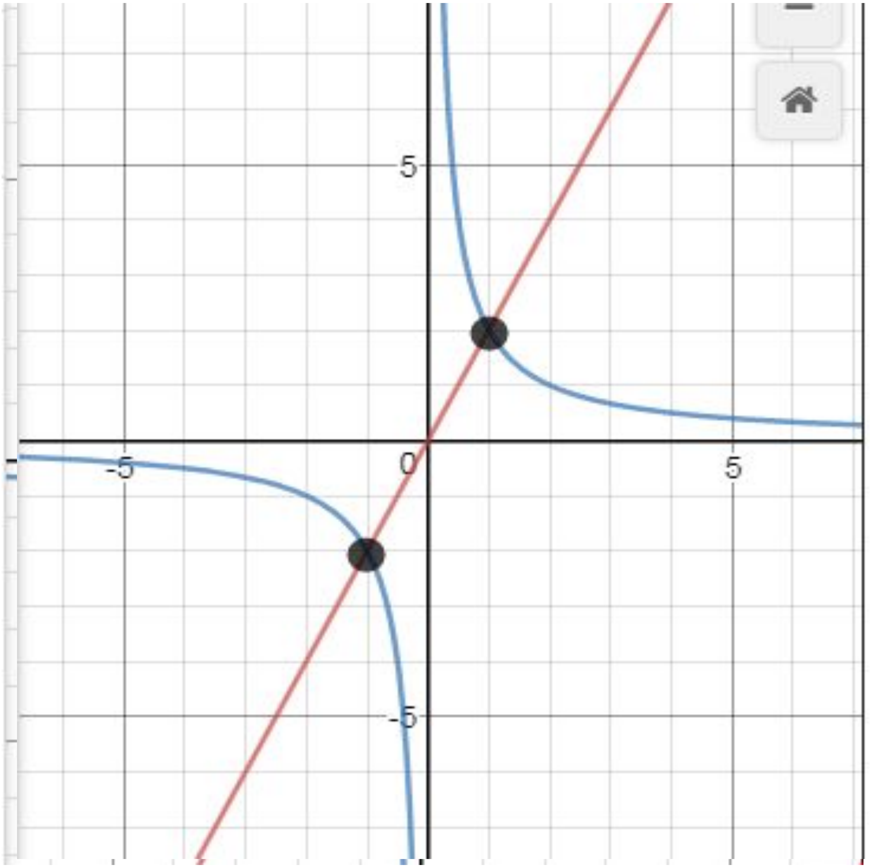
$$\frac{2}{x} = 2x$$

$y = \frac{2}{x}$ - гипербола

$y = 2x$ - прямая

x	1	2	4	0,5	-1	-2	-4	-0,5
y	2	1	0,5	4	-2	-1	-0,5	-4

x	1	2	3	-1	-2	-3
y	2	4	6	-2	-4	-6



Ответ: x=±1

Пример 2

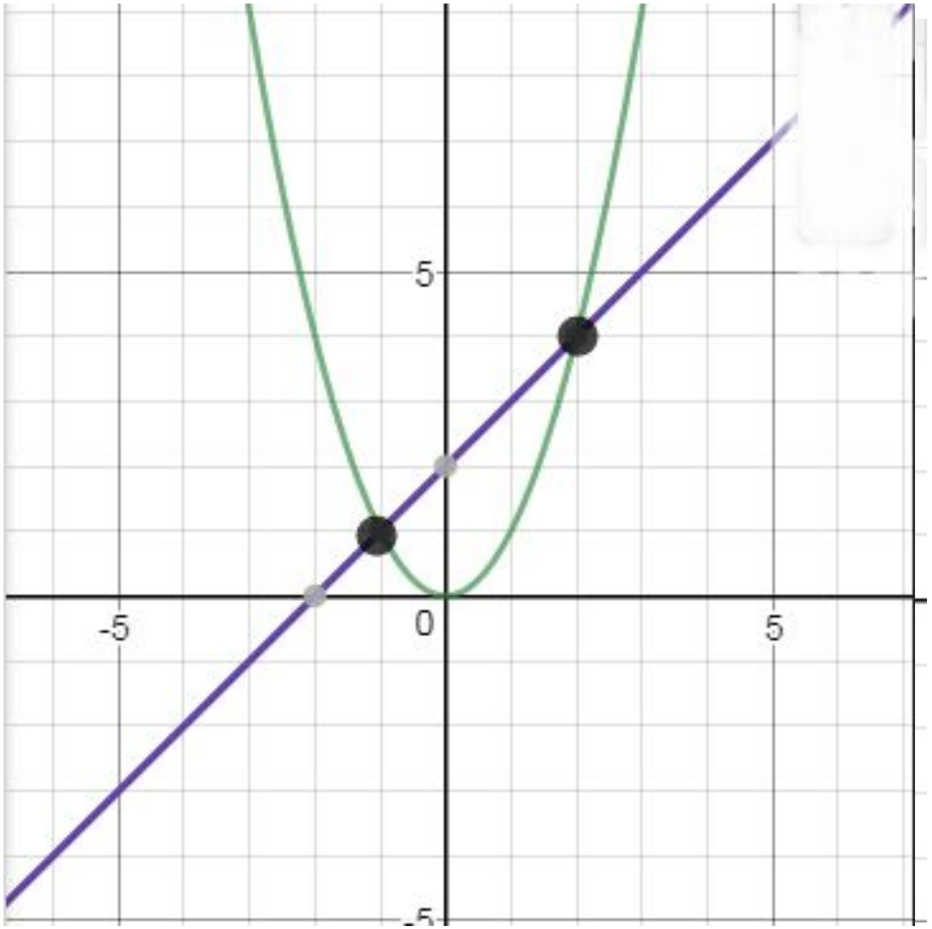
Решим уравнение графическим способом:

$x^2=x+2$

$y=x^2$-парабола $y=x+2$-прямая

x	0	1	2	-1	-2
y	0	1	4	1	4

x	0	1	2
y	2	3	4



Ответ: $x_1=-1$, $x_2=2$.

Алгоритм применения графического метода при решении систем уравнений

1) Выразить y через x в каждом уравнении.
2) Построить в одной системе координат графики этих функций.
3) Определить координаты всех точек пересечений графиков (если они есть).
4) Координаты этих точек и будут решениями системы.

Пример 1

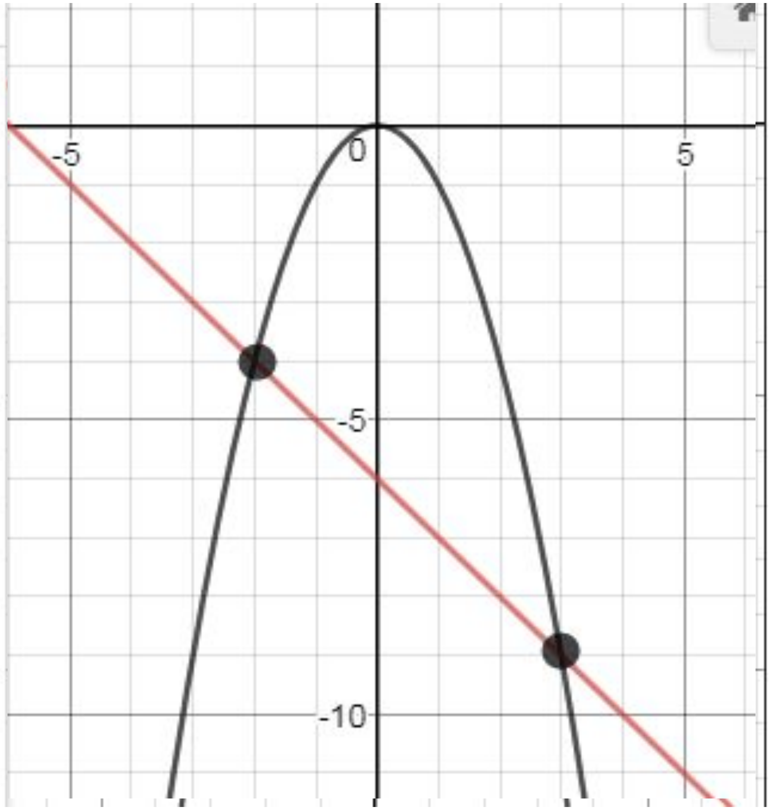
Решим систему уравнений графическим способом:

$$\begin{cases} y=-x^2 \\ y=-x-6 \end{cases}$$

$y=-x^2$-парабола $y=-x-6$- прямая

x	0	1	2	-1	-2
y	0	-1	-4	-1	-4

x	0	-1	-2
y	-6	-5	-4

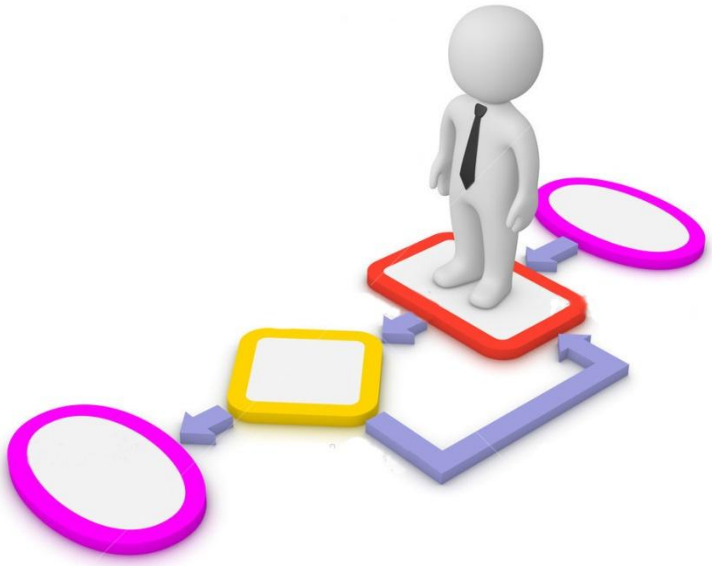


Ответ: (-2;-4)

(3;-9).

Алгоритм решения неравенств графическим методом

1) Рассмотреть две функции.
2) В одной системе координат построить графики этих функций.
3) Определить абсциссы точек пересечения графиков (приближённо).
4) Определить промежуток, на котором график 1-й функции лежит выше или ниже 2-й функции (в соответствии со знаком неравенства).
5) Записать полученное множество в ответ.



Пример 1

Решим неравенство графическим способом:

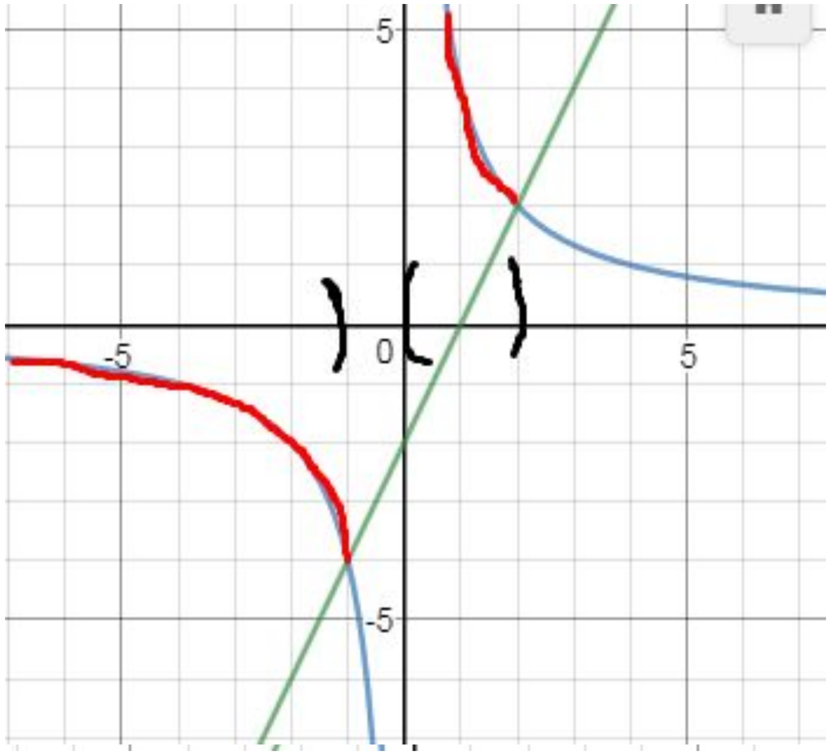
$$\frac{4}{x} > 2x-2$$

$y=\frac{4}{x}$ - гипербола

$y=2x-2$-прямая

x	1	2	4	0,5	-1	-2	-4	-0,5
y	4	2	1	8	-4	-2	-1	-8

x	0	1	2
y	-2	0	2



Ответ: (- ∞;-1), (0;2).

Преобразование графиков функций

Различают три вида **геометрических преобразований графика функции**:

- Первый вид - **масштабирование** (сжатие или растяжение) вдоль осей абсцисс и ординат.
- Второй вид - **симметричное (зеркальное) отображение относительно координатных осей**.
- Третий вид - **параллельный перенос** (сдвиг) вдоль осей *Х* и *У*.

Масштабирование

Масштабирование - операция сжатия или растяжения **графика функции** вдоль осей абсцисс и ординат.

$y=x^2$ - парабола

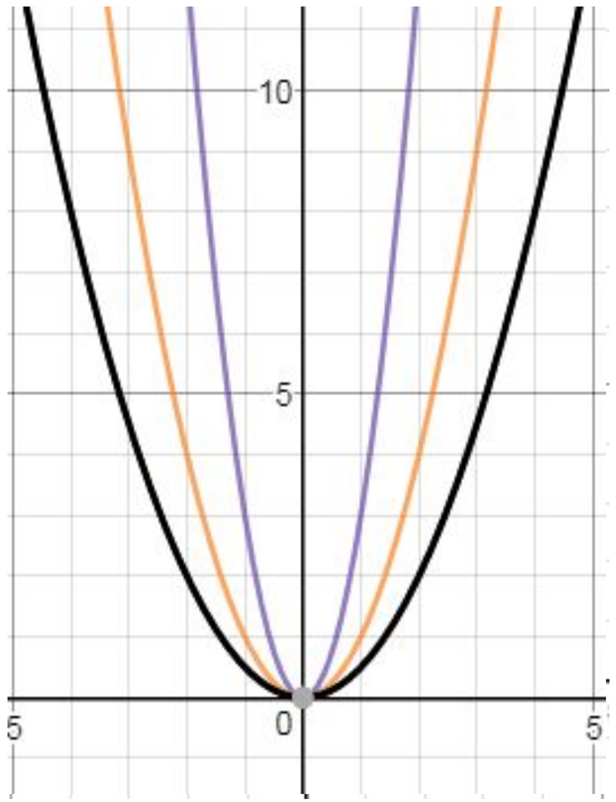
x	0	1	2	-1	-2
y	0	1	4	1	4

$y=3x^2$ - парабола

x	0	1	2	-1	-2
y	0	3	12	3	12

$y=0,5x^2$ - парабола

x	0	1	2	-1	-2
y	0	0,5	2	0,5	2



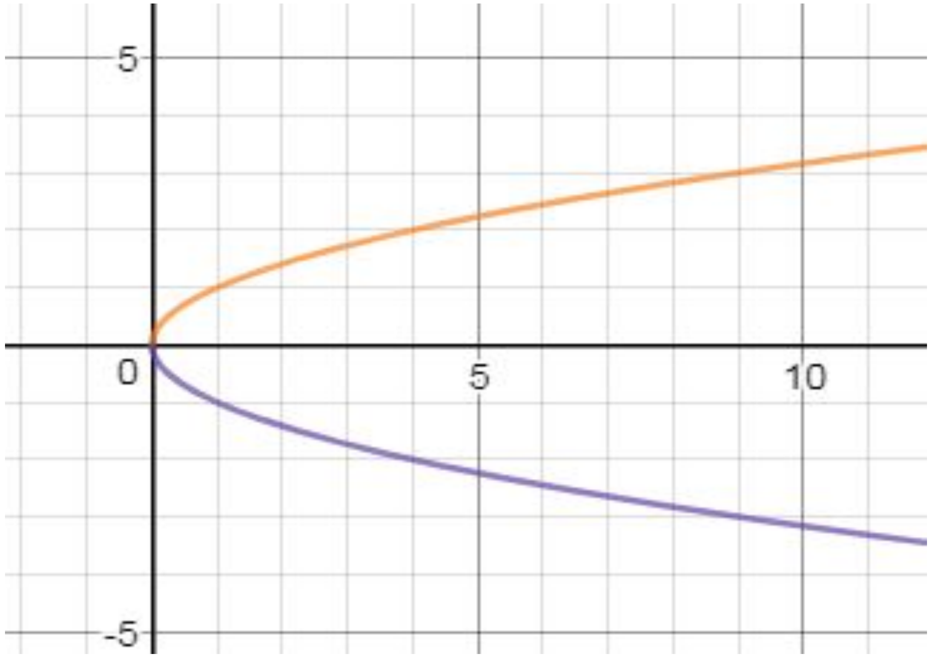
Симметричное (зеркальное) отображение относительно координатных осей

$y = \sqrt{x}$

x	0	1	4	9
y	0	1	2	3

$y = -\sqrt{x}$

x	0	1	4	9
y	0	-1	-2	-3



Параллельный перенос

Параллельный перенос - сдвиг вдоль осей X и *Y*.

Алгоритм

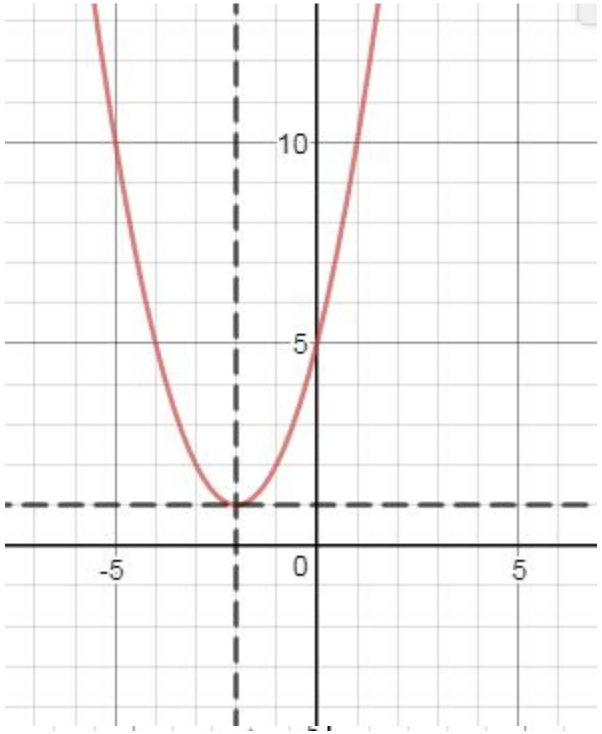
1.Перейти к новой системе координат, проведя (пунктиром) вспомогательные прямые x=-l, y=m.

2. «Привязать» график функции y=f(x) к новой системе координат.

$y=(x+2)^2+1$

$y=x^2$

x	0	1	2	-1	-2
y	0	1	4	1	4



Дробно-линейная функция

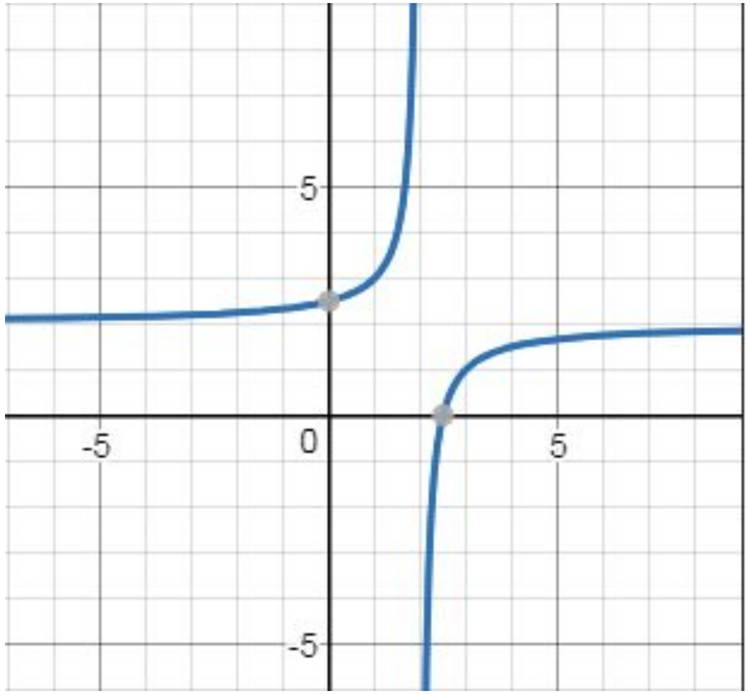
Дробно-линейной называют обычно функцию вида y=$\frac{ax+b}{cx+d}$.

Для построения графика дробно-линейной функции выделяют из неправильной дроби $\frac{ax+b}{cx+d}$ целую часть.

y=$\frac{2x-5}{x-2} = \frac{2x-4-1}{x-2} = \frac{2(x-2)-1}{x-2} = \frac{2(x-2)}{x-2} - \frac{1}{x-2}$ =2- $\frac{1}{x-2}$

y=- $\frac{1}{x-2}$ +2 – гипербола получена пар-ным переносом графика функции y=- $\frac{1}{x}$ по оси x вправо на 2 ед., по оси y вверх на 2 ед.

x	1	2	0,5	0,25	-1	-2	-0,5	-0,25
y	-1	-0,5	-2	-4	1	0,5	2	4



Алгоритм построения графика функции y=|f(x)|

1) Построить график функции y=|f(x)| .
2) Оставить без изменений те части графика функции y=f(x), которые лежат не ниже оси x.
3) Части графика функции y=f(x), которые лежат ниже оси x, заменить на симметричные им относительно оси x.

Алгоритм построения графика функции y=f(|x|)

1) Построить график функции y=f(x) при x 0.
2) Добавить ветви, симметричные построенным относительно оси y.

Пример 1

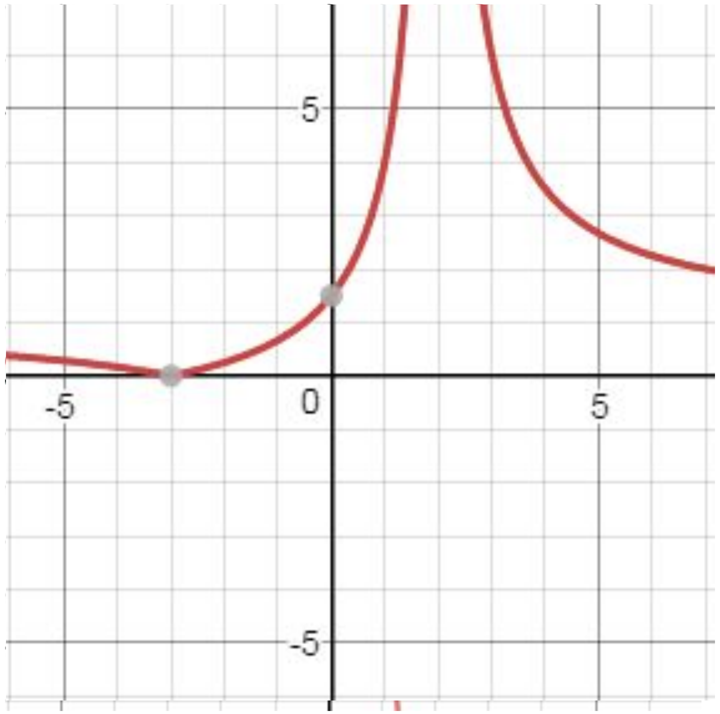
$y = \left| \frac{x+3}{x-2} \right|$

1) Построим график функции

$y = \frac{3+x}{x-2} = \frac{x+3}{x-2} = \frac{x-2+5}{x-2} = \frac{x-2}{x-2} + \frac{5}{x-2} = 1 + \frac{5}{x-2}$

$y = \frac{5}{x-2} + 1$ – гипербола получена пар-ным переносом графика функции $y = \frac{5}{x}$ по оси Х вправо на 2 ед. и по оси У вверх на 1 ед.

x	1	2	0,5	5	-1	-2	-0,5	-5
y	5	2,5	10	1	-5	-2,5	-10	-1



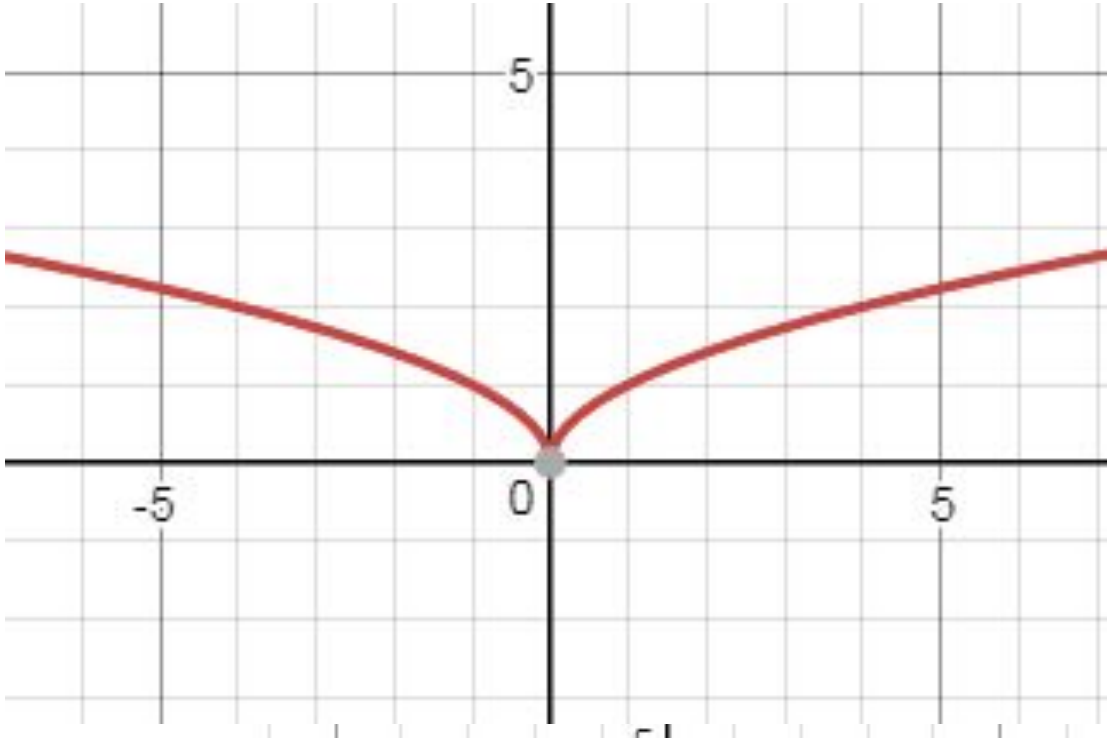
Пример 2

Построить график функции:

y= $\sqrt{|x|}$

y= $\sqrt{x}$

x	0	1	4	9
y	0	1	2	3



Алгоритм решения квадратного уравнения вида $ax^2+bx+c=0$ графическим способом.

1) Рассмотреть квадратичную функцию у= ax^2+bx+c. Найти координаты вершины параболы, построить на координатной плоскости соответствующую точку, провести ось параболы.
2) Отметить на оси х 4 точки, симметричные относительно оси параболы.
3) Через полученные точки провести параболу.
4) Координаты точек пересечения параболы с осью Х и будут решением уравнения.

Пример 1

$x^2-4x+3=0$

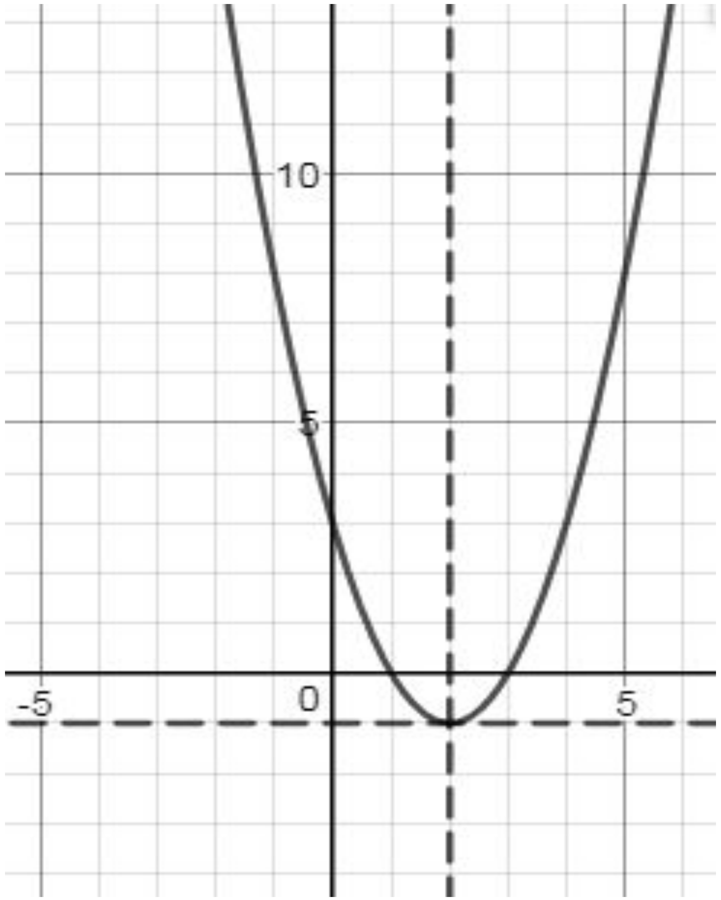
$a=1 \quad b=-4 \quad c=3$

$X_0=\frac{-b}{2a}=\frac{4}{2*1}=2$

$Y_0=f(X_0)=2^2-4*2+3=4-8+3=-1$

(2;-1)-вершина параболы, ветви ↑.

x	0	1	2	3	4
y	3	0	-1	0	3



Ответ: x1=1, x2=3.

Решим задание из тестов ОГЭ

Построить график функции:

$$y=\frac{(xx+1)(x-2)}{2-x}=-\frac{(xx+1)(x-2)}{x-2}=-x^2+1$$

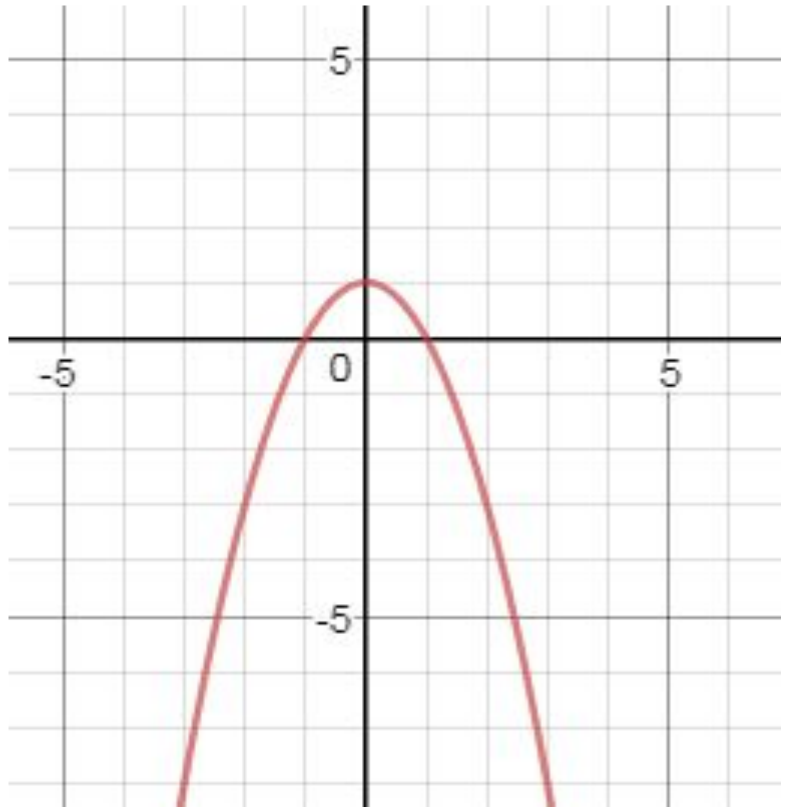
$y=-x^2+1$-парабола

График получен пар-ным переносом графика

функции $y=-x^2$ на 1 ед. вверх.

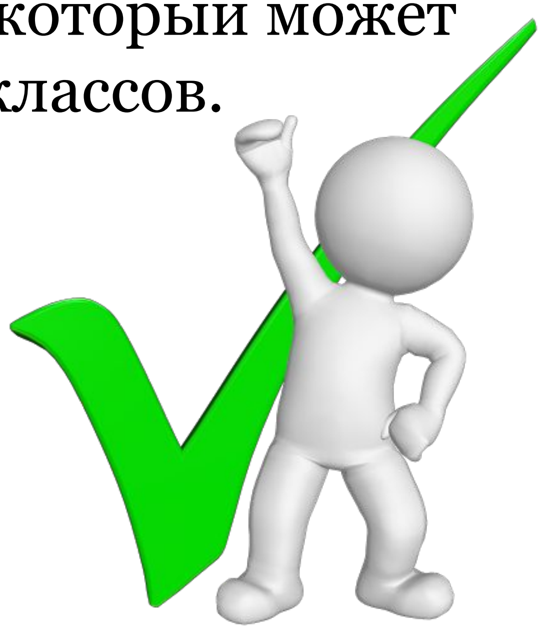
$y=-x^2$

x	1	2	3	-1	-2	-3
y	-1	-4	-9	-1	-4	-9



Заключение

В ходе работы над проектом мы познакомились с различными видами функций, систематизировали всю информацию о них. Изучили применение графического способа при решении уравнений, неравенств, систем уравнений, квадратных уравнений, которое мы представили в своей работе. Практическая значимость нашей работы заключается в том, что мы создали диск учебных видеороликов, который может использоваться учащимися 8-х и 9-х классов.



Список литературы

1. Учебник Алгебра 8 класс А.Г. Мордкович, Н.П. Николаев (2013 год) Часть 1
2. Задачник Алгебра 8 класс А.Г. Мордкович, Н.П. Николаев (2013 год) Часть 1
3. Контрольные работы по алгебре 7-9 класс Мордкович А.Г. ФГОС
4. ОГЭ. Математика : типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под ред. И.В. Ященко – М. :Издательство «Национальное образование», 2018
5. http://matematikam.ru/calculate-online/grafik.php
6. https://ru.wikipedia.org/wiki