

Выполнил ученик 11 «А» класса

(\_\_\_\_\_)Фомин Сергей Александрович

Г. Челябинск МОУ СОШ №30, 11 класс /Ул. Володарского 20, 263-14-54/

**Полезная модель: Электронное приложение к учебнику Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, Л. С. Киселёва, Э. Г. Позняк. Геометрия 10-11. «Просвещение», 2011**

---

**Руководитель проекта:** Змаева Елена Адольфовна, учитель математики высшей категории МОУ СОШ №30

# Содержание

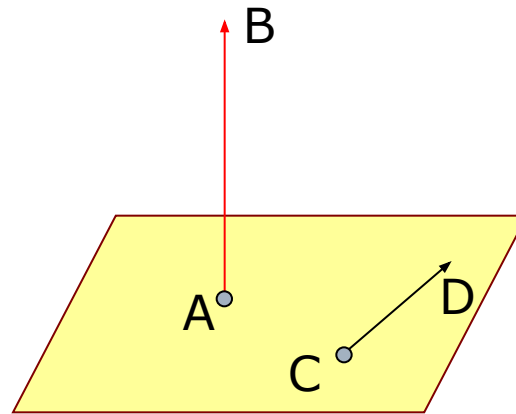
---

1. **Понятие вектора в пространстве.**
    1. Понятие вектора
    2. Равенство векторов
  2. **Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число.**
    1. Сложение и вычитание векторов
    2. Сумма нескольких векторов
    3. Умножение вектора на число
  3. **Компланарные векторы**
    1. Компланарные векторы
    2. Разложение вектора по трем некопланарным векторам
  4. **Координаты точки и координаты вектора.**
    1. Прямоугольная система координат в пространстве
    2. Координаты вектора
    3. Связь между координатами векторов и координатами точек
    4. Простейшие задачи в координатах
  5. **Скалярное произведение векторов**
    1. Скалярное произведение векторов
    2. Вычисление углов между прямыми и плоскостями
  6. **Список использованной литературы**
-

# Понятие вектора

---

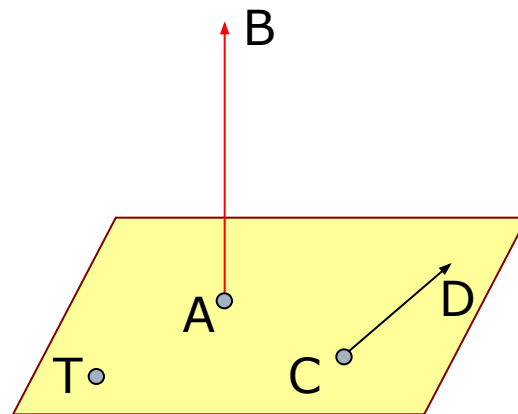
Отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой – концом, называется **вектором**



# Понятие вектора

---

Любая точка пространства также может рассматриваться как вектор. Такой вектор называют **нулевым**.



# Понятие вектора

---

Длиной ненулевого вектора  $\vec{AB}$  называется длина отрезка  $AB$ .

Длина вектора  $\vec{AB}$  обозначается так:

$$|\vec{AB}| \text{ или } |\vec{a}|$$

---

# Понятие вектора

---

Два ненулевых вектора называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

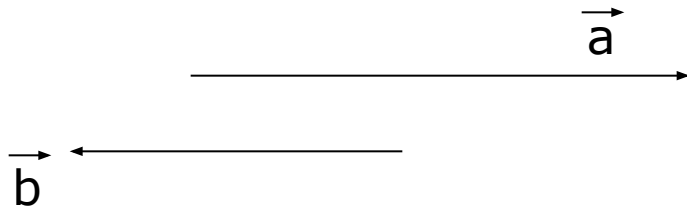
Если векторы коллинеарные и при этом их лучи совпадают, то такие векторы называют **сонаправленными**, а если не совпадают – **противоположно направленными**.

---

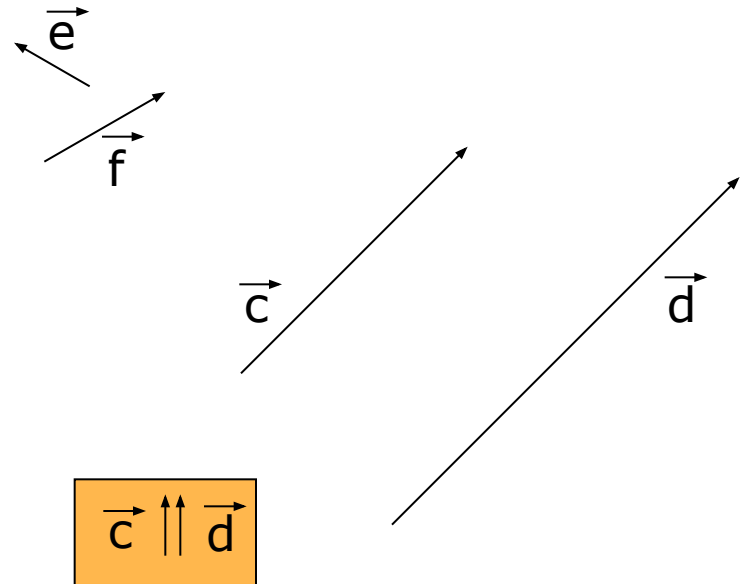
# Понятие вектора

---

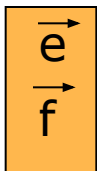
Примеры:



$$\vec{a} \parallel \vec{b}$$



$$\vec{c} \parallel \vec{d}$$



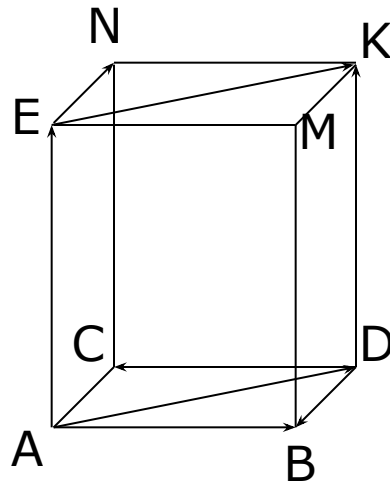
- Ни сонаправленные, ни противоположно направленные,  
- так как не коллинеарны

---

# Равенство векторов

---

Векторы называются равными, если они сонаправлены и их длины равны.



$$\begin{aligned} AD &\uparrow\uparrow EK \\ AE &\uparrow\uparrow DK \\ EN &\uparrow\downarrow DB \end{aligned}$$

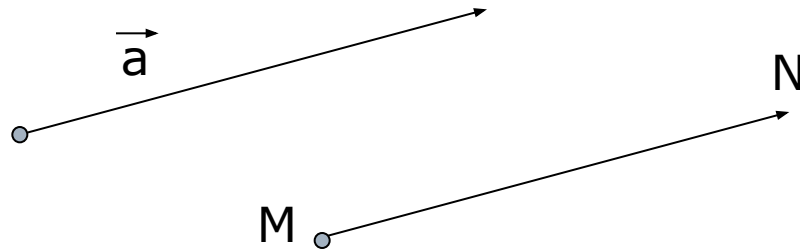


# Равенство векторов

---

Если точка  $A$  – начало вектора  $\vec{a}$ , то говорят, что вектор  $\vec{a}$  **отложен** от точки  $A$ .

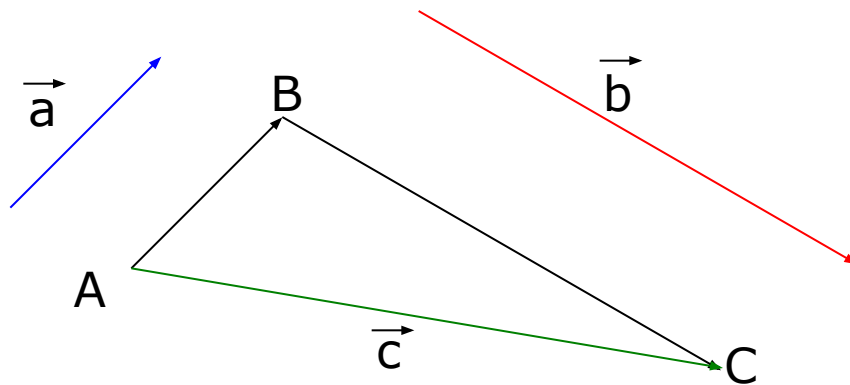
**От любой точки можно отложить вектор, равный данному и притом только один.**



# Сложение и вычитание векторов

---

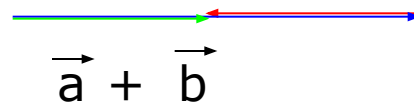
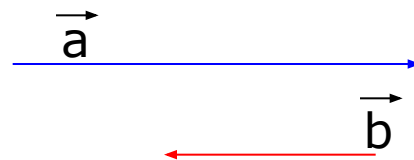
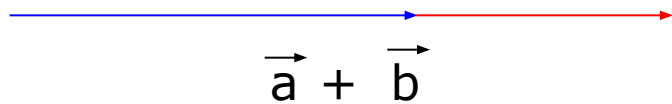
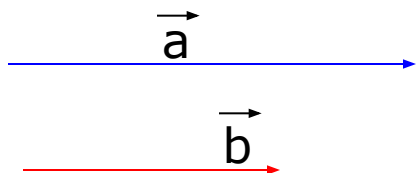
Правило треугольника:



$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$$

# Сложение и вычитание векторов

---



# Сложение и вычитание векторов

---

Для любых векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$   
справедливы равенства:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

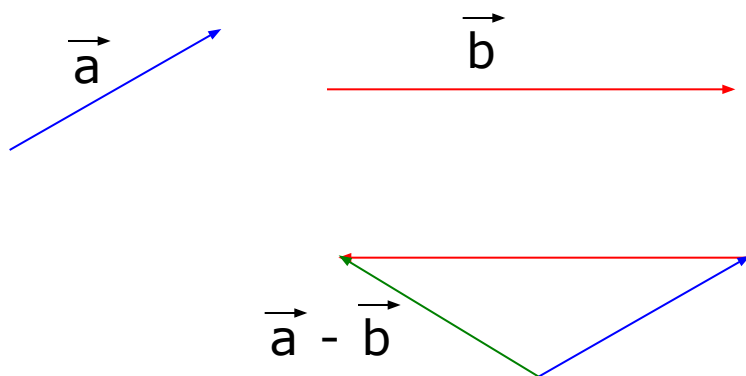
---

# Сложение и вычитание векторов

---

Разностью векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется такой вектор, сумма которого с вектором  $\vec{b}$  равна вектору  $\vec{a}$ .

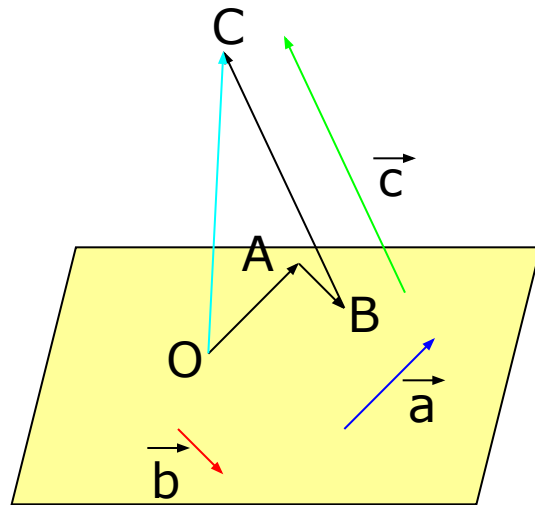
Иными словами:  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$



# Сумма нескольких векторов

---

Сумма нескольких векторов не зависит от того, в каком порядке они складываются.



$$\vec{OC} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

# Умножение вектора на число

---

Произведением **ненулевого** вектора  $\vec{a}$  на число  $k$  называется такой вектор  $\vec{b}$ , длина которого равна  $|k| * |\vec{a}|$ , причем векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  сонаправлены при  $k \geq 0$  и противоположно направлены при  $k < 0$ .

Произведением **нулевого** вектора на любое число считается нулевой вектор

---

# Умножение вектора на число

---

Для любых векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и любых чисел  $k$ ,  $l$  справедливы равенства:

$$(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$$

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$$

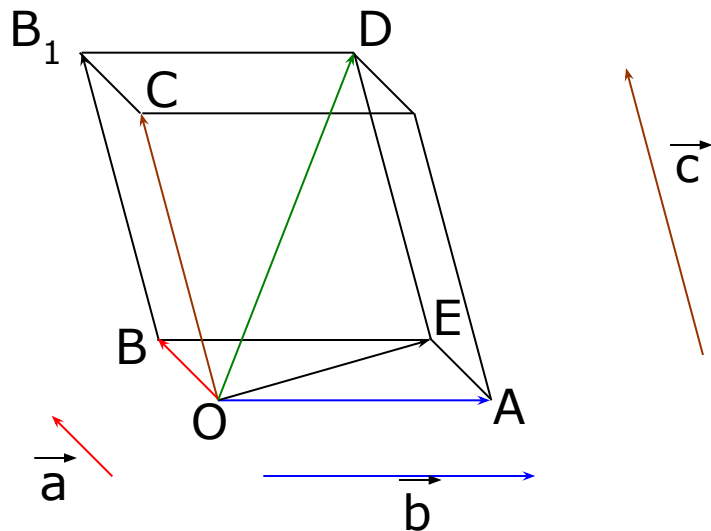
$$(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$$

---



# Компланарные векторы

Векторы называются компланарными, если при откладывании их от одной и той же они будут лежать в одной плоскости.



$\vec{BB}_1$ ,  $\vec{OD}$  и  $\vec{OE}$  компланарны, так как если отложить от точки O Вектор, равный  $\vec{BB}_1$ , то получится Вектор  $\vec{OC}$ , а векторы  $\vec{OC}$ ,  $\vec{OD}$  и  $\vec{OE}$  Лежат в одной плоскости OCE

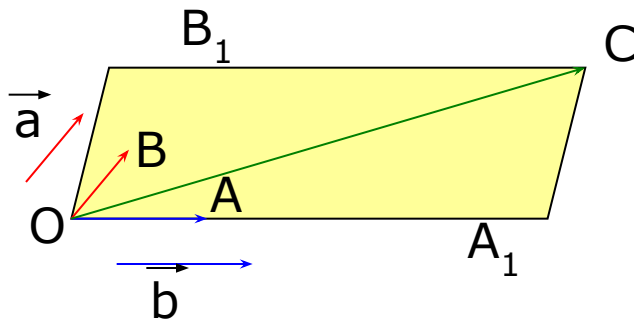
# Компланарные векторы

---

Если вектор  $\vec{c}$  можно разложить по векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , т.е. представить в виде:

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

Где  $x$  и  $y$  – некоторые числа, то векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  компланарны.



$$\vec{OB_1} = y\vec{OB}$$

$$\vec{OA_1} = x\vec{OA}$$

$$\vec{OC} = x\vec{OA} + y\vec{OB}$$

---

# Разложение вектора по трем некопланарным векторам

---

Теорема:

**Любой вектор можно разложить по трем некопланарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.**

---

# Разложение вектора по трем некопланарным векторам

---

## Доказательство:

Дано:

$\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  – некопланарные векторы,  $OA = \vec{a}$ ,  $OB = \vec{b}$ ,  $OC = \vec{c}$ ,  $OP = \vec{p}$

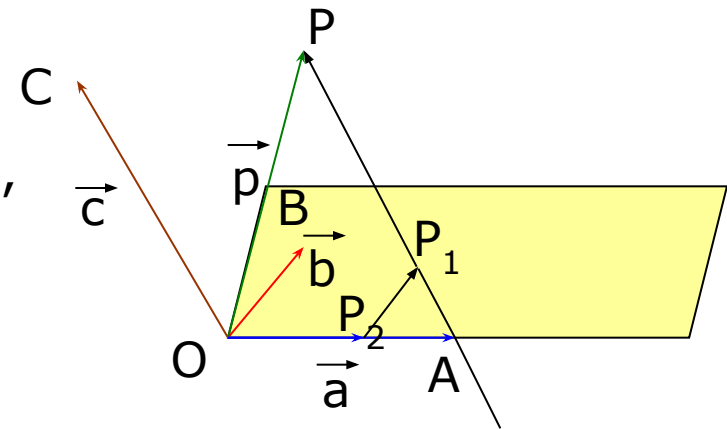
1) Разложим вектор  $\vec{p}$  по правилу многоугольника:  $OP = OP_2 + P_2P_1 + P_1P$

2) Векторы коллинеарны, поэтому можно записать так:

$$OP = x \cdot OA + y \cdot OB + z \cdot OC$$

3) Допустим, что вектор можно разложить еще по трем числам:  $x_1, y_1, z_1$ . Тогда, используя свойство действий над векторами, получим:

$$0 = (x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b} + (z - z_1)\vec{c}$$



# Разложение вектора по трем некопланарным векторам

---

Это равенство выполняется только тогда, когда  $x-x_1=0$ ,  $y-y_1=0$ ,  $z-z_1=0$ .

Отсюда следует:

$$5) \quad \vec{c} = -\frac{x-x_1}{z-z_1} \vec{a} - \frac{y-y_1}{z-z_1} \vec{b}$$

Из этой формулы следует, что векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  компланарны. Но это противоречит условию теоремы. Значит  $x=x_1$ ,  $y=y_1$  и  $z=z_1$ .

Теорема доказана.

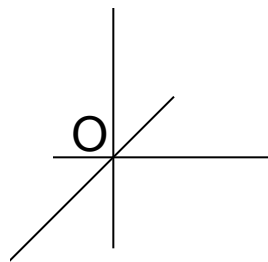
---

# Координаты точки и координаты вектора

---

Если через точку пространства проведены три попарно перпендикулярные прямые, на каждой из них выбрано направление и выбрана единица измерения, то говорят, что задана

**прямоугольная система координат**

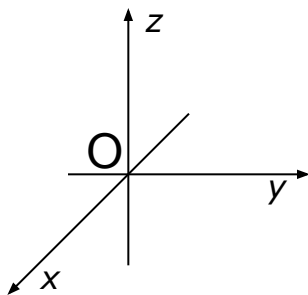


# Координаты точки и координаты вектора

---

Прямые с выбранными на них направлениями называют **осями координат**.

А их общая точка – **началом координат**



# Координаты точки и координаты вектора

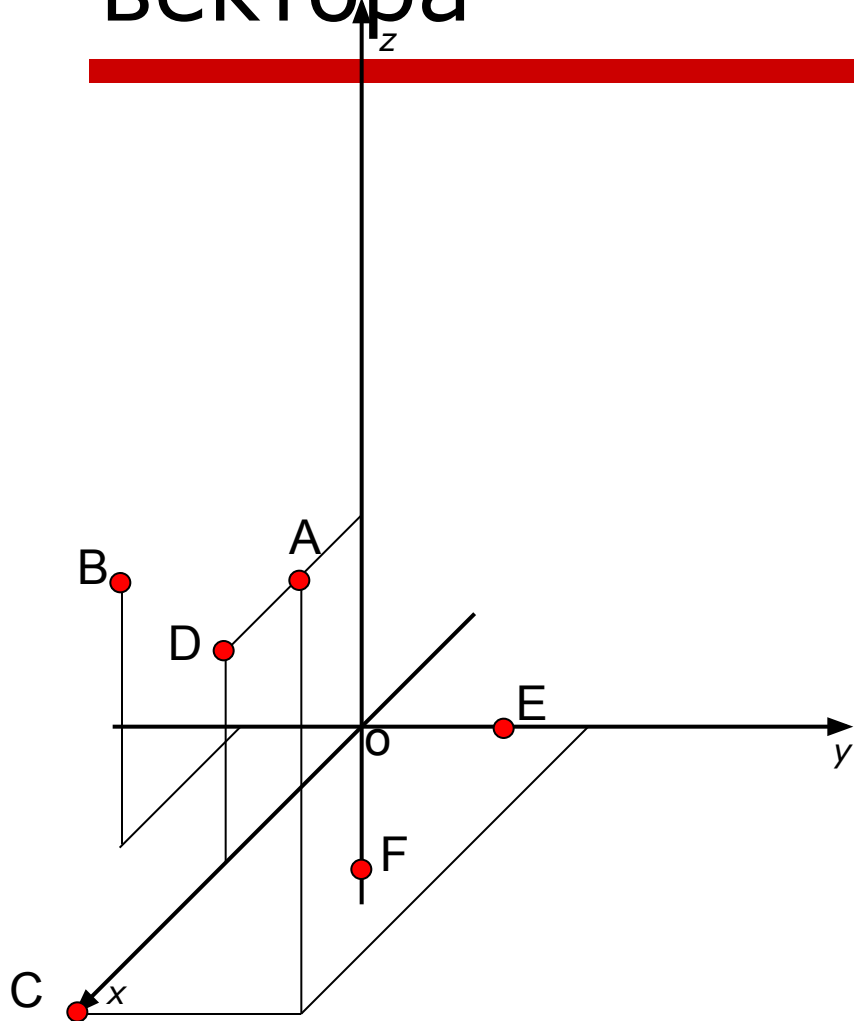
---

Точка  $O$  разделяет каждую из осей координат на два луча. Луч, направление которого совпадает с направлением оси, называется **положительной полуосью**, а другой луч – **отрицательной полуосью**.





# Координаты точки и координаты вектора



A (9;5;10)

B (4;-3;6)

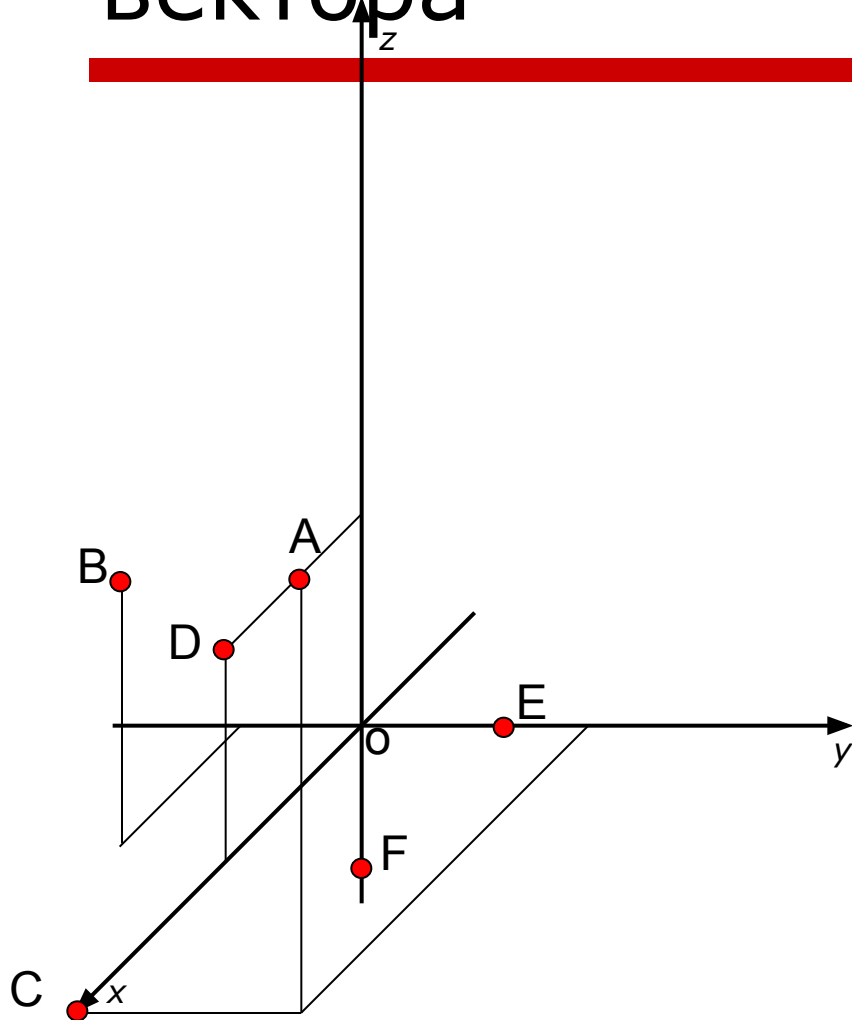
C (9;0;0)

D (4;0;5)

E (0;3;0)

F (0;0;-3)

# Координаты точки и координаты вектора



1) Дано:  $\vec{OE} \{0;0;-3\}$   
 $\vec{OF} \{0;3;0\}$   
Найти:  $\vec{OE} + \vec{OF}$

Решение:  
 $\vec{OE} + \vec{OF} = \{0;0;-3\} + \{0;3;0\} = \{0;3;-3\}$

2) Дано:  $\vec{OC} \{9;0;0\}$   
 $\vec{OD} \{4;0;5\}$   
Найти:  $\vec{OC} + \vec{OD}$

Решение:  
 $\vec{OC} + \vec{OD} = \{9;0;0\} + \{4;0;5\} = \{13;0;5\}$

3) Дано:  $\vec{OE} \{0;0;-3\}$   
 $\vec{OD} \{4;0;5\}$   
Найти:  $\vec{OE} + \vec{OD}$

Решение:  
 $\vec{OE} + \vec{OD} = \{0;0;-3\} + \{4;0;5\} = \{4;0;2\}$

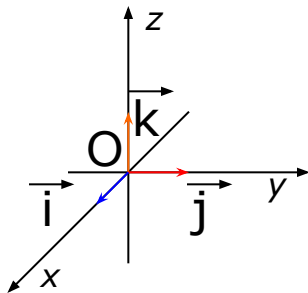
# Координаты точки и координаты вектора

---

Любой вектор можно разложить по координатным векторам, т.е. представить в виде

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Причем коэффициенты разложения  $x$ ,  $y$ ,  $z$  определяются единственным образом



# Координаты точки и координаты вектора

---

- 1<sup>0</sup> Каждая координата суммы двух или более векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов.
  - 2<sup>0</sup> Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов.
  - 3<sup>0</sup> Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число.
-

# Координаты точки и координаты вектора

---

Дано:  $\vec{a}\{1;-2;0\}$ ,  $\vec{b}\{0;3;-6\}$ ,  $\vec{c}\{-2;3;1\}$

Найти:  $\vec{p} = 2\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c}$

Решение:

по правилу 3<sup>0</sup>:  $2\vec{a}\{2;-4;0\}$ ,  $-\frac{1}{3}\vec{b}\{0;-1;2\}$

По правилу 10 можно вычислить координаты вектора  $\vec{p}$ .

$$\vec{p}\{2+0-2;-4-1+3;0+2+1\} \text{ или } \vec{p}\{0;-2;3\}$$

---

# Координаты точки и координаты вектора

---

Вектор, конец которого совпадает с данной точкой, а начало – с началом координат, называется **радиус-вектором** данной точки.

**Докажем, что координаты любой точки равны соответствующим координатам её радиус-вектора.**

---

# Координаты точки и координаты вектора

---

$$\vec{OM} = \vec{OM}_1 + \vec{OM}_2 + \vec{OM}_3$$

$\vec{\phantom{OM}} \quad \vec{\phantom{OM}} \quad \vec{\phantom{OM}} \quad \vec{\phantom{OM}}$

$$\vec{OM}_1 = \vec{OM}_1 * \vec{i} = x\vec{i}$$

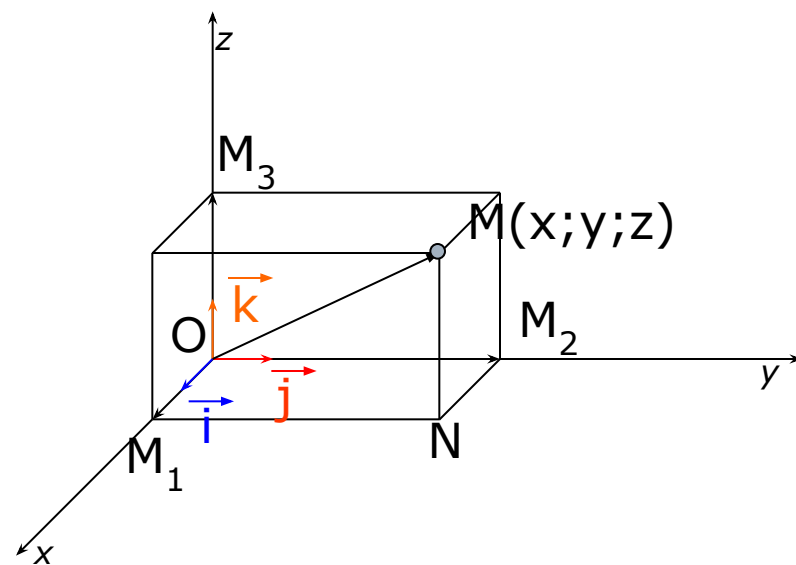
$$\vec{OM}_2 = \vec{OM}_2 * \vec{j} = y\vec{j}$$

$$\vec{OM}_3 = \vec{OM}_3 * \vec{k} = z\vec{k}$$

$\vec{\phantom{OM}} \quad \vec{\phantom{OM}} \quad \vec{\phantom{OM}} \quad \vec{\phantom{OM}}$

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{OM} \{x; y; z\}$$



Что и требовалось доказать.

---

# Координаты точки и координаты вектора

---

**Каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала.**

---



# Координаты точки и координаты вектора

---

Координаты середины отрезка:

Дано:  $A(x_1; y_1; z_1)$ ,  $B(x_2; y_2; z_2)$ ,  $C(x; y; z)$

$C$ -середина  $AB$ . Найти координаты  $C$ .

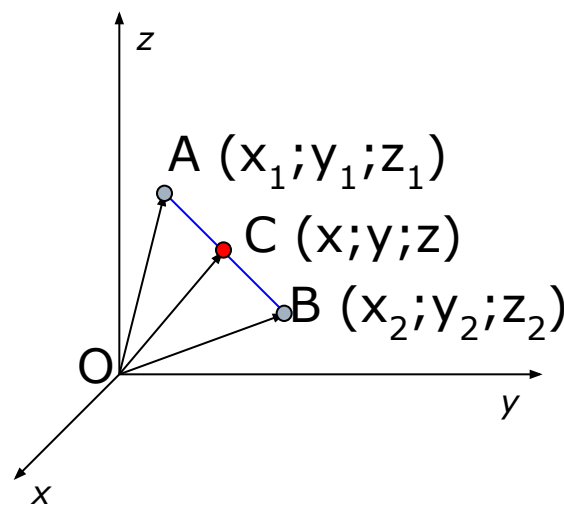
Решение:

$$OC = (OA + OB) / 2$$

$$\Rightarrow x = (x_1 + x_2) / 2$$

$$\Rightarrow y = (y_1 + y_2) / 2$$

$$\Rightarrow z = (z_1 + z_2) / 2$$



# Координаты точки и координаты вектора

---

**Каждая координата середины  
отрезка равна полусумме  
соответствующих координат его  
концов**

---

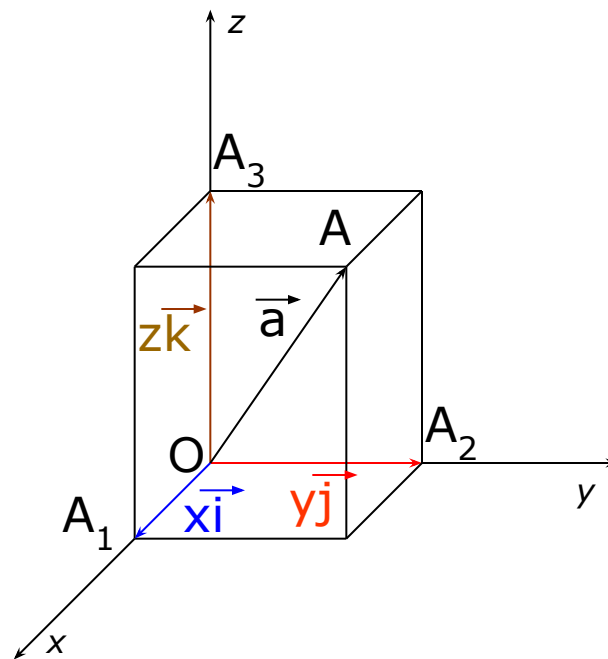
# Координаты точки и координаты вектора

---

Вычисление длины  
вектора по его  
координатам.

Дано:  $\vec{a}\{x;y;z\}$ .

Доказать:  $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$



# Координаты точки и координаты вектора

---

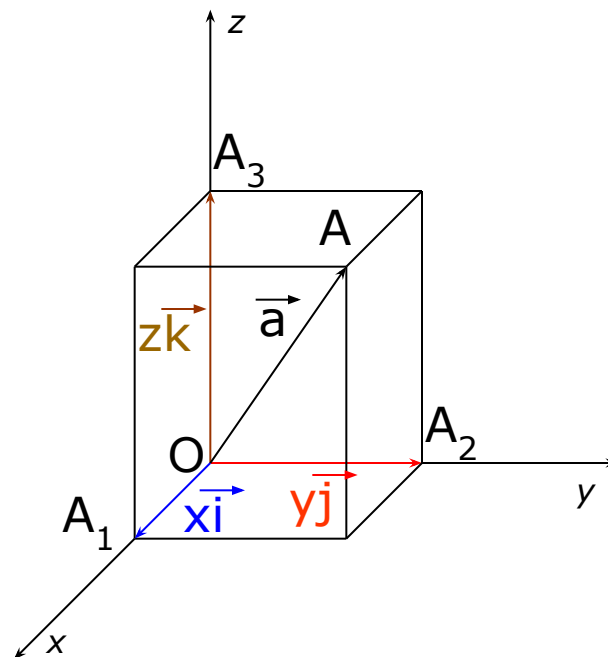
Решение:

$$\overrightarrow{OA_1} = x\vec{i}$$

$$\overrightarrow{OA_2} = y\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OA_3} = z\vec{k}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} = \\ &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{a}\end{aligned}$$



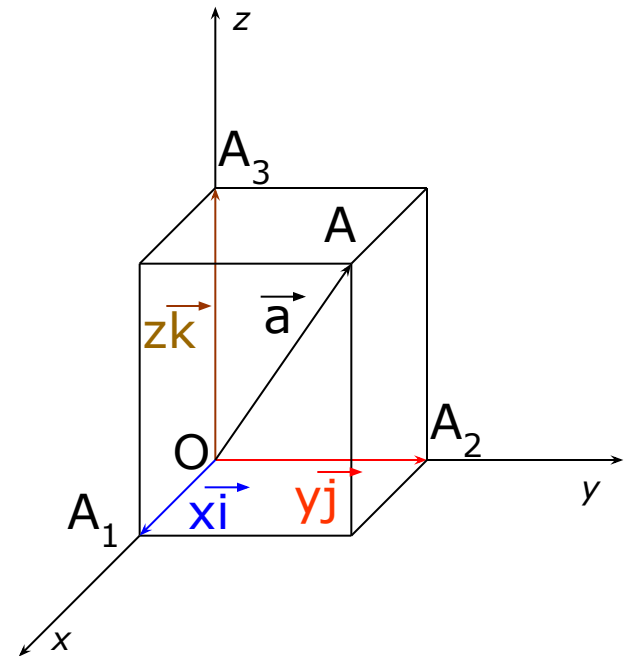
# Координаты точки и координаты вектора

---

$$|\vec{OA}| = \sqrt{|\vec{OA}_1|^2 + |\vec{OA}_2|^2 + |\vec{OA}_3|^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2 + |z|^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Что и требовалось доказать.



# Координаты точки и координаты вектора

---

Расстояние между двумя точками.

Дано:  $M_1(x_1; y_1; z_1)$ ,  $M_2(x_2; y_2; z_2)$

Решение:

$$d = \left| \overrightarrow{M_1 M_2} \right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Таким образом:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

---

# Скалярное произведение векторов

---

**Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.**

$$ab = |a| * |b| * \cos(\angle a \wedge b)$$

---

# Скалярное произведение векторов

---

**Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны**

---



# Скалярное произведение векторов

---

**Скалярный квадрат вектора (т.е.  
скалярное произведение  
вектора на себя) равен квадрату  
его длины.**

---

# Скалярное произведение векторов

---

**Косинус угла  $\alpha$  между ненулевыми векторами вычисляется по формуле:**

$$\cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} * \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

---

# Скалярное произведение векторов

---

Для любых векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  и любого числа  $k$  справедливы равенства:

**1<sup>o</sup>  $\vec{a}^2 \geq 0$ , причем  $\vec{a}^2 > 0$  при  $\vec{a} \neq 0$**

**2<sup>o</sup>  $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$**

**3<sup>o</sup>  $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$**

**4<sup>o</sup>  $k(\vec{a}\vec{b}) = (k\vec{a})\vec{b}$**

---

# Список использованной литературы

---

Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, Л. С. Киселёва, Э. Г. Позняк. Геометрия 10-11. «Просвещение», 2001.

А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын, Б. М. Ивлев, С. И. Шварцбурд, Алгебра и начала анализа. «Просвещение», 2000.

---