Выполнил ученик 11 «А» класса
(_____)Фомин Сергей Александрович
Г. Челябинск МОУ СОШ №30, 11 класс /Ул. Володарского 20, 263-14-54/

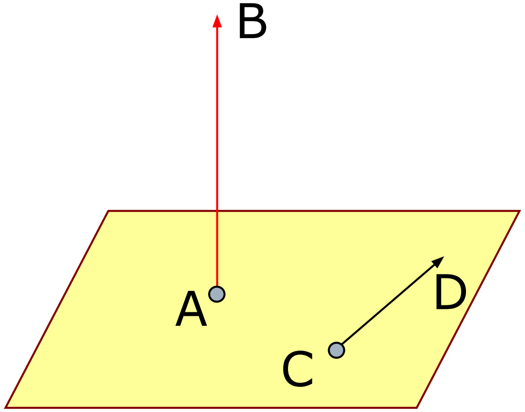
Полезная модель: Электронное приложение к учебнику Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, Л. С. Киселёва, Э. Г. Позняк. Геометрия 10-11. «Просвещение», 2011

Руководитель проекта: Змаева Елена Адольфовна, учитель математики высшей категории МОУ СОШ №30

Содержание

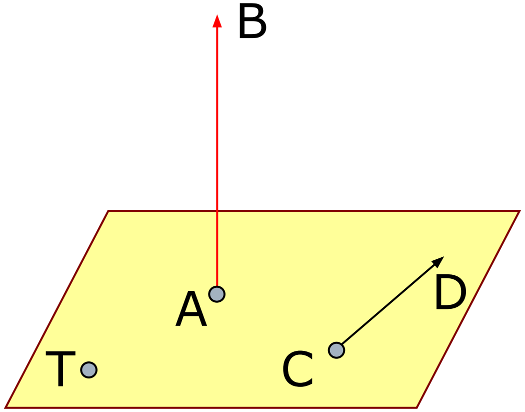
Понятие вектора

Отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой – концом, называется **вектором**



Понятие вектора

Любая точка пространства также может рассматриваться как вектор. Такой вектор называют **нулевым**.



Понятие вектора

Длиной ненулевого вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB.

Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ обозначается так:

$$\boxed{|\overrightarrow{AB}| \text{ или } |\vec{a}|}$$

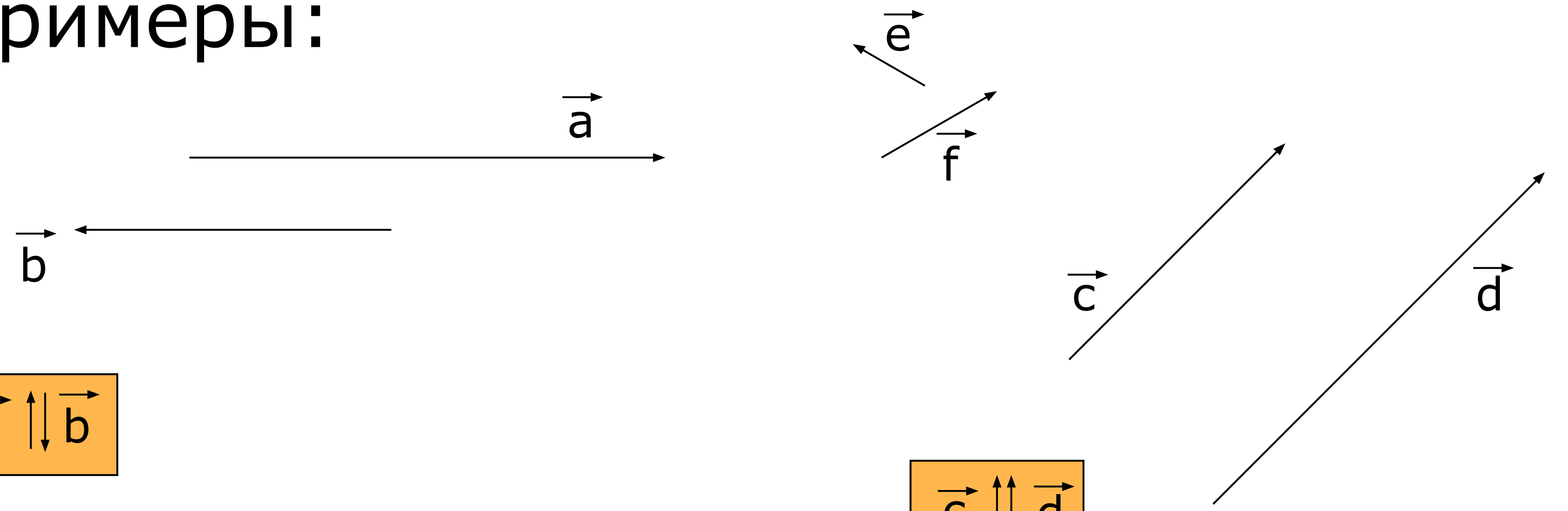
Понятие вектора

Два ненулевых вектора называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Если векторы коллинеарные и при этом их лучи совпадают, то такие векторы называют **сонаправлеными**, а если не совпадают – **противоположно направленными**.

Понятие вектора

Примеры:



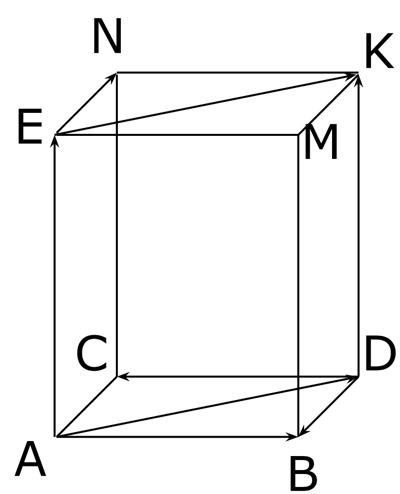
$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$

$\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{d}$

$\vec{e}$ $\vec{f}$ -Ни сонаправленные, ни противоположно направленные,
- так как не коллинеарны

Равенство векторов

Векторы называются равными, если они сонаправлены и их длины равны.



$AD \uparrow\uparrow EK$

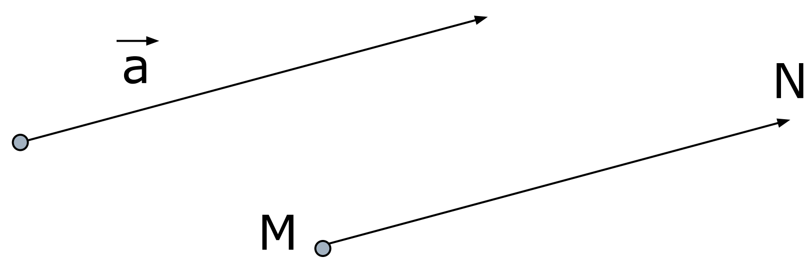
$AE \uparrow\uparrow DK$

$EN \uparrow\downarrow DB$

Равенство векторов

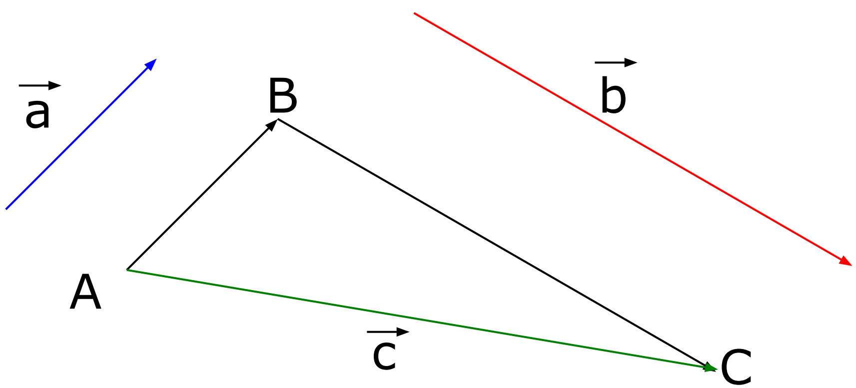
Если точка A – начало вектора $\vec{a}$, то говорят, что вектор $\vec{a}$ **отложен** от точки A.

От любой точки можно отложить вектор, равный данному и притом только один.



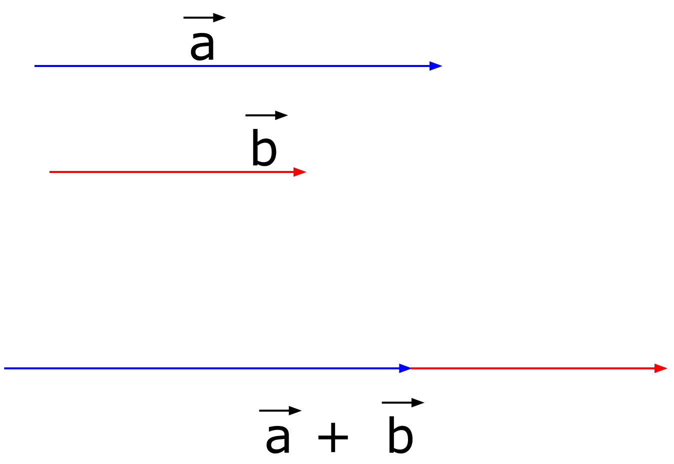
Сложение и вычитание векторов

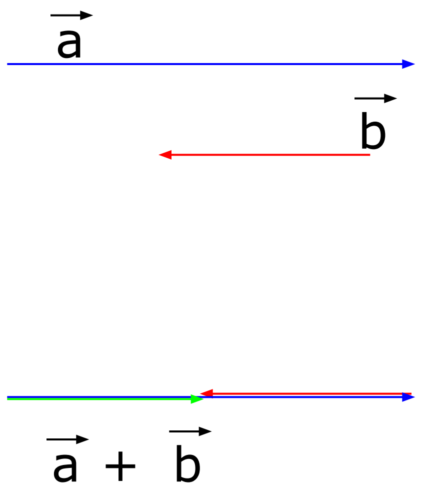
Правило треугольника:



$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$

Сложение и вычитание векторов





Сложение и вычитание векторов

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ справедливы равенства:

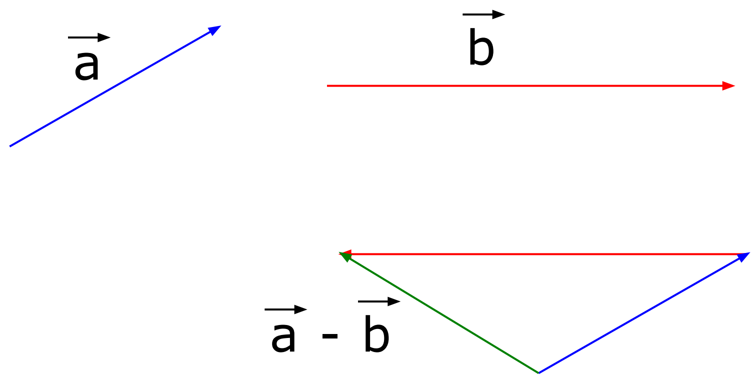
$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

Сложение и вычитание векторов

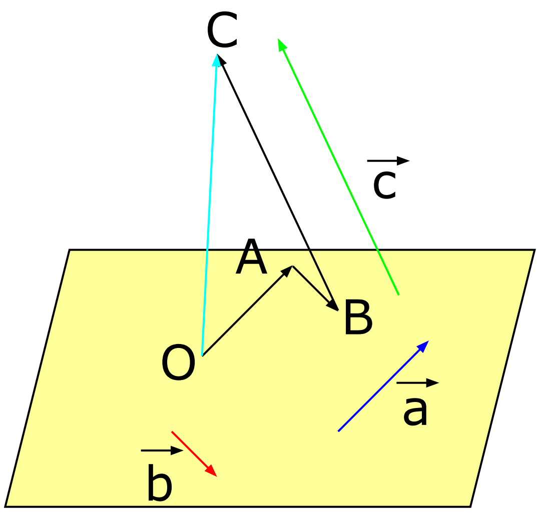
Разностью векторов а и $\vec{b}$ называется такой вектор, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.

Иными словами: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$



Сумма нескольких векторов

Сумма нескольких векторов не зависит от того, в каком порядке они складываются.



$\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

Умножение вектора на число

Произведением **ненулевого** вектора $\vec{a}$ на число $\vec{k}$ называется такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|k| * |\vec{a}|$, причем векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены при $k \geq 0$ и противоположно направлены при $k < 0$.

Произведением **нулевого** вектора на любое число считается нулевой вектор

Умножение вектора на число

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и любых чисел k, l справедливы равенства:

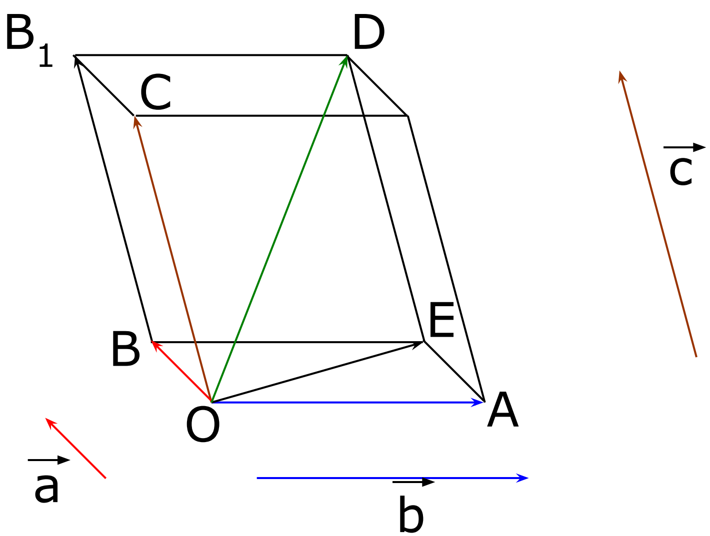
$$(kl)\vec{a}=k(l\vec{a})$$

$$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$$

$$(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$$

Компланарные векторы

Векторы называются компланарными, если при откладывании их от одной и той же они будут лежать в одной плоскости.



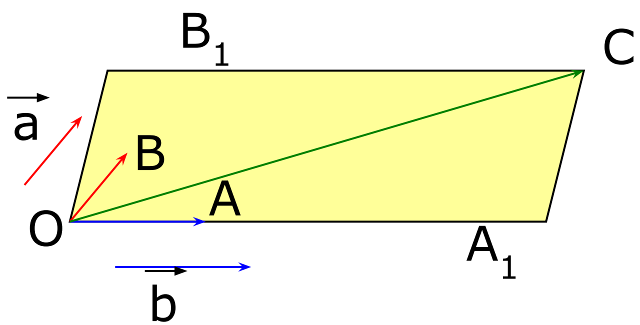
$\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OE}$ компланарны,
так как если отложить от точки O
Вектор, равный $\overrightarrow{BB_1}$, то получится
Вектор $\overrightarrow{OC}$, а векторы $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OE}$
Лежат в одной плоскости OCE

Компланарные векторы

Если вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. представить в виде:

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

Где x и y – некоторые числа, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.



$$\overrightarrow{OB_1} = y\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OA_1} = x\overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$$

Разложение вектора по трем некомпланарным векторам

Теорема:

Любой вектор можно разложить по трем некомпланарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Разложение вектора по трем некомпланарным векторам

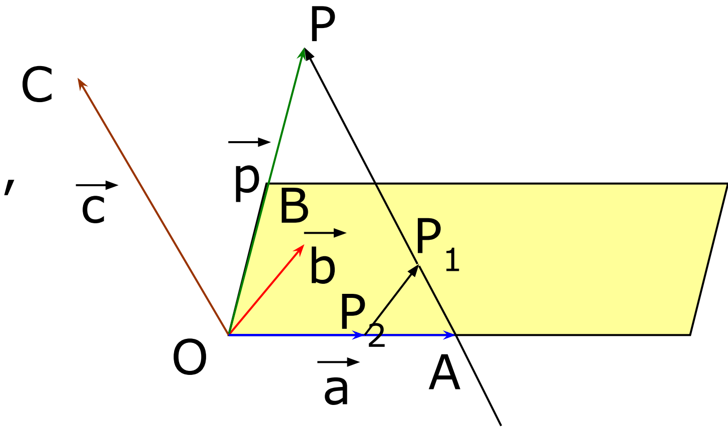
Доказательство:

Дано:
$\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ – некомпланарные векторы, $OA=\vec{a}$, $OB=\vec{b}$, $OC=\vec{c}$, $OP=\vec{p}$

1) Разложим вектор $\vec{p}$ по правилу многоугольника: $OP=OP_2 + P_2P_1 + P_1P$

2) Векторы коллинеарны, поэтому можно записать так:
$OP=x*OA + y*OB + z*OC$

3) Допустим, что вектор можно разложить еще по трем числам: x_1,y_1,z_1. Тогда, используя свойство действий над векторами, получим:



$$\boxed{4)\ 0=(x-x1)\vec{a} + (y-y1)\vec{b} + (z-z1)\vec{c}}$$

Разложение вектора по трем некомпланарным векторам

Это равенство выполняется только тогда, когда $x-x_1=0$, $y-y_1=0$, $z-z_1=0$.

Отсюда следует:

5) $$\boxed{\vec{c} = -\frac{x-x_1}{z-z_1}\vec{a} - \frac{y-y_1}{z-z_1}\vec{b}}$$

Из этой формулы следует, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Но это противоречит условию теоремы. Значит $x=x_1$, $y=y_1$ и $z=z_1$.

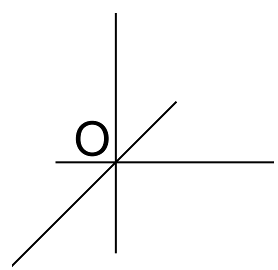
Теорема доказана.

Координаты точки и координаты вектора

Если через точку пространства проведены три попарно перпендикулярные прямые,

На каждой из них выбрано направление и выбрана единица измерения, то говорят, что задана

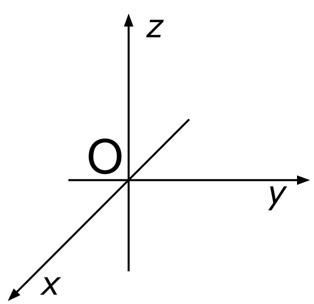
прямоугольная система координат



Координаты точки и координаты вектора

Прямые с выбранными на них направлениями называют **осями координат.**

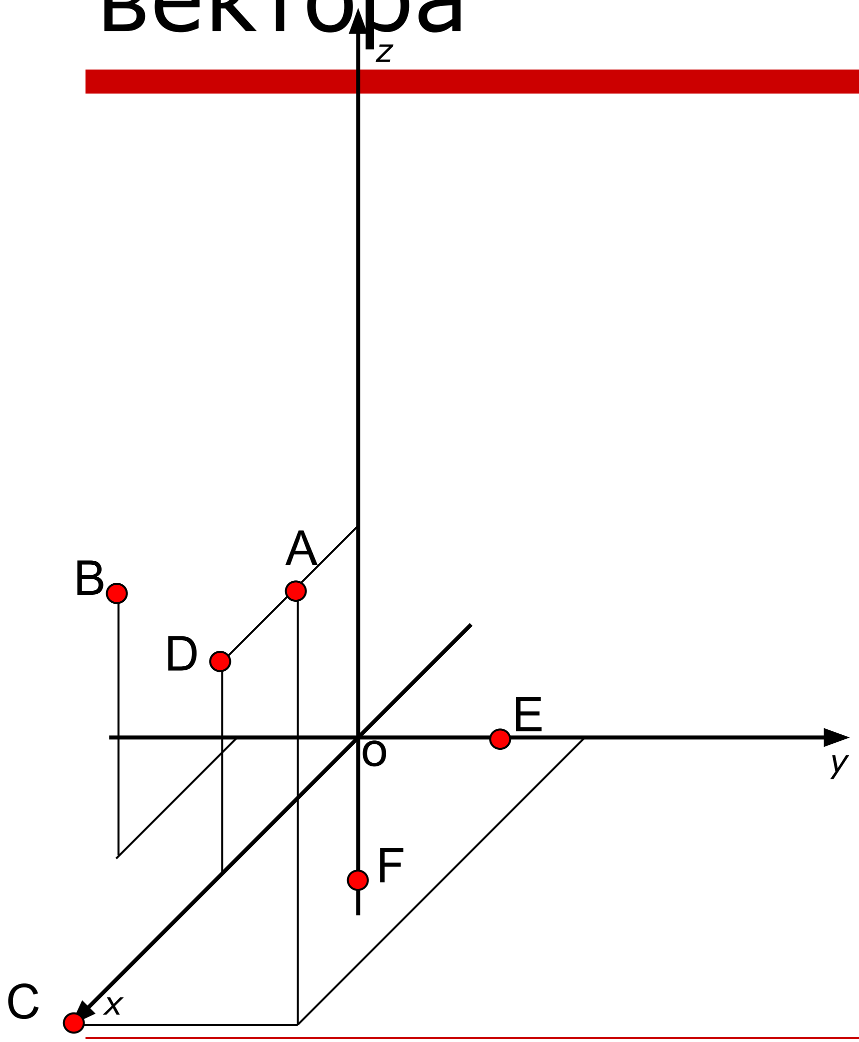
А их общая точка – **началом координат**



Координаты точки и координаты вектора

Точка О разделяет каждую из осей координат на два луча. Луч, направление которого совпадает с направлением оси, называется **положительной полуосью**, а другой луч – **отрицательной полуосью**.

Координаты точки и координаты вектора



A (9;5;10)

B (4;-3;6)

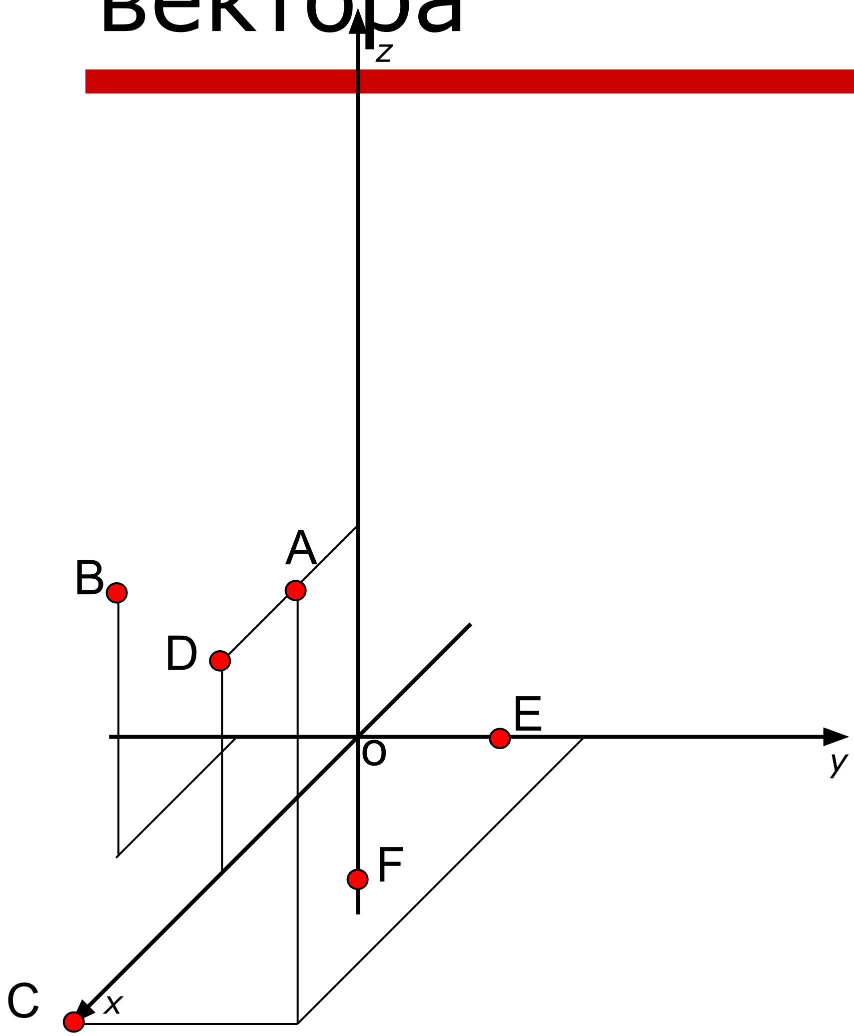
C (9;0;0)

D (4;0;5)

E (0;3;0)

F (0;0;-3)

Координаты точки и координаты вектора



1) Дано: $\overrightarrow{OE}$ {0;0;-3}
$\overrightarrow{OF}$ {0;3;0}
Найти: $\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$

Решение:
$\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$ = {0;0;-3} + {0;3;0} = {0;3;-3}

2) Дано: $\overrightarrow{OC}$ {9;0;0}
$\overrightarrow{OD}$ {4;0;5}
Найти: $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$

Решение:
$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ = {9;0;0} + {4;0;5} = {13;0;5}

3) Дано: $\overrightarrow{OE}$ {0;0;-3}
$\overrightarrow{OD}$ {4;0;5}
Найти: $\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OD}$

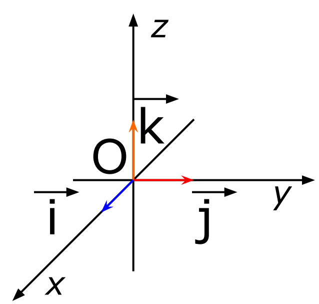
Решение:
$\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OD}$ = {0;0;-3} + {4;0;5} = {4;3;5}

Координаты точки и координаты вектора

Любой вектор можно разложить по координатным векторам, т.е. представить в виде

$$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

Причем коэффициенты разложения x, y, z определяются единственным образом



Координаты точки и координаты вектора

1^0 Каждая координата суммы двух или более векторов равна сумме соответствующий координат этих векторов.

2^0 Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов.

3^0 Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число.

Координаты точки и координаты вектора

Дано: $\vec{a}\{1;-2;0\}$, $\vec{b}\{0;3;-6\}$, $\vec{c}\{-2;3;1\}$

Найти: $\vec{p} = 2\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c}$

Решение:

по правилу 3^0: $2\vec{a}\{2;-4;0\}$, $-\frac{1}{3}\vec{b}\{0;-1;2\}$

По правилу 10 можно вычислить координаты вектора p.

$\vec{p}\{2+0-2;-4-1+3;0+2+1\}$ или $\vec{p}\{0;-2;3\}$

Координаты точки и координаты вектора

Вектор, конец которого совпадает с данной точкой, а начало – с началом координат, называется **радиус-вектором** данной точки.

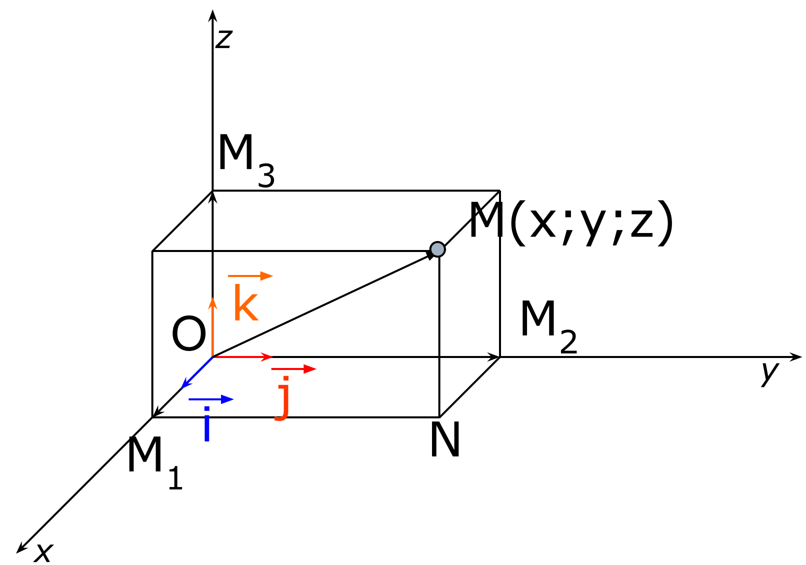
Докажем, что координаты любой точки равны соответствующим координатам её радиус-вектора.

Координаты точки и координаты вектора

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}+\overrightarrow{OM_3}$

$\overrightarrow{OM_1}=\overrightarrow{OM_1}*\vec{i}=x\vec{i}$
$\overrightarrow{OM_2}=\overrightarrow{OM_2}*\vec{j}=y\vec{j}$
$\overrightarrow{OM_3}=\overrightarrow{OM_3}*\vec{k}=z\vec{k}$

$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$
$\overrightarrow{OM}\{x;y;z\}$



Что и требовалось доказать.

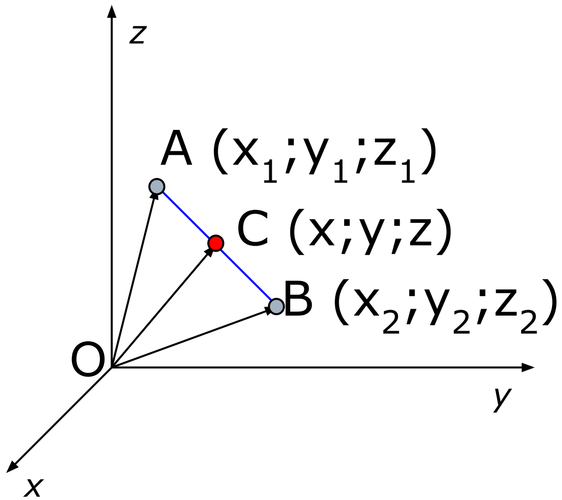
Координаты точки и координаты вектора

Каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала.

Координаты точки и координаты вектора

Координаты середины отрезка:
Дано: $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$, $C(x;y;z)$
С-середина АВ. Найти координаты С.

Решение:
$OC=(OA+OB)/2$



- $\Rightarrow$ $x=(x_1+x_2)/2$
- $\Rightarrow$ $y=(y_1+y_2)/2$
- $\Rightarrow$ $z=(z_1+z_2)/2$

Координаты точки и координаты вектора

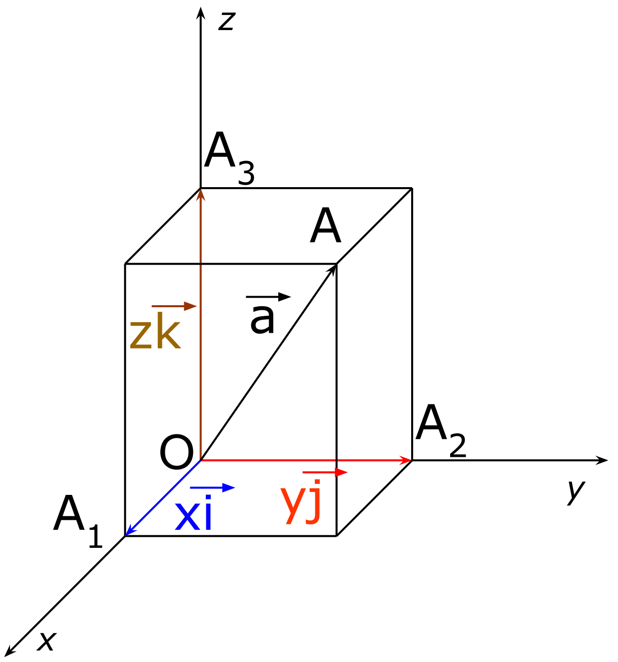
Каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов

Координаты точки и координаты вектора

Вычисление длины вектора по его координатам.

Дано: $\vec{a}\{x;y;z\}$.

Доказать: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$



Координаты точки и координаты вектора

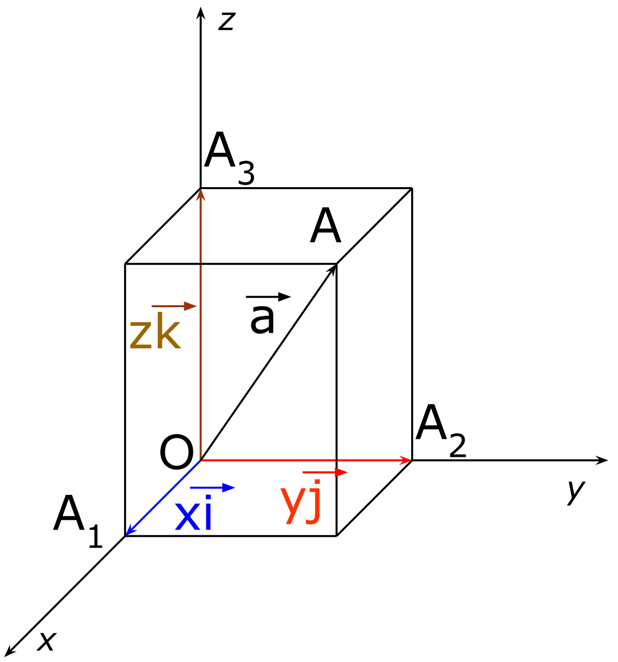
Решение:

$\overrightarrow{OA_1} = x\vec{i}$

$\overrightarrow{OA_2} = y\vec{j}$

$\overrightarrow{OA_3} = z\vec{k}$

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} =$
$= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{a}$

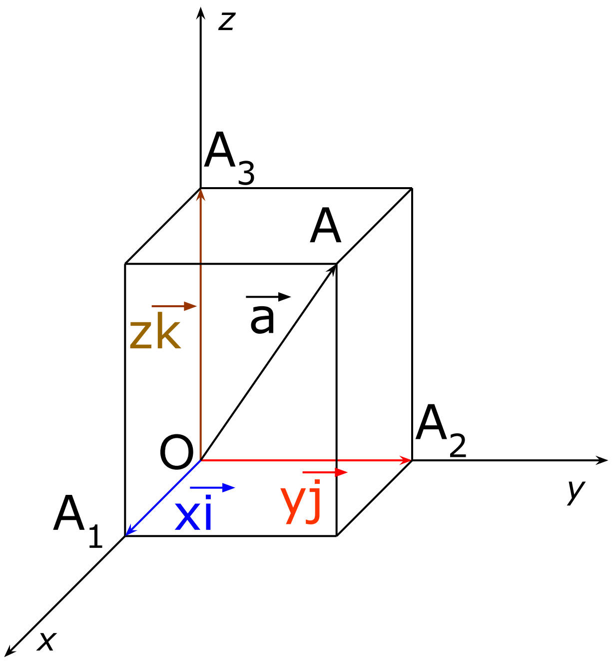


Координаты точки и координаты вектора

$$\left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{\left|\overrightarrow{OA_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OA_2}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OA_3}\right|^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\vec{a}\right| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2 + |z|^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Что и требовалось доказать.



Координаты точки и координаты вектора

Расстояние между двумя точками.

Дано: $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$

Решение:

$$d = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Таким образом:

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b}| * \cos(\vec{a} \wedge \vec{b})$$

Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны

Скалярное произведение векторов

Скалярный квадрат вектора (т.е. скалярное произведение вектора на себя) равен квадрату его длины.

Скалярное произведение векторов

Косинус угла α между ненулевыми векторами вычисляется по формуле:

$$\cos a = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2} + z_1^{\ 2}} * \sqrt{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2} + z_2^{\ 2}}}$$

Скалярное произведение векторов

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и любого числа k справедливы равенства:

1^0 $\vec{a}^2 \geq 0$, причем $\vec{a}^2 > 0$ при $\vec{a} \neq 0$

2^0 $\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{a}$

3^0 $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}$

4^0 $k(\vec{a}\vec{b})=(k\vec{a})\vec{b}$

Список использованной литературы

Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, Л. С. Киселёва, Э. Г. Позняк. Геометрия 10-11. «Просвещение», 2001.

А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын, Б. М. Ивлев, С. И. Шварцбурд, Алгебра и начала анализа. «Просвещение», 2000.