Выполнил ученик 11 «А» класса
(_____)Фомин Сергей Александрович
Г. Челябинск МОУ СОШ №30, 11 класс /Ул. Володарского 20, 263-14-54/

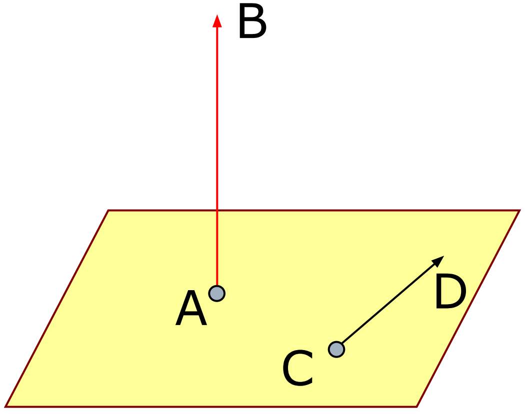
# Полезная модель: Электронное приложение к учебнику Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, Л. С. Киселёва, Э. Г. Позняк. Геометрия 10-11. «Просвещение», 2011

**Руководитель проекта:** Змаева Елена Адольфовна, учитель математики высшей категории МОУ СОШ №30

# Содержание

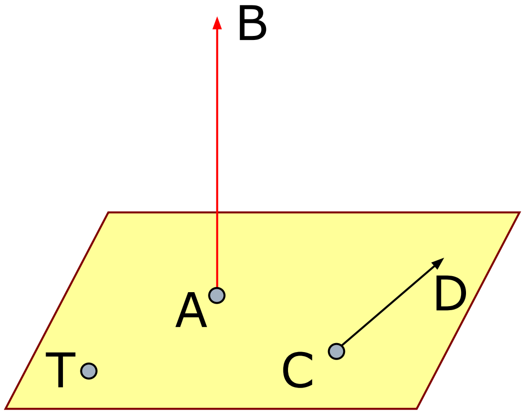
# Понятие вектора

Отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой – концом, называется **вектором**



# Понятие вектора

Любая точка пространства также может рассматриваться как вектор. Такой вектор называют **нулевым**.



# Понятие вектора

Длиной ненулевого вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка АВ.

Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ обозначается так:

$|\overrightarrow{AB}|$ или $|\vec{a}|$

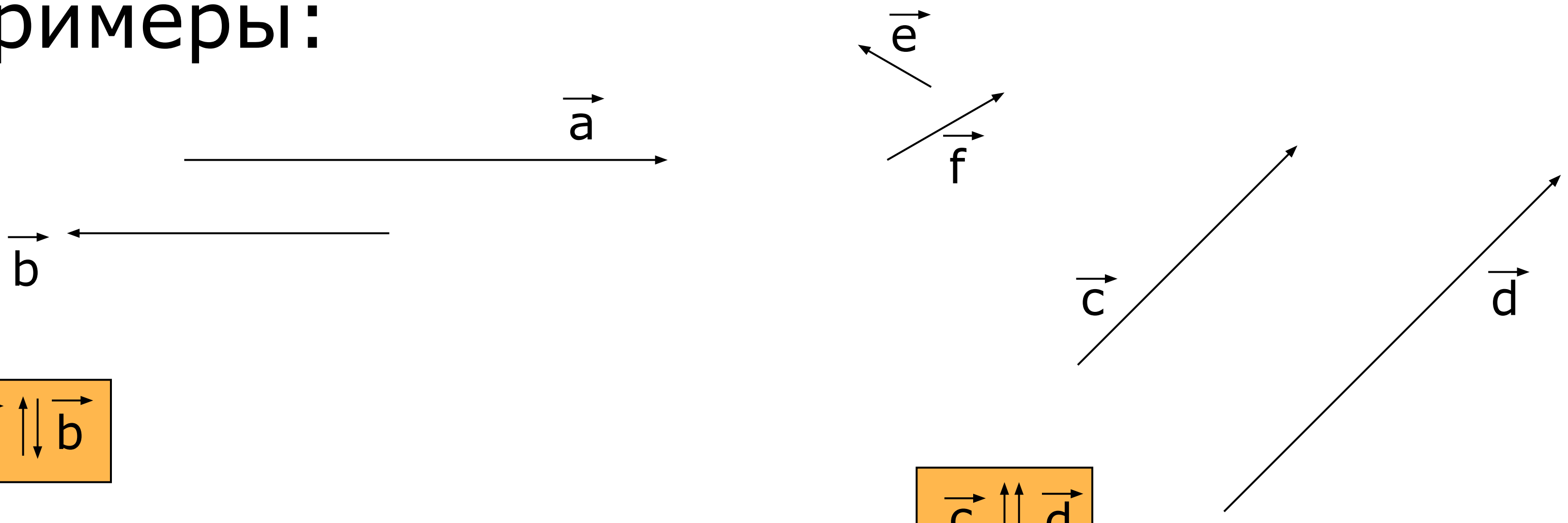
# Понятие вектора

Два ненулевых вектора называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Если векторы коллинеарные и при этом их лучи совпадают, то такие векторы называют **сонаправлеными**, а если не совпадают – **противоположно направленными**.

# Понятие вектора

Примеры:




$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$

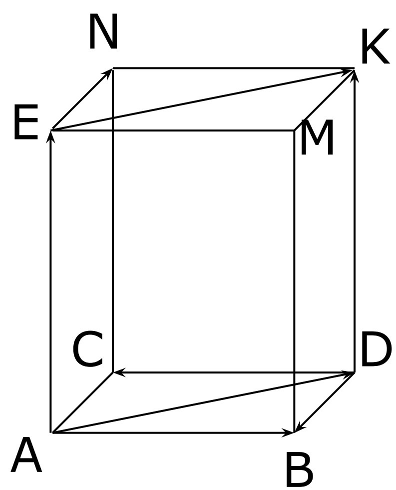
$\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{d}$

$\vec{e}$
$\vec{f}$

-Ни сонаправленные, ни противоположно направленные,
- так как не коллинеарны

# Равенство векторов

Векторы называются равными, если они сонаправлены и их длины равны.




$AD \upuparrows EK$

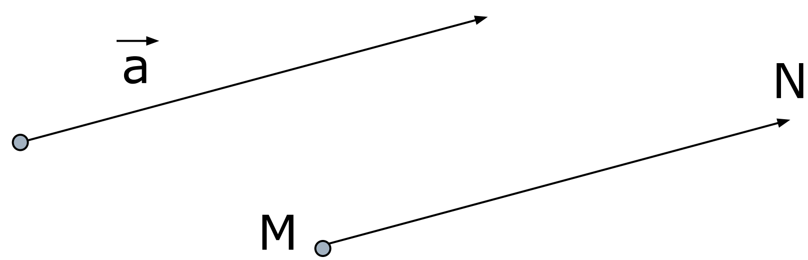
$AE \upuparrows DK$

$EN \uparrow\downarrow DB$

# Равенство векторов

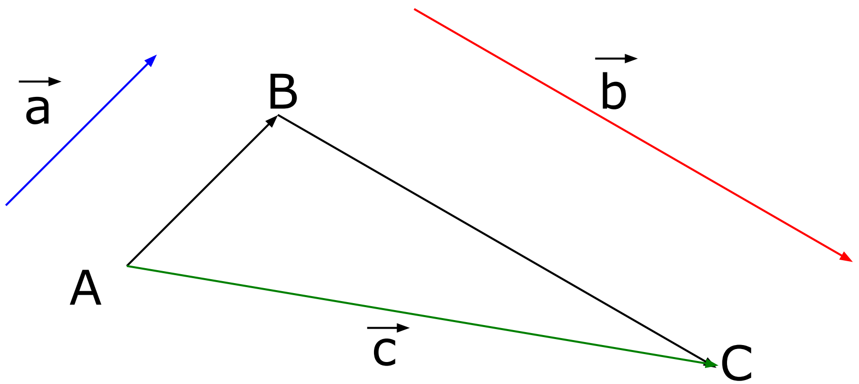
Если точка A – начало вектора $\vec{a}$, то говорят, что вектор $\vec{a}$ **отложен** от точки A.

**От любой точки можно отложить вектор, равный данному и притом только один.**



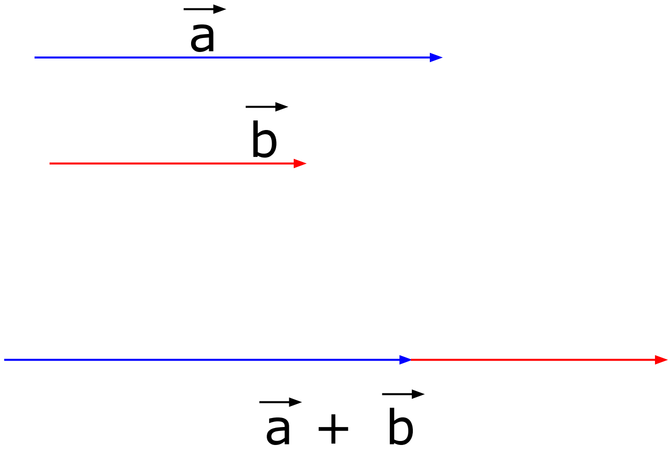
# Сложение и вычитание векторов

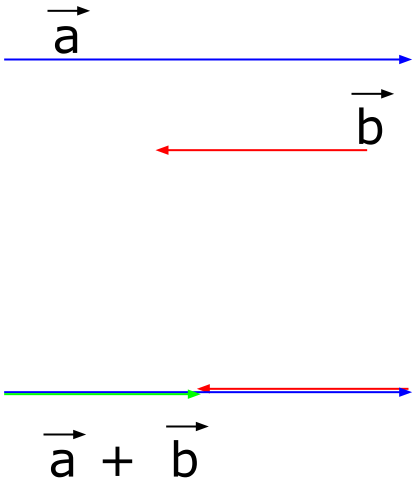
Правило треугольника:




$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$

# Сложение и вычитание векторов



# Сложение и вычитание векторов

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ справедливы равенства:

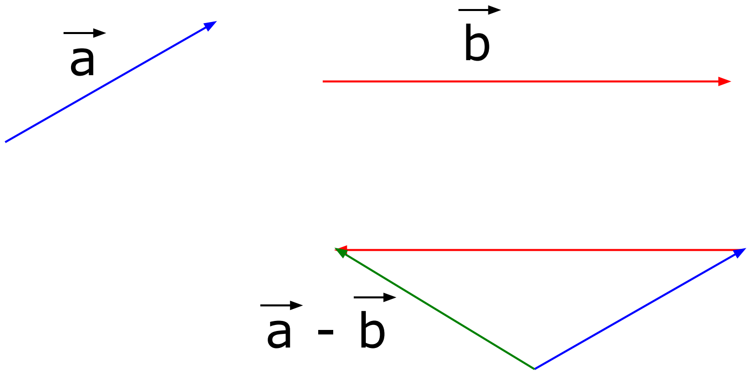
$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

# Сложение и вычитание векторов

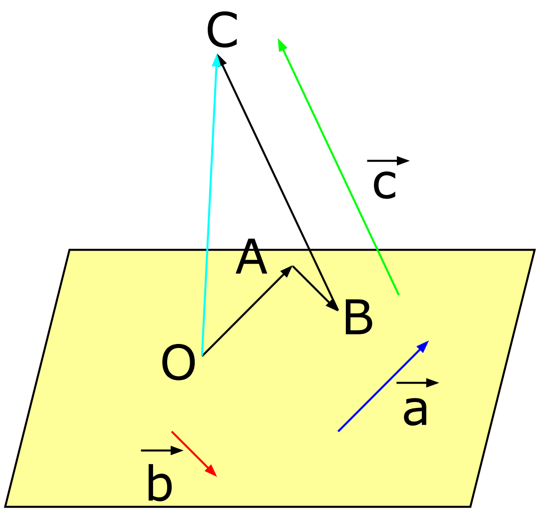
Разностью векторов а и $\vec{b}$ называется такой вектор, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.

Иными словами: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$



# Сумма нескольких векторов

Сумма нескольких векторов не зависит от того, в каком порядке они складываются.




$\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

# Умножение вектора на число

Произведением **ненулевого** вектора $\vec{a}$ на число $\vec{k}$ называется такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|k| * |\vec{a}|$, причем векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены при $k \geq 0$ и противоположно направлены при $k < 0$.

Произведением **нулевого** вектора на любое число считается нулевой вектор

# Умножение вектора на число

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и любых чисел k, l справедливы равенства:

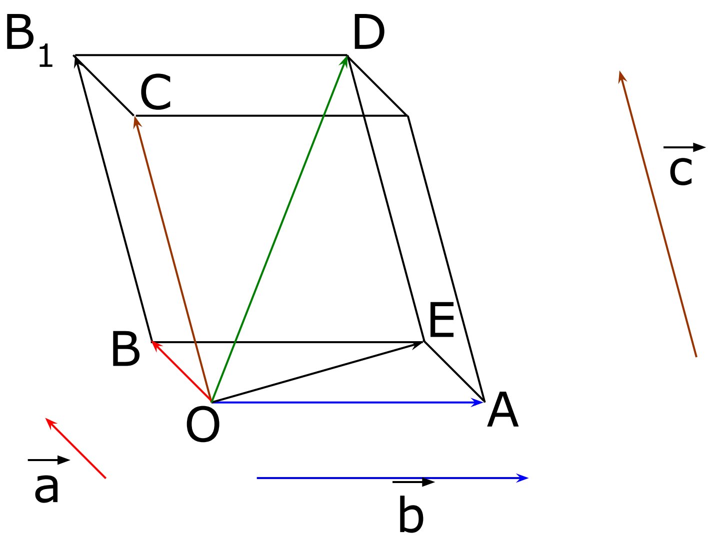
$$(kl)\vec{a}=k(l\vec{a})$$

$$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$$

$$(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$$

# Компланарные векторы

Векторы называются компланарными, если при откладывании их от одной и той же они будут лежать в одной плоскости.



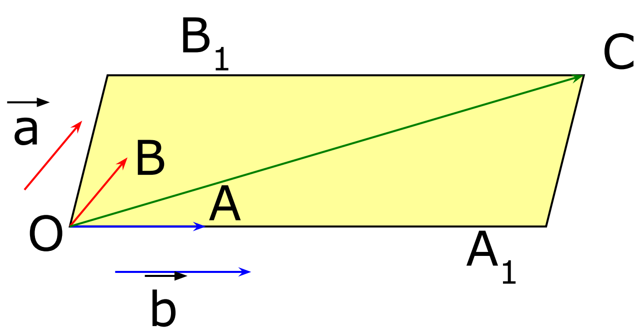

$\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OE}$ компланарны,
так как если отложить от точки O
Вектор, равный $\overrightarrow{BB_1}$, то получится
Вектор $\overrightarrow{OC}$, а векторы $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OE}$
Лежат в одной плоскости OCE

# Компланарные векторы

Если вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. представить в виде:

$$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$$

Где x и y – некоторые числа, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.




$$\overrightarrow{OB_1}=y\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OA_1}=x\overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$$

# Разложение вектора по трем некомпланарным векторам

Теорема:

**Любой вектор можно разложить по трем некомпланарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.**

# Разложение вектора по трем некомпланарным векторам

## Доказательство:

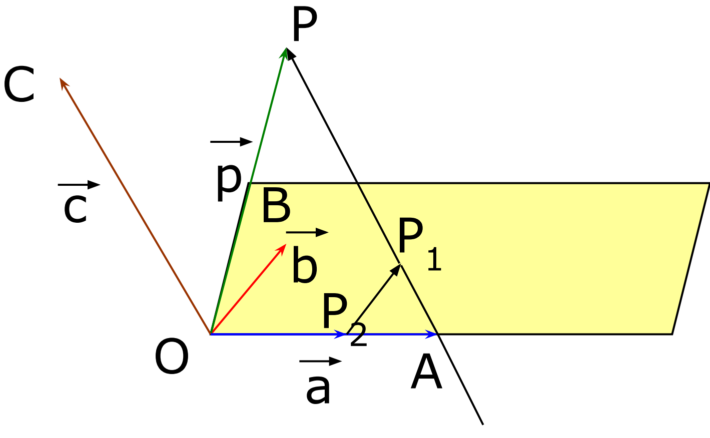
Дано:
$\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ – некомпланарные векторы, $OA=\vec{a}$, $OB=\vec{b}$, $OC=\vec{c}$, $OP=\vec{p}$

1) Разложим вектор $\vec{p}$ по правилу многоугольника: $OP=OP_2 + P_2P_1 + P_1P$

2) Векторы коллинеарны, поэтому можно записать так:
$OP=x*OA + y*OB + z*OC$

3) Допустим, что вектор можно разложить еще по трем числам: $x_1,y_1,z_1$. Тогда, используя свойство действий над векторами, получим:

4) $0=(x-x1)\vec{a} + (y-y1)\vec{b} + (z-z1)\vec{c}$



# Разложение вектора по трем некомпланарным векторам

Это равенство выполняется только тогда, когда $x-x_1=0$, $y-y_1=0$, $z-z_1=0$.

Отсюда следует:

5) $$\vec{c} = -\frac{x-x_1}{z-z_1}\vec{a} - \frac{y-y_1}{z-z_1}\vec{b}$$

Из этой формулы следует, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Но это противоречит условию теоремы. Значит $x=x_1$, $y=y_1$ и $z=z_1$.

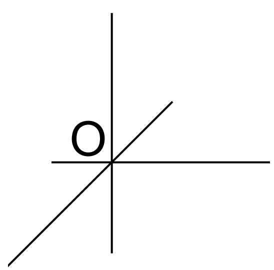
Теорема доказана.

# Координаты точки и координаты вектора

Если через точку пространства проведены три попарно перпендикулярные прямые,

На каждой из них выбрано направление и выбрана единица измерения, то говорят, что задана

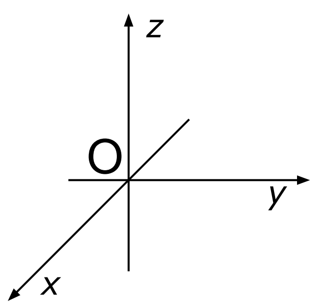
**прямоугольная система координат**



# Координаты точки и координаты вектора

Прямые с выбранными на них направлениями называют **осями координат.**

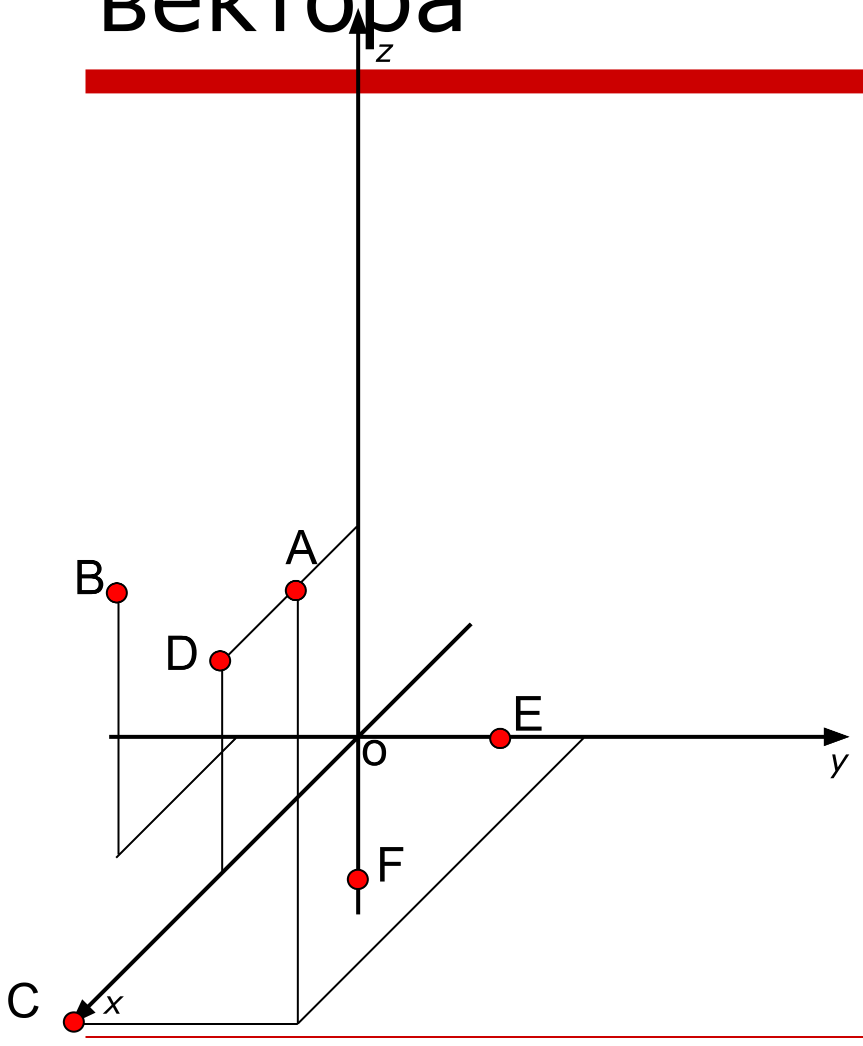
А их общая точка – **началом координат**



# Координаты точки и координаты вектора

Точка О разделяет каждую из осей координат на два луча. Луч, направление которого совпадает с направлением оси, называется **положительной полуосью**, а другой луч – **отрицательной полуосью**.

# Координаты точки и координаты вектора




A (9;5;10)

B (4;-3;6)

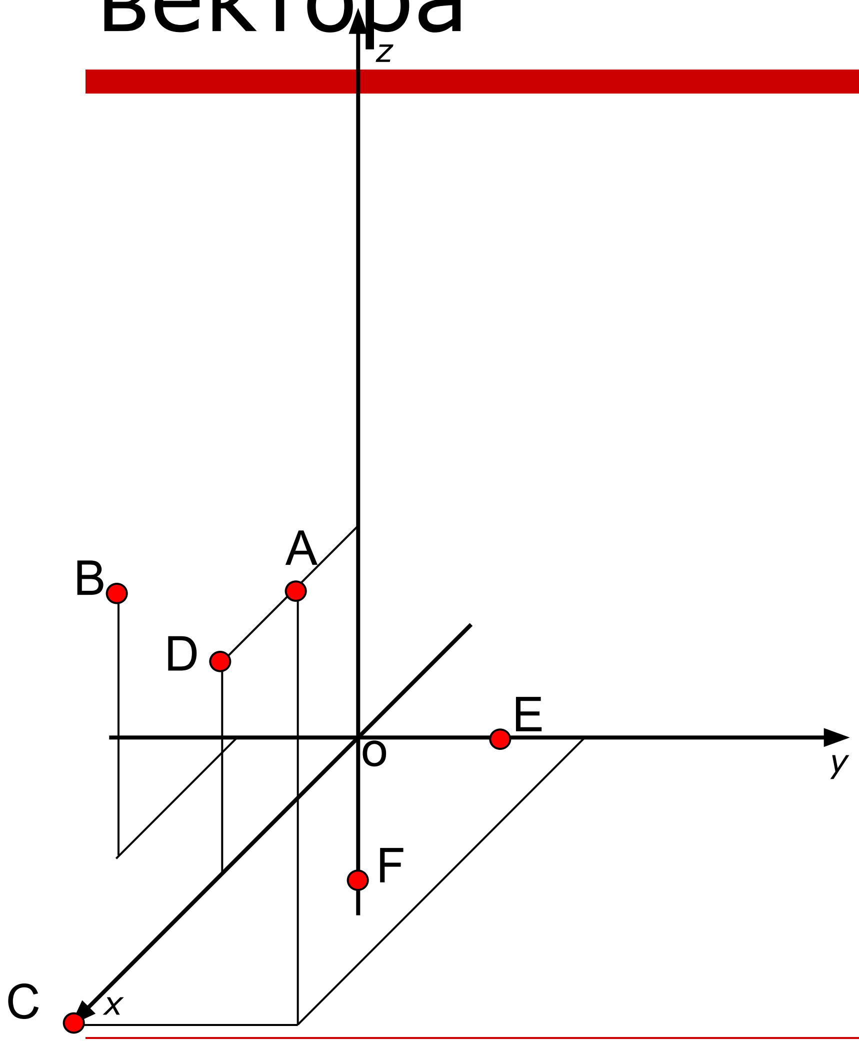
C (9;0;0)

D (4;0;5)

E (0;3;0)

F (0;0;-3)

# Координаты точки и координаты вектора




1) Дано: $\overrightarrow{OE}$ {0;0;-3}

$\overrightarrow{OF}$ {0;3;0}

Найти: $\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$

Решение:

$\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$ = {0;0;-3} + {0;3;0} = {0;3;-3}

2) Дано: $\overrightarrow{OC}$ {9;0;0}

$\overrightarrow{OD}$ {4;0;5}

Найти: $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$

Решение:

$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ = {9;0;0} + {4;0;5} = {13;0;5}

3) Дано: $\overrightarrow{OE}$ {0;0;-3}

$\overrightarrow{OD}$ {4;0;5}

Найти: $\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OD}$

Решение:

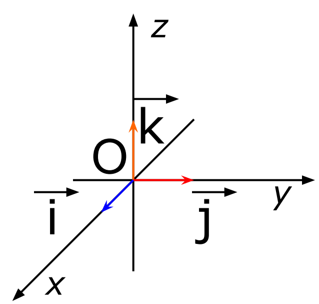
$\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OD}$ = {0;0;-3} + {4;0;5} = {4;3;5}

# Координаты точки и координаты вектора

Любой вектор можно разложить по координатным векторам, т.е. представить в виде

$$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

Причем коэффициенты разложения x, y, z определяются единственным образом



# Координаты точки и координаты вектора

$1^0$ Каждая координата суммы двух или более векторов равна сумме соответствующий координат этих векторов.

$2^0$ Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов.

$3^0$ Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число.

# Координаты точки и координаты вектора

Дано: $\vec{a}\{1;-2;0\}$, $\vec{b}\{0;3;-6\}$, $\vec{c}\{-2;3;1\}$

Найти: $\vec{p} = 2\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c}$

Решение:

по правилу $3^0$: $2\vec{a}\{2;-4;0\}$, $-\frac{1}{3}\vec{b}\{0;-1;2\}$

По правилу 10 можно вычислить координаты вектора p.

$\vec{p}\{2+0-2;-4-1+3;0+2+1\}$ или $\vec{p}\{0;-2;3\}$

# Координаты точки и координаты вектора

Вектор, конец которого совпадает с данной точкой, а начало – с началом координат, называется **радиус-вектором** данной точки.

**Докажем, что координаты любой точки равны соответствующим координатам её радиус-вектора.**

# Координаты точки и координаты вектора

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}$

$\overrightarrow{OM_1}=\overrightarrow{OM_1}*\vec{i}=x\vec{i}$

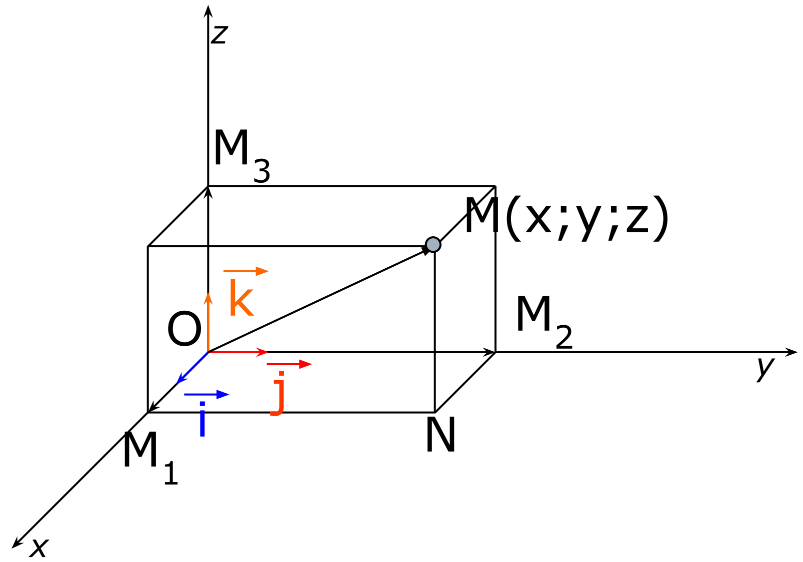
$\overrightarrow{OM_2}=\overrightarrow{OM_2}*\vec{j}=y\vec{j}$

$\overrightarrow{OM_3}=\overrightarrow{OM_3}*\vec{k}=z\vec{k}$

$\overrightarrow{OM}=x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\overrightarrow{OM}\{x;y;z\}$

Что и требовалось доказать.



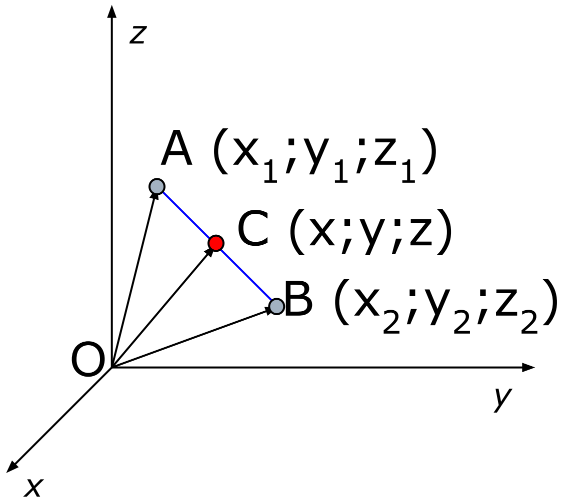
# Координаты точки и координаты вектора

**Каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала.**

# Координаты точки и координаты вектора

Координаты середины отрезка:
Дано: $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$, $C(x;y;z)$
C-середина AB. Найти координаты C.

Решение:
$OC=(OA+OB)/2$




$\Rightarrow$ $x=(x_1+x_2)/2$

$\Rightarrow$ $y=(y_1+y_2)/2$

$\Rightarrow$ $z=(z_1+z_2)/2$

# Координаты точки и координаты вектора

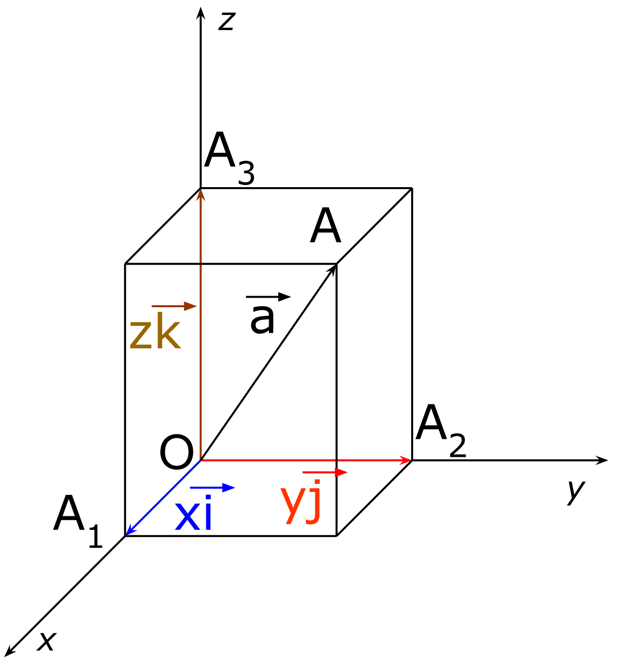
**Каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов**

# Координаты точки и координаты вектора

Вычисление длины вектора по его координатам.

Дано: $\vec{a}\{x;y;z\}$.

Доказать: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$



# Координаты точки и координаты вектора

Решение:

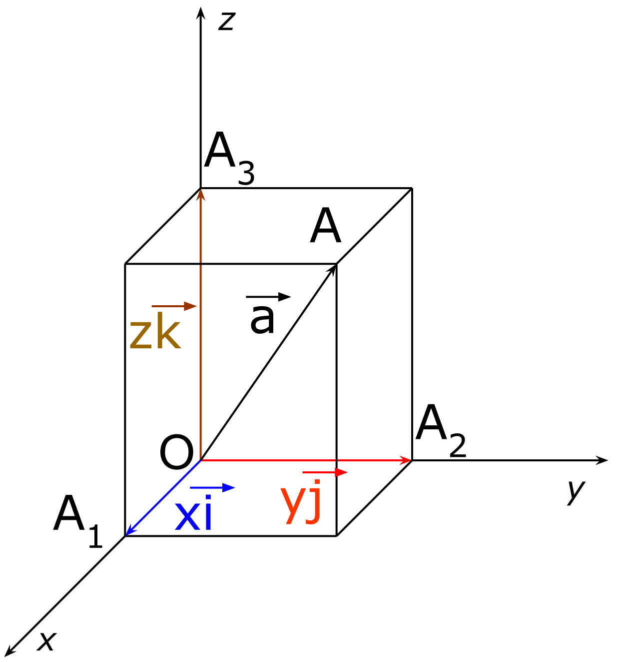
$\overrightarrow{OA_1}=x\vec{i}$

$\overrightarrow{OA_2}=y\vec{j}$

$\overrightarrow{OA_3}=z\vec{k}$

$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}=$

$=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=\vec{a}$

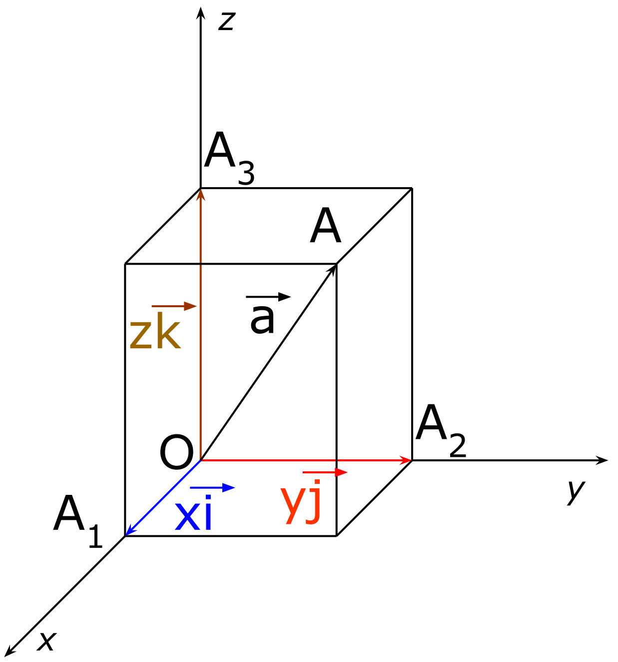


# Координаты точки и координаты вектора

$$\left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{\left|\overrightarrow{OA_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OA_2}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OA_3}\right|^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\vec{a}\right| = \sqrt{\left|x\right|^2 + \left|y\right|^2 + \left|z\right|^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Что и требовалось доказать.



# Координаты точки и координаты вектора

Расстояние между двумя точками.

Дано: $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$

Решение:

$$d=\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Таким образом:

$$\boxed{d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$$

# Скалярное произведение векторов

**Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.**

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b}| * \cos(\vec{a} \wedge \vec{b})$$

# Скалярное произведение векторов

**Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны**

# Скалярное произведение векторов

**Скалярный квадрат вектора (т.е. скалярное произведение вектора на себя) равен квадрату его длины.**

# Скалярное произведение векторов

**Косинус угла α между ненулевыми векторами вычисляется по формуле:**

$$\cos a = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2} * \sqrt{x_2{}^2 + y_2{}^2 + z_2{}^2}}$$

# Скалярное произведение векторов

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и любого числа k справедливы равенства:

**$1^0$ $\vec{a}^2 \geq 0$, причем $\vec{a}^2 > 0$ при $\vec{a} \neq 0$**

**$2^0$ $\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{a}$**

**$3^0$ $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}$**

**$4^0$ $k(\vec{a}\vec{b})=(k\vec{a})\vec{b}$**

# Список использованной литературы

Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, Л. С. Киселёва, Э. Г. Позняк. Геометрия 10-11. «Просвещение», 2001.

А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын, Б. М. Ивлев, С. И. Шварцбурд, Алгебра и начала анализа. «Просвещение», 2000.