Вычисление определителей

Миноры и алгебраические дополнения

Повторим

Матрица – множество чисел, образующих прямоугольную таблицу, которая содержит **m**-строк и **n**-столбцов.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{a_{ij}}$, i – номер строки, j – номер столбца.

- Две матрицы называются **равными**, если они имеют одинаковые размеры и их соответствующие элементы равны.
- Если количество столбцов матрицы совпадают с количеством строк, то матрица называется **квадратной.**
- *Какая из предложенных матриц является квадратной?*

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 6 & 4\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$$

- Элементы матрицы, стоящие на диагонали, идущие из верхнего левого угла называют **главной диагональю**, другую диагональ называют **побочной.**
- Если количество строк m матрицы не равно количеству столбцов n, то матрица называется **прямоугольной.**
- *Какая из предложенных выше матриц является прямоугольной?*

- Если все элементы квадратной матрицы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, то матрица называется **диагональной.**

$$diag(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Если все числа главной диагонали равны единице, то матрица называется **единичной.**

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Если в прямоугольной матрице m=1, то получается **матрица-строка.**

$$x = (1;5;7)$$

- Если n=1, то получается **матрица-столбец.**

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- Матрицы-строки и матрицы-столбцы называются **векторами**.

Определитель 2-го порядка

- **Определителем 2-го порядка** называют число, равное

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

a_{11}	a_{12}	Отмечено направление, выделяющее элементы для положительного члена определителя: схема C_1.
a_{21}	a_{22}	

a_{11}	a_{12}	Отмечено направление, выделяющее элементы для отрицательного члена определителя: схема C_2.
a_{21}	a_{22}	

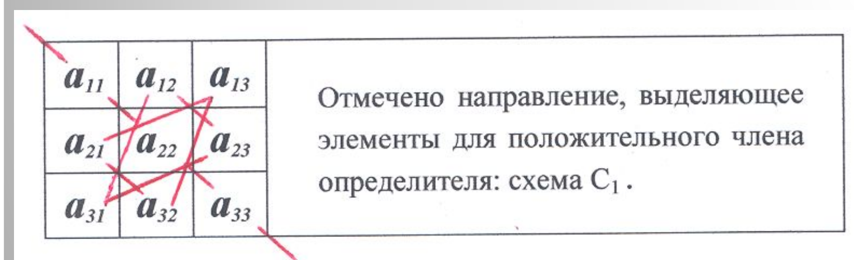
Пример:

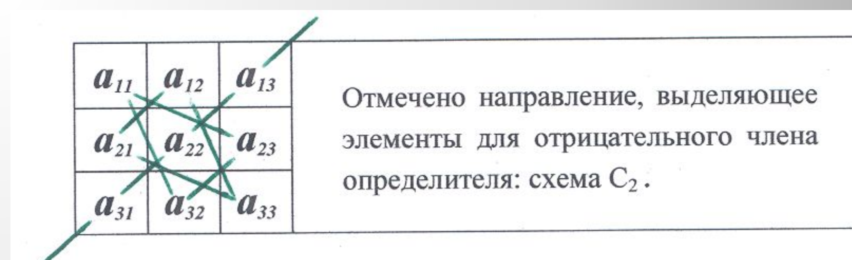
$$\begin{vmatrix} 11 & -2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 11 \cdot 5 - (-2) \cdot 7 = 55 + 14 = 69$$

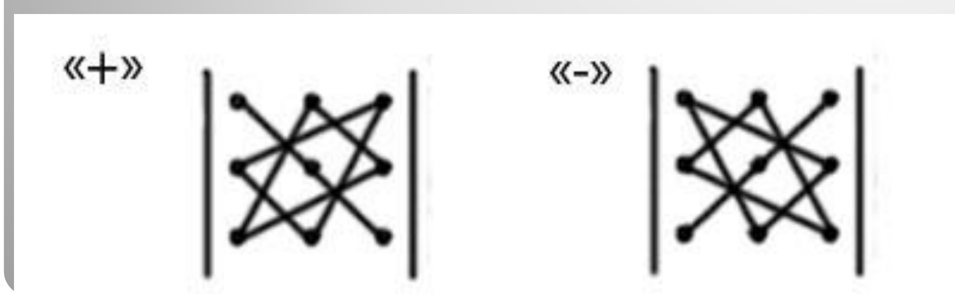
Определитель 3-го порядка

- **Определителем 3-го порядка** называют число, равное

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$







Пример:

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$$

Свойства определителя:

- ***Свойства определителя:***
- **1)** Если матрицу транспонировать, то определитель не изменится.
- **2)** Если все элементы строки (столбца) умножить на одно и тоже число, то определитель умножится на это число.
- **3)** Если поменять местами две строки (столбца), то определитель поменяет знак.
- **4)** Если хотя бы одна строка (столбец) нулевая, то определитель равен нулю.
- **5)** Если две строки (столбца) равны, то определитель равен нулю.

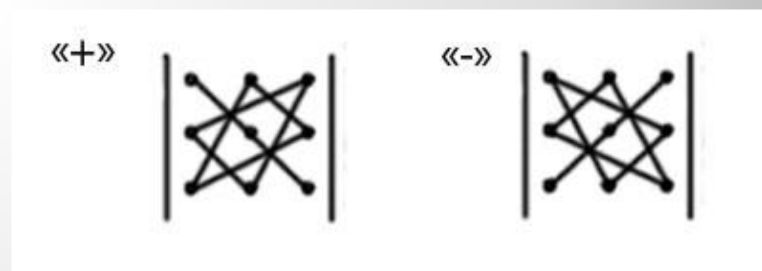
Свойства определителя:

- **6)** Если одна строка (столбец) является линейной комбинацией других строк (столбцов), то определитель равен нулю.
- **7)** Если каждый элемент некоторой строки (столбца) определителя представлен в виде суммы двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, у которых все строки (столбцы), кроме данной, прежние, а в данной строке (столбце) в первом определителе стоят первые, а во втором - вторые слагаемые.
- **8)** Определитель не меняется если к одной из его строк (столбцов) добавить линейную комбинацию его других строк (столбцов)

Вычисление определителей

- **1)** $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$
- **2)** $\begin{vmatrix} 11 & -3 \\ -15 & -2 \end{vmatrix}$
- **3)** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$
- **4)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0,5 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$



МИНОР

- **Минором M_{ij}** к элементу a_{ij} определителя n-го порядка называется *определитель* (n - 1)-го порядка, полученный из исходного определителя вычеркиванием i-той строки и j-того столбца.
- **ПРИМЕР**
- **Найти и вычислить M_{23} к элементу a_{23} определителя**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 7 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

- **Решение:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cancel{-1} \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{3} \\ 7 & 8 & \cancel{4} \end{vmatrix} \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

Алгебраическое дополнение

- **Алгебраическим дополнением** A_{ij} к элементу a_{ij} определителя n-го порядка называется число: $\mathbf{A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}}$
- **ПРИМЕР**
- **Найти и вычислить A_{23} к элементу a_{23} определителя**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 7 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

- **Решение:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cancel{-1} \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{3} \\ 7 & 8 & \cancel{4} \end{vmatrix} \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

Вычисление миноров и алг. дополнений

- **Задание:**
- **Найти и вычислить все миноры и алгебраические дополнения следующих определителей**
- **1)** $$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

2) $$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

3) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}$$

Домашнее задание:

1) **вычислить** $|A|$ **и** $|B|$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2) **найти и вычислить все миноры и все алгебраические дополнения определителя**

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

Успехов при решении!!!