Математика

Определенный интеграл

Определенный интеграл

1. Определенный интеграл как предел интегральных сумм.
2. Свойства определенного интеграла.
3. Формула Ньютона-Лейбница.
4. Основные методы интегрирования.
5. Приложения определенного интеграла.

Определенный интеграл как предел интегральных сумм

Пусть функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$, $a < b$. Выполним следующие действия.

1. С помощью точек $x_0=a$, x_1, x_2, ..., $x_n=b$ разобьем отрезок $[a; b]$ на n *частичных отрезков* $[x_0; x_1]$, $[x_1; x_2]$, …, $[x_{n-1}; x_n]$.
2. В каждом частичном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$, $i= 1,2,\ldots, n$ выберем произвольную точку $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$ и вычислим значение функции в ней, т. е. величину $f(c_i)$.

Определенный интеграл как предел интегральных сумм

3. Умножим найденное значение функции $f(ci)$ на длину соответствующего частичного отрезка: $f(ci)$4. Составим сумму Sn всех таких произведений:

$$Sn = f(ci) + f(ci) + \ldots + f(ci) \qquad (1)$$

Сумма вида. (1) называется *интегральной суммой* функции $y=f(x)$ на отрезке [a; b]. Обозначим через λ длину наибольшего частичного отрезка: ($i = 1,2, \ldots ,n$).

Определенный интеграл как предел интегральных сумм

5. Найдем предел интегральной суммы (1), когда $n \to \infty$ что $\lambda \to 0$. Если при этом интегральная сумма Sn имеет предел I, который не зависит ни от способа разбиения отрезка [a; b] на частичные отрезки, ни от выбора точек в них, то число I называется *определенным интегралом* от функции $y = f(x)$ на отрезке [a; b] и обозначается $\int_a^b f(x)dx$. Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \qquad (2)$$

Определенный интеграл как предел интегральных сумм

Числа a и b называются соответственно *нижним и верхним пределом интегрирования*, $f(x)$ – *подынтегральной функцией*, $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*, x – *переменной интегрирования*, отрезок $[a; b]$ –*областью (отрезком) интегрирования*.

Функция $y = f(x)$, для которой на отрезке $[a; b]$ существует определенный интеграл , называется *интегрируемой* на этом отрезке.

Свойства определенного интеграла из определения (2)

1. Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz$$

2. Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю:

$$\int_a^a \mathrm{f}(x)dx = 0$$

3. Для любого действительного числа с:

$$\int_a^b cdx = c\cdot(b-a)$$

Свойства определенного интеграла

1. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е.

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

где α- некоторое число.

Свойства определенного интеграла

2. Интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций, т.е.

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

Свойства определенного интеграла

3. Если отрезок интегрирования разбит на части, то интеграл на всем отрезке равен сумме интегралов для каждой из возникших частей, т. е. при любых a, b, c:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Свойства определенного интеграла

4. Если на отрезке [*a*, *b*], где $a<b$, $f(x) \le g(x)$, то обе части неравенства можно почленно интегрировать:

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

5.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Свойства определенного интеграла

Теорема о среднем. Если функция *y=f(x)* непрерывна на отрезке [*a, b*], (где *a<b*), то найдется такое значение [*a, b*], что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$$

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$ -*среднее значение* функции на *f(c)* на отрезке [*a, b*].

Формула Ньютона-Лейбница

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $F(x)$ – любая первообразная для $f(x)$ на $[a, b]$. Тогда определенный интеграл от функции $f(x)$ на $[a, b]$ равен приращению первообразной $F(x)$ на этом отрезке, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Основные методы интегрирования. Замена переменной.

Пусть функция *φ(t)* имеет непрерывную производную на отрезке *[α,β], a= φ(α), b= φ(β)* и функция *f(x)* непрерывна в каждой точке *x* вида *x= φ(t)* , где t€[α,β].

Тогда справедливо следующее равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi' dt$$

Основные методы интегрирования. Интегрирование по частям.

Пусть функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a,b]$. Тогда

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

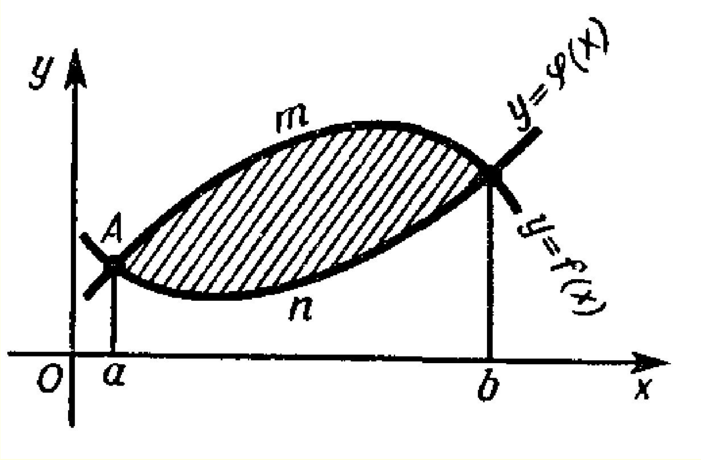
Приложения определенного интеграла.

Вычисление площадей плоских фигур. Пусть функция $y=f(x)$ неотрицательна и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда по геометрическому смыслу определенного интеграла площадь S под кривой $y=f(x)$ на $[a, b]$ численно равна определенному интегралу, т.е.

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Приложения определенного интеграла.

Если плоская фигура ограничена несколькими линиями (см рис.), то формула для вычисления площади такой фигуры имеет вид



$$S=\int_a^b \left(f(x)-\varphi(x)\right)dx$$

Приложения определенного интеграла.

Вычисление объемов тел вращения. Пусть на отрезке [*a*, *b*] задана непрерывная знакопостоянная функция $y=f(x)$. Объемы тела вращения, образованного вращением вокруг оси *Ox* (или оси *Oy*) криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$ ($f(x)\geq 0$) и прямыми $y=0$, $x=a$, $x=b$, вычисляются соответственно по формулам:

$$V_x = \pi\int_a^b y^2dx \qquad V_y = 2\pi\int_a^b xydx, a\geq 0.$$

Приложения определенного интеграла.

Если тело образуется при вращении вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной кривой $x=\varphi(y)$ ($\varphi(y) \geq 0$) и прямыми $x=0$, $y=c$, $y=d$, то объем тела вращения равен

$$V = \pi \int_{c}^{d} x^2 dy$$

Приложения определенного интеграла. Прирост численности популяции.

Прирост популяции равен определенному интегралу от скорости по интервалу времени ее размножения:

$$N(t)=\int_{t_0}^{T} v(t)\,dt.$$

где *v(t)*-скорость роста некоторой популяции,

N(t)-прирост численности за промежуток времени t_0 до Т.