

# *Дискретная случайная величина, закон ее распределения*

*Числовые характеристики  
дискретной случайной величины*

# СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

- Величину, которая в результате опыта принимает только одно, зависящее от случая, числовое значение, назовем **случайной величиной**.
- *Случайные величины обозначаются большими латинскими буквами ( $X, Y, Z$ ), а их возможные числовые значения – маленькими латинскими буквами ( $x, y, z$ ).*
- **ПРИМЕРЫ:**
- *Число выпадения герба при подбрасывании монеты*
- *Число выпавших гербов при подбрасывании двух монет*
- *Количество очков, выпадающих при подбрасывании игральной кости*
- *Число родившихся мальчиков (или девочек) среди ста новорожденных.*
- *Расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле из орудия.*
- *Ошибка измерителя высоты.*
- *Температура воздуха на следующий день.*

# Дискретная случайная величина

- Случайная величина называется **дискретной**, если в результате опыта она принимает числовые значения, которые можно перечислить или поставить им в соответствие элементы счётного множества
- Таким образом, дискретная случайная величина может быть как конечной, так и бесконечной.
- Для описания дискретной случайной величины (**ДСВ**) просто перечислить её значения недостаточно. Необходимо для каждого значения найти соответствующую вероятность.
- Вероятность того, что случайная величина  **$X$**  примет то или иное значение  **$a$**  обозначают  **$P(X=a)$** .

# Какие из данных случайных величин будут дискретными?

- Число выпадения герба при подбрасывании монеты
- Число выпавших гербов при подбрасывании двух монет
- Количество очков, выпадающих при подбрасывании игральной кости
- Число родившихся мальчиков (или девочек) среди ста новорожденных.
- Расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле из орудия.
- Ошибка измерителя высоты.
- Температура воздуха на следующий день.

# Рассмотрим ДСВ на примере

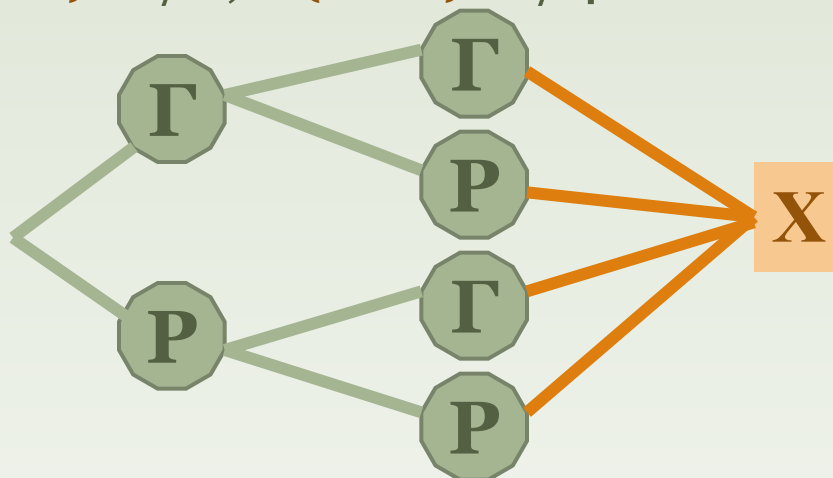
ДСВ **X**: число выпавших гербов при подбрасывании двух монет  
МОНЕТ

Значения, которые принимает ДСВ **X**:

$$X_1=0, X_2=1, X_3=2.$$

Вероятности того, что ДСВ **X** примет то или иное значение (рассмотрим на графе):

$$P(X=0)=1/4, P(X=1)=1/2, P(X=2)=1/4.$$



# Закон распределения ДСВ

Соответствие между возможными значениями случайной величины и ее вероятностями называют **законом распределения** случайной величины и записывают в виде таблицы:

$X$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$	$\dots$
$P$	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_n$	$\dots$

где в верхней строчке написаны значения случайной величины, а в нижней – под каждым  $x_i$  – вероятности  $p_i$ . Заметим, что события  $x_1, x_2, \dots, x_n$  образуют полную систему событий, поэтому сумма вероятностей в нижней строке всегда равна 1.

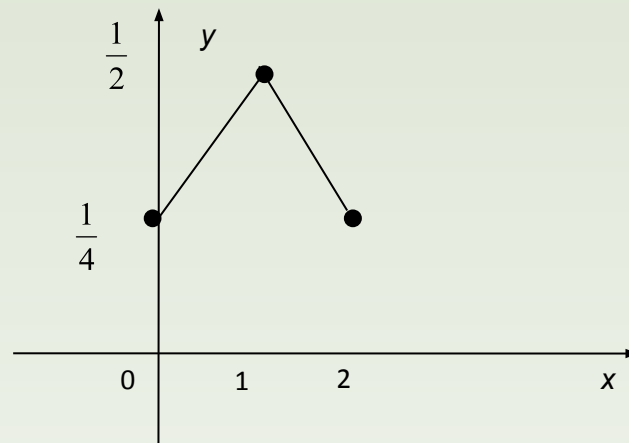
*Для нашего примера:*

$X$	0	1	2
$P$	1/4	1/2	1/4

# Многоугольник распределения

- Графическим изображением закона распределения ДСВ является **многоугольник распределения** - множество точек с координатами  $(x_1; p_1)$ ,  $(x_2; p_2)$ ...  $(x_n; p_n)$ ..., последовательно соединенных отрезками.

*Для нашего примера:*



# Задача 1.

- В стопке лежат 10 тетрадей с одинаковой обложкой, 4 из которых в линейку, остальные – в клетку. Саша наугад вынимает 2 тетради. Составьте закон распределения числа выбранных тетрадей в клетку (*используйте граф для нахождения вероятностей*) и постройте многоугольник распределения.



## Задача 2.

- Составьте закон распределения для суммы очков, выпадающих при подбрасывании игральной кости (*используйте граф для нахождения вероятностей*) и постройте многоугольник распределения.

## Задача 3\*.

- Стрелок производит три выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6. Построить ряд (*используйте граф для нахождения вероятностей*) и многоугольник распределения числа попаданий в мишень.

## Задача 4\*\*.

- Постройте граф и составьте закон распределения для числа подбрасывания монеты до появления «герба».
- Это пример бесконечной случайной величины.

# Числовые характеристики ДСВ:

- **Математическое ожидание.**
- **Дисперсия.**
- **Среднеквадратическое отклонение.**

# Математическое ожидание

- **Математическим ожиданием  $M(X)$**  называют сумму произведений всех возможных значений случайной величины ( $x_i$ ) на соответствующие вероятности ( $p_i$ ):  
$$\underline{M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n}$$
- *Математическое ожидание – это число, которое указывает, какое **среднее значение** случайной величины следует ожидать в результате проведения опыта или испытания.*

# Свойства математического ожидания

- $$\underline{M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n}$$

- **1).**  $M(C) = C$ , где  $C$  – *const*;

- **2).**  $M(C \cdot X) = C \cdot M(X)$ ;

- **3).**  $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$ ;

- **4).**  $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$ ,

где  $X$  и  $Y$  - независимые случайные величины.

## Задание:

- Закон распределения случайной величины  $X$  задан таблицей:

$X$	-5	0	2	6
$P$	0,1	0,2	0,3	0,4

Найдите математическое ожидание случайной величины  $X$ .

$$\underline{M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n}$$

# Дисперсия

- **Дисперсией** случайной величины  $X$  называют математическое ожидание квадрата ее отклонений от среднего значения:

$$D(X) = M[(X - \bar{x})^2] = \sum_i (x_i - \bar{x})^2 p_i.$$

- Для вычисления:

$$\underline{D(X) = M(X^2) - M^2(X)},$$

- где  $\underline{M(X^2) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 + \dots + x_n^2 \cdot p_n}$

- Дисперсия характеризует **степень отклонения** значений случайной величины от ее среднего значения. На практике дисперсия служит для **оценки меры риска**.
- (Дисперсия всегда положительное число)



## Свойства дисперсии

- $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$ ,

- где  $M(X^2) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 + \dots + x_n^2 \cdot p_n$

- **1).**  $D(C) = 0$ , где  $C$  – const;

- **2).**  $D(CX) = CD(X)$ ;

- **3).**  $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$ , если  $X, Y$  – независимые случайные величины.

## Задание:

- Закон распределения случайной величины  $X$  задан таблицей:

$X$	-5	0	2	6
$P$	0,1	0,2	0,3	0,4

Найдите дисперсию случайной величины  $X$ .

$$\underline{D(X) = M(X^2) - M^2(X)},$$

$$\text{где } \underline{M(X^2) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 + \dots + x_n^2 \cdot p_n}$$

# Среднеквадратическое отклонение

- Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины: если ДСВ имеет размерность метры, то дисперсия измеряется в  $m^2$ . Для того, чтобы оценка рассеяния значений случайной величины имела размерность самой величины, вычисляют среднеквадратичное отклонение.
- 
- Положительное значение квадратного корня из дисперсии называют **среднеквадратическим отклонением** (или стандартным отклонением):  $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ .

## Задание:

- Закон распределения случайной величины  $X$  задан таблицей:

$X$	-5	0	2	6
$P$	0,1	0,2	0,3	0,4

Найдите *среднеквадратичное отклонение* случайной величины  $X$ .

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

# ЗАДАЧА

- Прибыльность двух инвестиционных проектов  $X$ ,  $Y$  (млн. руб) задана законами распределения:

$X$	-1	2	5
$P$	0,2	0,6	0,2

$Y$	-5	6	10
$P$	0,4	0,5	0,1

- Какой инвестиционный проект целесообразно выбрать для реализации?

# ЗАДАЧА 1

- В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны 2 детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

## ЗАДАЧА 2

- В коробке имеются 7 карандашей, из которых 4 красные. Из этой коробки наудачу извлекаются **а)**. 2 карандаша, **б)**. 3 карандаша. Определить закон распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины, равной числу не красных карандашей.

## ЗАДАЧА 3

- Построить ряд распределения числа попаданий мячом в корзину при трех бросках, если вероятность попадания равна 0,4. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины.



## ЗАДАЧА 4

- Определить закон распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение числа гербов при четырех подбрасываниях монеты.

## ЗАДАЧА 5\*

- Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

## Домашнее задание:

- В урне 5 белых и 25 черных шаров. Вынули
- **а).** 2 шара, **б).** 3 шара.

Случайная величина – число вынутых черных шаров. Составить закон распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины.