

Дискретная случайная величина, закон ее распределения

*Числовые характеристики
дискретной случайной величины*

СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

- Величину, которая в результате опыта принимает только одно, зависящее от случая, числовое значение, назовем **случайной величиной**.
- *Случайные величины обозначаются большими латинскими буквами (X, Y, Z), а их возможные числовые значения – маленькими латинскими буквами (x, y, z).*
- **ПРИМЕРЫ:**
- *Число выпадения герба при подбрасывании монеты*
- *Число выпавших гербов при подбрасывании двух монет*
- *Количество очков, выпадающих при подбрасывании игральной кости*
- *Число родившихся мальчиков (или девочек) среди ста новорожденных.*
- *Расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле из орудия.*
- *Ошибка измерителя высоты.*
- *Температура воздуха на следующий день.*

Дискретная случайная величина

- Случайная величина называется **дискретной**, если в результате опыта она принимает числовые значения, которые можно перечислить или поставить им в соответствие элементы счётного множества
- Таким образом, дискретная случайная величина может быть как конечной, так и бесконечной.
- Для описания дискретной случайной величины (**ДСВ**) просто перечислить её значения недостаточно. Необходимо для каждого значения найти соответствующую вероятность.
- Вероятность того, что случайная величина **X** примет то или иное значение **a** обозначают **$P(X=a)$** .

Какие из данных случайных величин будут дискретными?

- Число выпадения герба при подбрасывании монеты
- Число выпавших гербов при подбрасывании двух монет
- Количество очков, выпадающих при подбрасывании игральной кости
- Число родившихся мальчиков (или девочек) среди ста новорожденных.
- Расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле из орудия.
- Ошибка измерителя высоты.
- Температура воздуха на следующий день.

Рассмотрим ДСВ на примере

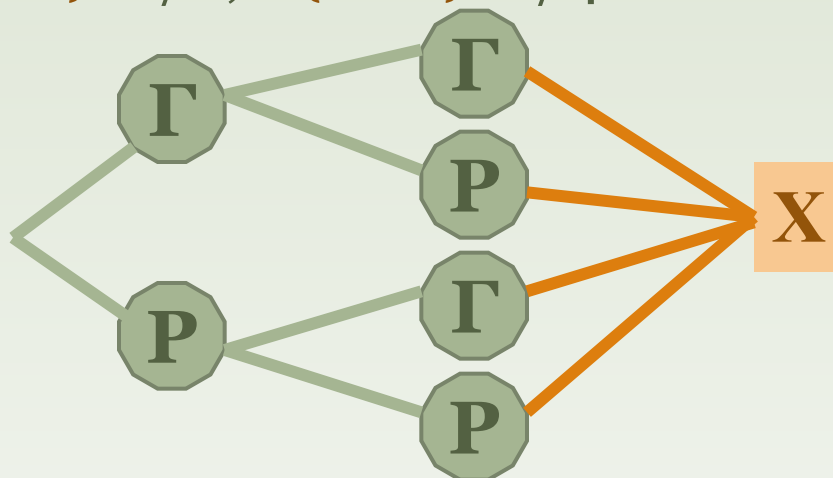
ДСВ **X**: число выпавших гербов при подбрасывании двух монет
МОНЕТ

Значения, которые принимает ДСВ **X**:

$$X_1=0, X_2=1, X_3=2.$$

Вероятности того, что ДСВ **X** примет то или иное значение (рассмотрим на графе):

$$P(X=0)=1/4, P(X=1)=1/2, P(X=2)=1/4.$$



Закон распределения ДСВ

Соответствие между возможными значениями случайной величины и ее вероятностями называют **законом распределения** случайной величины и записывают в виде таблицы:

X	x_1	x_2	\dots	x_n	\dots
P	p_1	p_2	\dots	p_n	\dots

где в верхней строчке написаны значения случайной величины, а в нижней – под каждым x_i – вероятности p_i . Заметим, что события x_1, x_2, \dots, x_n образуют полную систему событий, поэтому сумма вероятностей в нижней строке всегда равна 1.

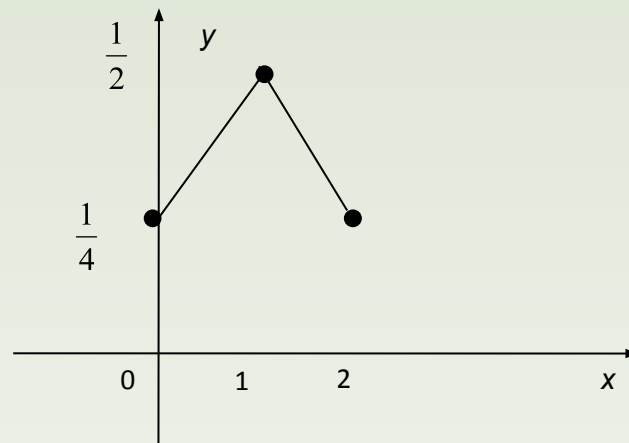
Для нашего примера:

X	0	1	2
P	1/4	1/2	1/4

Многоугольник распределения

- Графическим изображением закона распределения ДСВ является **многоугольник распределения** - множество точек с координатами $(x_1; p_1), (x_2; p_2) \dots (x_n; p_n) \dots$, последовательно соединенных отрезками.

Для нашего примера:



Задача 1.

- В стопке лежат 10 тетрадей с одинаковой обложкой, 4 из которых в линейку, остальные – в клетку. Саша наугад вынимает 2 тетради. Составьте закон распределения числа выбранных тетрадей в клетку (*используйте граф для нахождения вероятностей*) и постройте многоугольник распределения.

Задача 2.

- Составьте закон распределения для суммы очков, выпадающих при подбрасывании игральной кости (*используйте граф для нахождения вероятностей*) и постройте многоугольник распределения.

Задача 3*.

- Стрелок производит три выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6. Построить ряд (*используйте граф для нахождения вероятностей*) и многоугольник распределения числа попаданий в мишень.

Задача 4**.

- Постройте граф и составьте закон распределения для числа подбрасывания монеты до появления «герба».
- Это пример бесконечной случайной величины.

Числовые характеристики ДСВ:

- **Математическое ожидание.**
- **Дисперсия.**
- **Среднеквадратическое отклонение.**

Математическое ожидание

- **Математическим ожиданием $M(X)$** называют сумму произведений всех возможных значений случайной величины (x_i) на соответствующие вероятности (p_i):
$$\underline{M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n}$$
- *Математическое ожидание – это число, которое указывает, какое **среднее значение** случайной величины следует ожидать в результате проведения опыта или испытания.*

Свойства математического ожидания

- $$\underline{M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n}$$

- **1).** $M(C) = C$, где C – *const*;

- **2).** $M(C \cdot X) = C \cdot M(X)$;

- **3).** $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$;

- **4).** $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$,

где X и Y - независимые случайные величины.

Задание:

- Закон распределения случайной величины X задан таблицей:

X	-5	0	2	6
P	0,1	0,2	0,3	0,4

Найдите математическое ожидание случайной величины X .

$$\underline{M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n}$$

Дисперсия

- **Дисперсией** случайной величины X называют математическое ожидание квадрата ее отклонений от среднего значения:

$$D(X) = M[(X - \bar{x})^2] = \sum_i (x_i - \bar{x})^2 p_i.$$

- Для вычисления:

$$\underline{D(X) = M(X^2) - M^2(X)},$$

- где $\underline{M(X^2) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 + \dots + x_n^2 \cdot p_n}$

- Дисперсия характеризует **степень отклонения** значений случайной величины от ее среднего значения. На практике дисперсия служит для **оценки меры риска**.
- (Дисперсия всегда положительное число)

Свойства дисперсии

- $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$,

- где $M(X^2) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 + \dots + x_n^2 \cdot p_n$

- **1).** $D(C) = 0$, где C – *const*;

- **2).** $D(CX) = CD(X)$;

- **3).** $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$, если X, Y – независимые случайные величины.

Задание:

- Закон распределения случайной величины X задан таблицей:

X	-5	0	2	6
P	0,1	0,2	0,3	0,4

Найдите дисперсию случайной величины X .

$$\underline{D(X) = M(X^2) - M^2(X)},$$

$$\text{где } \underline{M(X^2) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 + \dots + x_n^2 \cdot p_n}$$

Среднеквадратическое отклонение

- Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины: если ДСВ имеет размерность метры, то дисперсия измеряется в m^2 . Для того, чтобы оценка рассеяния значений случайной величины имела размерность самой величины, вычисляют среднеквадратичное отклонение.
-
- Положительное значение квадратного корня из дисперсии называют **среднеквадратическим отклонением** (или стандартным отклонением): $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Задание:

- Закон распределения случайной величины X задан таблицей:

X	-5	0	2	6
P	0,1	0,2	0,3	0,4

Найдите *среднеквадратичное отклонение* случайной величины X .

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

ЗАДАЧА

- Прибыльность двух инвестиционных проектов X , Y (млн. руб) задана законами распределения:

X	-1	2	5
P	0,2	0,6	0,2

Y	-5	6	10
P	0,4	0,5	0,1

- Какой инвестиционный проект целесообразно выбрать для реализации?

ЗАДАЧА 1

- В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны 2 детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

ЗАДАЧА 2

- В коробке имеются 7 карандашей, из которых 4 красные. Из этой коробки наудачу извлекаются **а)**. 2 карандаша, **б)**. 3 карандаша. Определить закон распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины, равной числу не красных карандашей.

ЗАДАЧА 3

- Построить ряд распределения числа попаданий мячом в корзину при трех бросках, если вероятность попадания равна 0,4. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины.

ЗАДАЧА 4

- Определить закон распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение числа гербов при четырех подбрасываниях монеты.

ЗАДАЧА 5*

- Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

Домашнее задание:

- В урне 5 белых и 25 черных шаров. Вынули
- **а).** 2 шара, **б).** 3 шара.

Случайная величина – число вынутых черных шаров. Составить закон распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины.