

*ПРОГРЕССИИ.
АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И
ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ
ПРОГРЕССИИ.*



Арифметическая прогрессия

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

Геометрическая прогрессия

$$b_1, b_2, b_3, \dots$$

Определения

Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом.

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad n = 1, 2, \dots,$$

d – разность прогрессии

Геометрической прогрессией называется числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля и каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же не равное нулю число.

$$b_{n+1} = qb_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$q \neq 0, b_1 \neq 0;$

q – знаменатель прогрессии

Формулы общего члена

$$a_n = a_1 + d \cdot (n - 1),$$

$n = 1, 2, \dots$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1},$$

$n = 1, 2, \dots$

Характеристическое свойство

a_{n-1}, a_n, a_{n+1} – последовательные члены арифметической прогрессии тогда и только тогда, когда

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

(среднее арифметическое)

$b_{n-1}, b_n, b_{n+1} (b_n > 0)$ – последовательные члены геометрической прогрессии тогда и только тогда, когда

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} * b_{n+1}}$$

(среднее геометрическое)

Формулы суммы n первых членов

Арифметической
прогрессии

Геометрической
прогрессии

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, q \neq 1$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n - 1)}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}, q \neq 1$$

ЗАДАЧА №1

ЧЕТВЁРТЫЙ ЧЛЕН
АРИФМЕТИЧЕСКОЙ
ПРОГРЕССИИ РАВЕН 4,5,
А ЕЁ ДВЕНАДЦАТЫЙ ЧЛЕН
РАВЕН -12. НАЙДИТЕ
ДВАДЦАТЫЙ ЧЛЕН ЭТОЙ
ПРОГРЕССИИ.

РЕШЕНИЕ

I СПОСОБ

ВОСПОЛЬЗУЕМСЯ ФОРМУЛОЙ n -ГО ЧЛЕНА АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

$A_n = A_1 + D(n - 1)$ И ВЫРАЗИМ ДАННЫЕ ЧЛЕНЫ ПРОГРЕССИИ $A_4 = A_1 + 3D$, $A_{12} = A_1 + 11D$.

СОСТАВИМ И РЕШИМ СИСТЕМУ УРАВНЕНИЙ:

$$A_1 + 11D = 4,5,$$

$$A_1 + 3D = -12;$$

$$-8D = 16,5, \quad 8D = -16,5$$

ЗАМЕТИМ, ЧТО $A_{20} = A_{12} + 8D$,

$$A_{20} = -12 - 16,5,$$

$$A_{20} = -28,5$$

II СПОСОБ

ЗАМЕТИМ, ЧТО $A_{12} = A_4 + 8D$, $A_{20} = A_{12} + 8D$. НАЙДЕМ $8D$.

$$8D = A_{12} - A_4 = -12 - 4,5 = -16,5$$

$$A_{20} = A_{12} + 8D = -12 - 16,5 = -28,5$$

ОТВЕТ. $-28,5$

ЗАДАЧА №2

В ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ
ПРОГРЕССИИ

$$B_{12} = 3^{15} \text{ И } B_{14} = 3^{17}.$$

НАЙДИТЕ B_1 .

РЕШЕНИЕ

ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ
ПРОГРЕССИИ

$$B_{14} = B_{12} \cdot Q \Rightarrow q^2 = \frac{b_{14}}{b_{12}} = \frac{3^{17}}{3^{15}} = 3^2 = 9, \quad q = \pm\sqrt{9}, \quad q = \pm 3$$

ПО Ф
ВНЕСЕНИЯ В ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ $B_N =$
 $B_1 \cdot Q^{n-1}$ $b_{12} = b_1 \cdot q^{11} \Rightarrow b_1 = \frac{b_{12}}{q^{11}}$

$$b_1 = \frac{3^{15}}{-3^{11}} = -3^4 = -81$$

ЕСЛИ $Q = -3$, $b_1 = \frac{3^{15}}{3^{11}} = 3^4 = 81$

ЕСЛИ $Q = 3$, ТО

ОТВЕТ. – 81 ИЛИ 81

ЗАДАЧА № 3

В АРИФМЕТИЧЕСКОЙ
ПРОГРЕССИИ $A_5 = -150$, $A_6 = -147$. *НАЙДИТЕ НОМЕР
ПЕРВОГО ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО
ЧЛЕНА ЭТОЙ ПРОГРЕССИИ*

РЕШЕНИЕ

ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

$$A_6 = A_5 + D, \quad D = A_6 - A_5, \quad D = -147 - (-150), \quad D = 3$$

ПО ФОРМУЛЕ N-ГО ЧЛЕНА АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

$$A_n = A_1 + D(n-1), \quad A_5 = A_1 + 4D, \quad A_1 = A_5 - 4D,$$

$$A_1 = -150 - 12, \quad A_1 = -162.$$

ТАК КАК $A_N > 0$, ТО $A_1 + D(N-1) > 0$, ЗНАЧИТ,

$$-162 + 3(N-1) > 0,$$

$$-162 + 3N - 3 > 0,$$

$$3N > 165,$$

$$N > 55,$$

$$N = 56.$$

ОТВЕТ. ПЕРВЫЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЙ ЧЛЕН ЭТОЙ
ПРОГРЕССИИ СТОИТ НА 56 МЕСТЕ.

ЗАДАЧА №4

СУЩЕСТВУЕТ ЛИ
ГЕОМЕТРИЧЕСКА
Я ПРОГРЕССИЯ, В
КОТОРОЙ

$$B_2 = -6, B_5 = 48 \text{ И} \\ B_7 = 192$$

РЕШЕНИЕ

ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ
ПРОГРЕССИИ

$$B_5 = B_2 \cdot Q^3 \Rightarrow q^3 = \frac{b_5}{b_2} = \frac{48}{-6} = -8, q = -2$$

$$B_7 = B_5 \cdot Q^2, \quad B_7 = 48 \cdot 4 = 192.$$

ОТВЕТ. СУЩЕСТВУЕТ.

ЗАДАЧА № 5

НАЙДИТЕ СУММУ ВСЕХ
НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ, НЕ
ПРЕВОСХОДЯЩИХ 160, КОТОРЫЕ
НЕ ДЕЛЯТСЯ НА 4.

ЗАДАЧА № 6

В ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ СУММА ПЕРВОГО И ВТОРОГО ЧЛЕНОВ РАВНА 132, А СУММА ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ЧЛЕНОВ РАВНА 110. НАЙДИТЕ ПЕРВЫЕ ТРИ ЧЛЕНА ЭТОЙ ПРОГРЕССИИ.

ПРЕДОСТЕРЕЖЕНИЕ.

74% ВСЕХ УЧАСТНИКОВ ЭКЗАМЕНА НЕ ПРИСТУПАЛИ ИЛИ НЕ СМОГЛИ РЕШИТЬ ЭТО ЗАДАНИЕ (НАИВЫСШИЙ БАЛЛ ПОЛУЧИЛИ 23% УЧАСТНИКОВ ЭКЗАМЕНА).

ЗАПИСАВ В ОТВЕТ ТОЛЬКО ДВА ЧЛЕНА ПРОГРЕССИИ, МОЖНО ПОТЕРЯТЬ ОДИН БАЛЛ.

ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ НА КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ: ОДНА АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ОШИБКА – ПОТЕРЯ ОДНОГО БАЛЛА, А ДВЕ И БОЛЕЕ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ОШИБОК – ПОТЕРЯ ВСЕХ БАЛЛОВ ЗА ЭТО ЗАДАНИЕ

ЗАДАЧА № 7

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ
(A_N) – АРИФМЕТИЧЕСКАЯ
ПРОГРЕССИЯ.

ИЗВЕСТНО, ЧТО $A_5 + A_9 = 40$. НАЙДИТЕ
 $A_3 + A_7 + A_{11}$.

ЗАДАЧА № 8

СУММА ТРЕТЬЕГО И
ТРИНАДЦАТОГО
ЧЛЕНОВ
АРИФМЕТИЧЕСКОЙ
ПРОГРЕССИИ РАВНА
11. НАЙДИТЕ СУММУ
ПЕРВЫХ
ПЯТНАДЦАТИ ЕЁ
ЧЛЕНОВ

ЗАДАЧА № 9

СУММА ПЕРВЫХ ПЯТИ
ЧЛЕНОВ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ
ПРОГРЕССИИ НА 200
БОЛЬШЕ СУММЫ
СЛЕДУЮЩИХ ЕЁ ЧЛЕНОВ.
НА СКОЛЬКО СУММА
ПЕРВЫХ ДЕСЯТИ ЧЛЕНОВ
ЭТОЙ ПРОГРЕССИИ
БОЛЬШЕ СУММЫ
СЛЕДУЮЩИХ ДЕСЯТИ ЕЁ
ЧЛЕНОВ?

ЗАДАЧА № 10

ЧИСЛА $\sqrt{7} + 3$ и $\sqrt{2}$

ЯВЛЯЮТСЯ ЧЕТВЁРТЫМ
И СЕДЬМЫМ ЧЛЕНАМИ
ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ
ПРОГРЕССИИ НАЙДИТЕ
СУММУ ЧЕТВЁРТОГО И
ДЕСЯТОГО ЧЛЕНОВ
ЭТОЙ ПРОГРЕССИИ.