Комбинаторика

Теория

1.Комбинаторика

Очень часто практика ставит перед нами следующую стандартную задачу: дана совокупность n элементов различной природы. Требуется определить количество комбинаций, составленных **по определенным правилам**, из данных n элементов по m элементов в каждой комбинации.

Этим занимается **комбинаторика** – раздел высшей математики, изучающий вопрос о том, сколько комбинаций определенного типа можно составить из n данных элементов по m элементов в каждой комбинации.

1.1.Комбинации без повторений

А)Размещения

Пример 1. Дана совокупность n=4 букв: a, b, c, d. Ребенок, развлекаясь, составляет различные комбинации из данного набора n букв по m=2 буквы по следующему правилу: состав и порядок входящих букв в каждую комбинацию должен быть различен. Требуется определить количество полученных комбинаций.

Получаем полный перечень 12 комбинаций из n=4 по m=2 буквы, отличающиеся и составом и порядком расположения, входящих в комбинации букв (таблица 1):

Таблица 1

№ комбинации	Полный перечень комбинаций, отличающихся или составом, или порядком, входящих в них букв
1.	a, b
2.	a, c
3.	a, d
4.	b, c
5.	b, d
6.	c, d
7.	b, a
8.	c, a
9.	d, a
10.	c, b
11.	d, b
12.	d, c

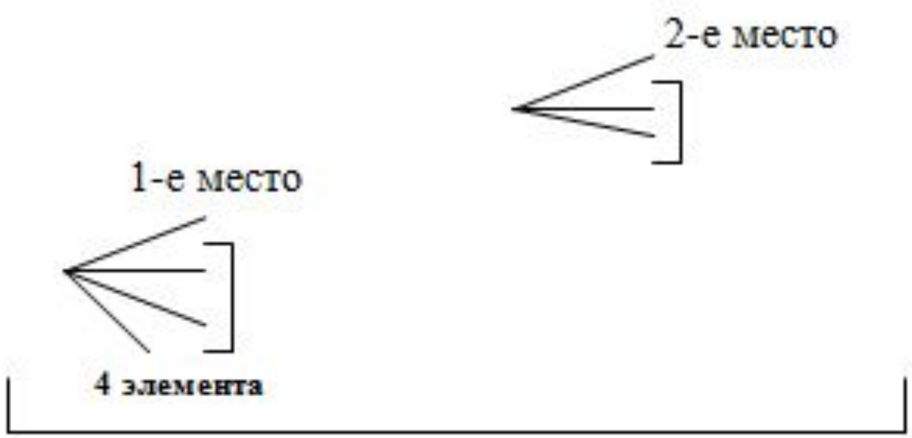
Данные комбинации, составленные из 4-х букв по 2-е буквы, которые отличаются или **составом**, или **порядком**, называются размещениями.

Размещения A_n^m – это комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются или составом элементов, или их порядком расположения.

Определение количества размещений следует определять по следующему алгоритму:

– в нашем случае комбинация состоит из 2 мест (в общем случае m мест) и I-ое место в комбинации может занять любая из 4-х букв: a, b, c, d (в общем случае любой элемент из n, имеющихся в множестве);

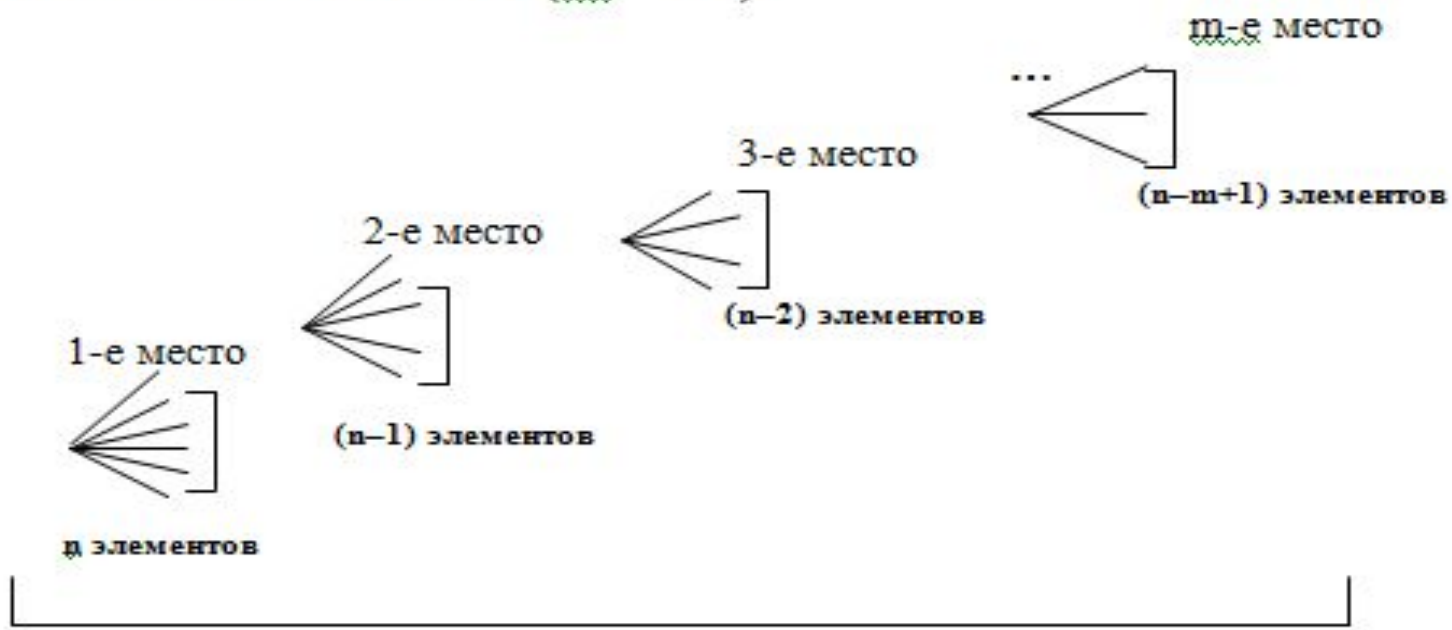
– II-е место в комбинации может занять любая из 3-х оставшихся букв (или любой из (n–1) оставшихся элементов в данном множестве) (см. Рис.1).



Всего получаем $A_4^2=4\cdot 3=12$ комбинаций.

Рис.1. Расчет количества комбинаций из **примера 1**

Если бы число мест в комбинации было не два, а в общем случае m, то на III-е место претендовало (n–2) оставшихся элементов множества; на IV-е – (n–3) элементов, …, на последнее m-е место претендовало бы [n–(m–1)]=(n–m+1) из оставшегося числа элементов (см. Рис.2).



Т.о. всего получаем $A_n^m=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ \ldots\ \cdot(n-m+1)$ комбинаций

Рис.2. Алгоритм расчета количества размещений из n комбинаций по m

Получили формулу для расчета количества размещений из n элементов по m:

$$A_n^m=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ \ldots\ \cdot(n-m+1).$$

Факториал

$4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$

$3!=1\cdot 2\cdot 3=3\cdot 2\cdot 1$

$2!=1\cdot 2=2\cdot 1=2!$

...

$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot(n-1)$

Примечание 1. Принято считать, что $0!=1$.

Тогда преобразуем полученную формулу, разделив и умножив его на выражение $(n-m)\cdot(n-m-1)\cdot(n-m-2)\cdot\ldots\cdot 1$.

$$A_n^m=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)\cdot(n-m)\cdot(n-m-1)\cdot(n-m-2)\cdot\ldots\cdot 1}{(n-m)\cdot(n-m-1)\cdot(n-m-2)\cdot\ldots\cdot 1}.$$

Окончательно получаем:

$$A_n^m=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)\cdot(n-m)\cdot(n-m-1)\cdot(n-m-2)\cdot\ldots\cdot 1}{(n-m)\cdot(n-m-1)\cdot(n-m-2)\cdot\ldots\cdot 1}=\frac{n!}{(n-m)!}.$$

Получили $\boxed{A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}}$ – базовая формула для расчета размещений.

Пример 2. У подростка на столе шесть цветных карандашей. Он составляет комбинации из двух карандашей. Сколько всего таких комбинаций он может составить?

Решение: в данном случае речь идет о размещениях, поскольку комбинации будут отличаться и составом и порядком расположения карандашей.

Тогда $A_6^2==\frac{6!}{(6-2)!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4!}{4!}=6\cdot 5=30.$

Б)Перестановки

Перестановки (обозначение P_n) – это размещения при условии, что m=n.

Тогда $P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$.

Окончательно получаем $\boxed{P_n = n!}$ – базовая формула для расчета перестановок.

Пример 3. На полке студента находится шесть книг на социальную тематику. Сколько комбинаций можно из них составить?

Решение: речь идет о перестановках. Получаем $P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

С)Сочетания

Пример 4. В международном турнире участвуют десять шахматистов и каждые два шахматиста встречаются один раз. Сколько партий было сыграно?

Здесь уже порядок в комбинации не принципиален. Такие комбинации называются сочетания.

Сочетания C_n^m – это комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются лишь составом, входящих в них элементов (порядок не принципиален).

Условие данной задачи не требует в отличие от **примера 1** учитывать порядок расположения букв в комбинации, т.е. сочетаний в данном случае будет в 2! раз меньше чем размещений (в общем случае в m! меньше).

Тогда $\boxed{C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}}$ – базовая формула для расчета сочетаний.

Пример 5. В международном турнире участвуют десять шахматистов и каждые два шахматиста встречаются один раз. Сколько партий было сыграно?

Решение: по условию задачи в комбинацию входит два шахматиста, причем порядок расположения шахматистов в сыгранной партии не принципиален, т.е. речь идет о сочетаниях.

Тогда $C_{10}^2 = \frac{10!}{(10-2)!2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8! \cdot 2!} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45.$

1.2.Комбинации с повторениями

А)Размещения с повторениями

Пример 6. Даны буквы a, b, c, d, e. Ребенок составляет из всех букв комбинации по три буквы, которые отличаются и **составом** и **порядком**, причем каждая буква может повторяться в комбинации неоднократно.

Т.е. речь идет о размещениях с повторениями.

Тогда на первое, второе, … , m-ое место в комбинации будет каждый раз претендовать все n букв.

Получим $\boxed{\tilde{A}_n^m = n^m}$ - базовая формула для расчета размещений с повторениями.

Пример 7. Одно из социальных учреждений имеет семизначный телефонный номер. Сколько можно предложить вариантов данного телефонного номера, если номер состоит из любых цифр, в том числе 0000000 – тоже может быть номером этого телефона.

По условию задачи ясно, что цифры могут входить в комбинацию многократно. Речь идет о размещениях с повторениями, причем всего количество цифр, начиная с нуля до девяти равно десяти, т.е. n=10; а в комбинацию входит семь цифр, т.о. m=7.

Тогда $\tilde{A}_{10}^7 = 10^7$.

Б)Сочетания с повторениями

Пример 8. Школьник хочет преподнести учителю букет цветов, состоящий из роз, гвоздик, тюльпанов, нарциссов или лилий. Сколько комбинаций из данных цветков он может составить, если букет должен состоять из трех цветков, и цветки могут повторяться.

Речь идет о сочетаниях с повторениями (разрешен повтор и порядок не нужен).

Число сочетаний с повторениями из n элементов по m определяется по Формуле: $\boxed{\tilde{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = C_{n+m-1}^{n-1}}$

При расчете можно воспользоваться любой формулой, например:

Тогда $\tilde{C}_5^3 = C_{5+3-1}^3 = C_7^3 = 35$.

Пример 9. Государственное учреждение хочет приобрести в личное пользование две машины. В автосалоне ему предлагают марки шесть различных марок машин. Сколькими способами можно это сделать, если это учреждение может приобрести, в том числе, и две одинаковые машины?

Решение: условие задачи предполагает применение сочетаний с повторениями.

Тогда аналогично $\tilde{C}_6^2 = C_{6+2-1}^2 = C_7^2 = 21$.

С)Перестановки с повторениями

Пример 10. Дана совокупность карандашей: С, С, С, С, К, К, К, З, З. Ребенок составляет из них различные комбинации. Требуется определить количество комбинаций, которые может составить ребенок, в которые входили бы все вышеперечисленные карандаши.

По условию задачи речь идет о перестановках. Но в заданной совокупности карандаши неоднократно, например, карандаш С входит четыре раза; карандаш К – три раза; карандаш З – два раза. Такие перестановки называются перестановками с повторениями.

Пусть в перестановках из общего числа n элементов есть k различных элементов, при этом 1-ый элемент повторяется n_1 раз; 2-ой элемент – n_2 раз; …; k элемент – n_k раз (в нашем случае 9 карандашей, причем карандаш С входит четыре раза; карандаш К – три раза; карандаш З – два раза).

Тогда число перестановок с повторениями будет определяться по формуле

$$\boxed{\tilde{P}_n = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot \ldots \cdot n_k!}}$$

Для нашего случая $\tilde{P}_{10} = \dfrac{9!}{4!\cdot 3!\cdot 2!} = 1260.$

Пример 11. На столе у школьника три одинаковых карандаша, две ручки, один треугольник. Сколькими способами он может переложить эти предметы.

Речь идет о перестановках с повторениями, причем в данную совокупность карандаш входит 3 раза, ручка – 2 раза, треугольник – 1 раз.

Тогда $\tilde{P}_6 = \dfrac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!} = 60$.

1.3.Правило суммы и произведения

В комбинаторике действуют правило суммы и правило произведения.

А)Правило суммы

Правило суммы (или правило линейки): Если объект A_1 может быть выбран из некоторой совокупности объектов n_1 способами, а другой объект A_2 – из некоторой совокупности объектов n_2 способами, то выбрать A_1 или A_2 можно (n_1+n_2) способами (отличительные особенности – отбираем по одному предмету, звучит союз «или», все объекты располагаем в ряд, т.е. в линейку).

Пример 12. В корзине у пенсионера 9 грибов, из них 3 белых, 4 подосиновика и 2 подберезовика. Сколькими способами можно достать из корзины или белый, или подберезовик.

Б, Б, Б, ПД, ПД, ПД, ПД, ПБ, ПБ

– получили линейку из объектов совокупности.

Тогда для нашей задачи по правилу суммы $(n_1+n_2)=3+2=5$.

Б)Правило произведения

Правило произведения (или правило шахматной доски): Если объект A_1 может быть выбран из некоторой совокупности объектов n_1 способами и после каждого такого выбора объект A_2 можно выбрать n_2 способами, то пара объектов A_1 и A_2 в указанном порядке может быть выбрана $(n_1 \cdot n_2)$ способами (отличительные особенности – отбираем по паре объектов, звучит союз «и», схема отбора «шахматная доска»).

Пример 13. В вазе находится четыре яблока и два апельсина. Сколькими способами можно вытащить пару фруктов: яблоко и апельсин (см. Рис. 3).

	1-ое яблоко	**2-е яблоко**	**3-е яблоко**	**4-е яблоко**
1-ый апельсин	**11**	**12**	**13**	**14**
2-ый апельсин	**21**	**22**	**23**	**24**

Рис. 3 Схема шахматной доски

Всего комбинаций достать пару фруктов равно количеству клеточек (по типу шахматной доски).

Тогда получаем $(n_1 \cdot n_2)=2 \cdot 4=8$ комбинаций.

Весь изложенный материал можно представить следующей таблицей 2.

Таблица 2

Комбинаторика							
Без повторений			**С повторениями**			**Комбинаторные правила**	
Размещения	**Сочетания**	**Перестановки**	**Размещения**	**Сочетания**	**Перестановки**	**Правило суммы**	**Правило произведения**
A_n^m	C_n^m	P_n	$\tilde{A}_n^m$	$\tilde{C}_n^m$	$\tilde{P}_n(n_1 \dots n_k)$	(n_1+n_2)	(n_1+n_2)

Примечание 2. Для решения комбинаторных задач желательно применять следующий примерный алгоритм:

I этап: исходя из условия задачи, выяснить о каком типе составляемых комбинаций идет речь – размещения A_n^m, перестановки P_n, сочетания C_n^m;

II этап: определить какими комбинациями они являются – с повторением или без повторений элементов;

III этап: для расчета количества комбинаций воспользоваться базовыми формулами согласно таблице 2.

При решении задач используйте таблицу 3.

Таблица 3

Перечень расчетных формул по комбинаторике

Типы комбинаций без повторений		
Размещение	**Сочетание**	**Перестановка**
Базовые формулы для расчета		
$A_n^m = n!/(n-m)!$	$C_n^m = n!/m!(n-m)!$	$P_n = n!$
Типы комбинаций с повторениями		
Размещение	**Сочетание**	**Перестановка**
Базовые формулы для расчета		
$\tilde{A}_n^m = n^m$	$\tilde{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$	$\tilde{P}_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$