

Предел функции

Бесконечные величины и правила работы с ними.

Бесконечно большим или просто бесконечным, называется **переменное** число, стремящееся превзойти по абсолютной величине всякую границу, как бы велика она не была, а **бесконечно малым** называют всякое переменное число, имеющее пределом нуль.

Две бесконечно малые величины называются величинами одного и того же порядка, если их отношение стремится к конечному пределу, отличному от нуля.

Если же отношение одной бесконечно малой величины β к другой α стремится к нулю, то говорят, что β бесконечно малая **более высокого порядка**, чем α .

Правила работы с бесконечными величинами

1. $\alpha \cdot n = \alpha$

2. $\alpha + \beta = \alpha$

3. $\alpha \cdot \beta = \alpha'$ (более высокого порядка)

4. $\frac{\alpha}{n} = \alpha$

5. $n \cdot \gamma = \gamma$

6. $\gamma \cdot \mu = \gamma'$ (более высокого порядка)

$$7. \frac{n}{\gamma} = \alpha$$

$$8. \frac{n}{\alpha} = \gamma$$

$$9. \frac{\gamma}{\alpha} = \gamma$$

$$10. \frac{\alpha}{\gamma} = \alpha$$

11. Ситуации $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\mu}$, $\alpha \cdot \gamma$, $\gamma - \mu$ и некоторые другие называются неопределенностями и требуют для своего разрешения специальных приемов.

Предел функции

Предел функции при $x \rightarrow \infty$
Рассмотрим функцию $y = f(x) = 2 - \frac{1}{x}$ при неограниченном
росте величины x

X	1	2	10	100	1000
Y	1	1.5	1.9	1.99	1.999

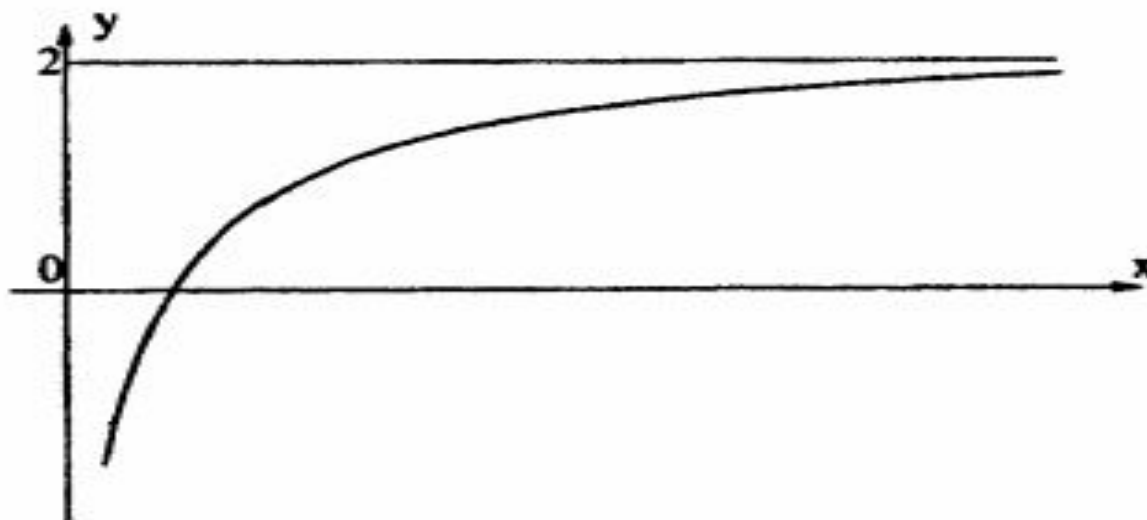


График функции $y = 2 - \frac{1}{x}$

Из приведенной таблицы и графика видно, что значение функции при росте значения аргумента постепенно приближается к 2.

Таким образом для функции может быть введено понятие предела функции.

Определение предела при $x \rightarrow \infty$

Число b называется пределом функции $y=f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, если каково бы ни было положительное число ε можно найти такое N , что для всех $x > N$ выполняется неравенство

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

Символическая запись такого предела выглядит так:

Обозначение предела



\lim

$x \rightarrow \infty$



Направление предела
(к чему стремится x)

Функция

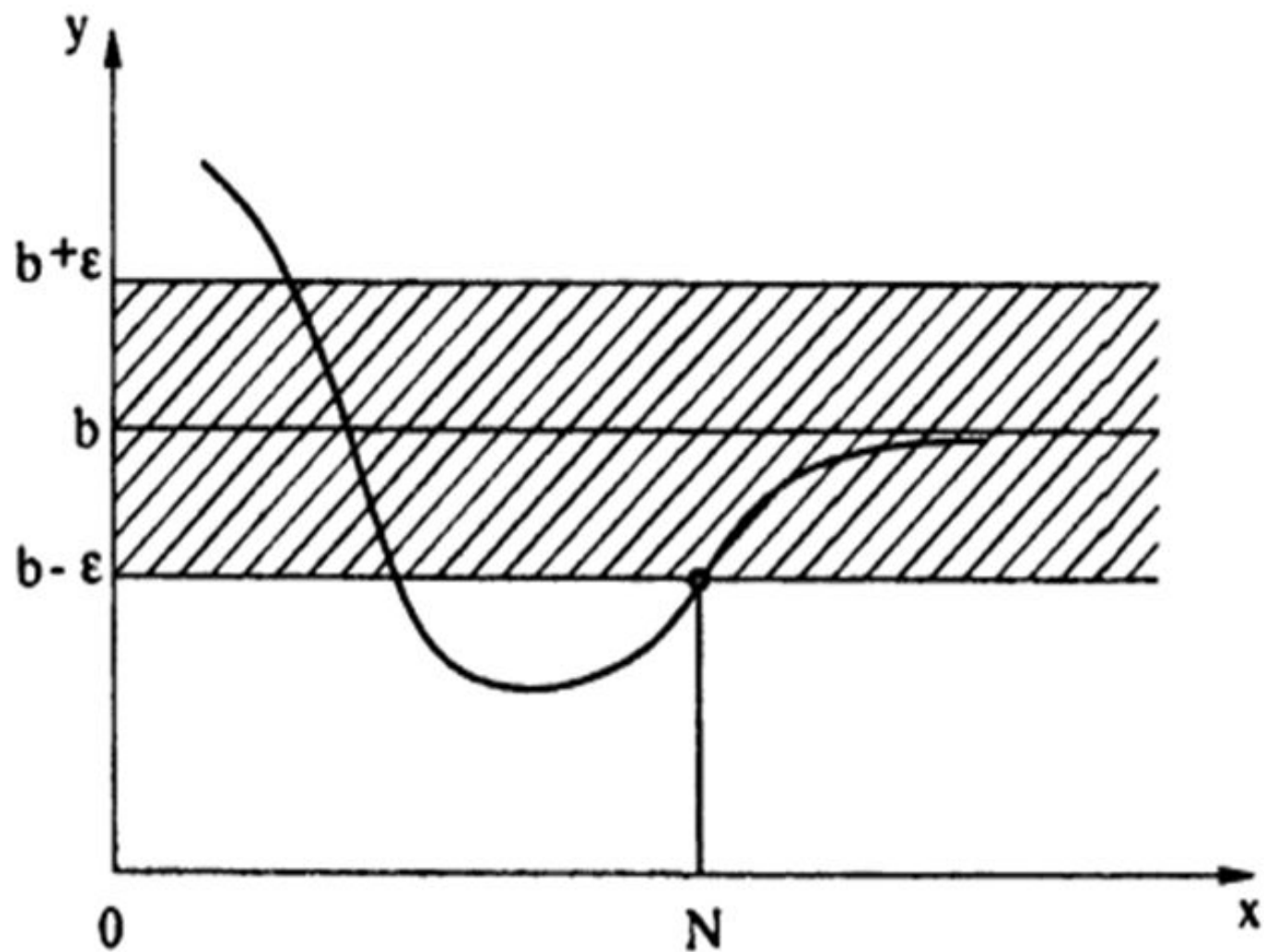


$f(x)$

$= b$



Значение предела



Геометрический смысл предела функции при $x \rightarrow \infty$

Аналогично вводится понятие предела функции в общем случае

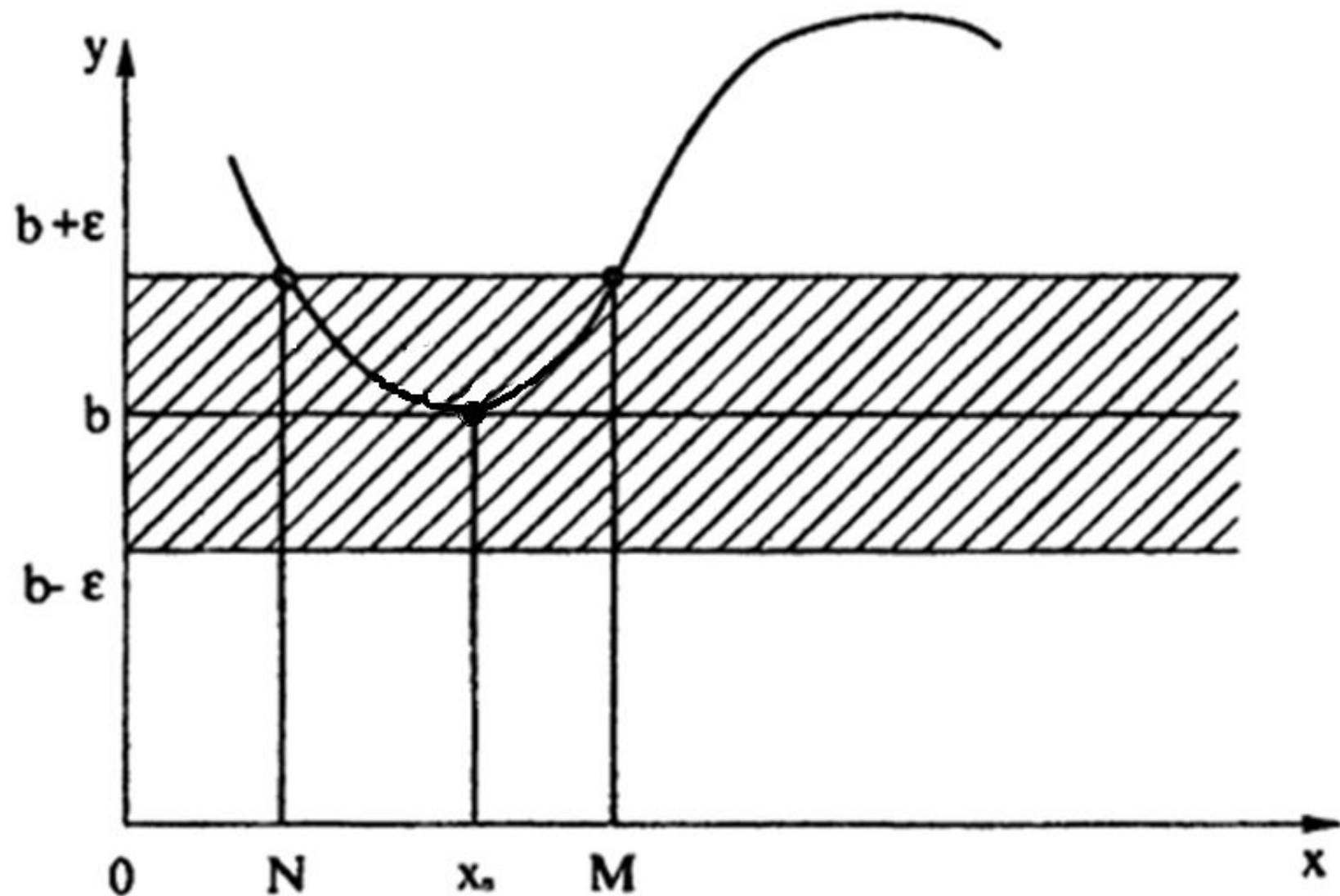
Число b является пределом функции $y = f(x)$

при $x \rightarrow x_0$, если каково бы ни было значение ε , можно найти такие N и M , что для всех x , лежащих в интервале $(N; M)$ (за исключением, быть может, точки x_0), выполняется неравенство

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

Символическая запись предела функции при $x \rightarrow x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$$



Геометрический смысл предела функции при $x \rightarrow x_0$

Теоремы о пределах

1. Предел постоянного равен этому постоянному.

$$\lim_{x \rightarrow a} C = C$$

2. Предел алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме пределов от этих функций.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$$

Теоремы о пределах

3. Предел произведения двух функций равен произведению пределов от этих функций.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$$

4. Предел частного двух функций равен частному пределов от этих функций при условии, что предел знаменателя не равен нулю

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)} \text{ при условии } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) \neq 0$$

Следствия из теорем о пределах

1. Постоянный множитель можно вынести за знак предела.

$$\lim_{x \rightarrow a} (K \cdot f(x)) = K \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

2. Если n – натуральное число то:

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

3. Предел многочлена (целой рациональной функции)

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

при $x \rightarrow a$ равен значению этого многочлена при $x=a$.

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$$

4. Предел дробно-рациональной функции

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots + b_{n-1}x + b_n}$$

при $x \rightarrow a$, равен значению этой функции при $x=a$, при условии что a входит в область допустимых значений функции.

$$\lim_{x \rightarrow a} R(x) = R(a)$$

5. Используются также следующие свойства

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$$

При решении задач на поиск пределов функции необходимо обращать внимание на возникновение **неопределенностей**. В этом случае для решения задач необходимо применять специальные методы.

Производная

Задача о скорости движения

Пусть тело движется прямолинейно и задан закон его движения $s = s(t)$, т.е. известно расстояние s точки от некоторого начала отсчета в каждый момент времени t .

В момент времени t пройденное расстояние равно $s(t)$, в момент времени $t + \Delta t$ расстояние равно $s(t + \Delta t)$

За промежуток времени от t до $t+\Delta t$ т.е. за время Δt тело пройдет расстояние $\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$.

Средняя скорость движения за промежуток времени Δt будет

$$v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Средняя скорость в момент времени t в общем случае зависит от Δt .

Чем меньше промежуток Δt , тем точнее средняя скорость будет соответствовать реальной скорости тела в момент времени t .

В предельном случае можно записать

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Пределы подобного вида очень часто встречаются в математике. Это привело к возникновению понятия производной.

Определение производной

Производной функции $f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения (изменения) функции к приращению (изменению) аргумента, при стремлении изменения аргумента к нулю, если этот предел существует

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Общее правило поиска производной

Пусть дана функция $f(x)$, непрерывная и определенная в некоторой области. Необходимо найти производную этой функции.

1. Придадим аргументу x некоторое приращение (изменение) Δx и подставим в выражение функции вместо x новое значение $x + \Delta x$. Найдем новое измененное значение функции при новом значении аргумента.

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

2. Найдем приращение (изменение) функции.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

3. Найдем отношение приращения функции к приращению аргумента

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

4. Находим предел полученного отношения при

$$\Delta x \rightarrow 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Этот предел и есть производная исходной функции $f(x)$

Рассмотрим пример

Пусть $y = \sin x$, найдем производную этой функции.

Увеличим x на Δx при этом y увеличится на Δy

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$

Это выражение можно записать в виде

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$

Для преобразования этого выражения используем формулу разности синусов

⊙
$$\Delta y = 2 \cdot \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin \frac{x + \Delta x - x}{2}$$

После упрощения

$$\Delta y = 2 \cdot \cos \frac{2x + \Delta x}{2} \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}$$

Из тригонометрии известно что при малых Δx справедливо равенство

$\sin \frac{\Delta x}{2} = \frac{\Delta x}{2}$, отсюда следует

$$\Delta y = 2 \cdot \cos \frac{2x + \Delta x}{2} \cdot \frac{\Delta x}{2}$$

Или после сокращения

$$\Delta y = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \Delta x$$

⊙ Получим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \Delta x}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

Найдем согласно определению
производной

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$$

Таблица производных

Функция	Производная
1. $y = C$	$y' = 0$
2. $y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$
3. $y = \text{Sin}(x)$	$y' = \text{Cos}(x)$
4. $y = \text{Cos}(x)$	$y' = -\text{Sin}(x)$
5. $y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln(a)$
6. $y = \log_a x$	$y' = 1/(x \cdot \ln a)$
7. $y = e^x$	$y' = e^x$

Основные правила дифференцирования.

Пусть заданы две функции $u(x)$ и $v(x)$.

1. Производная алгебраической суммы двух функций

$$y = u \pm v \quad y' = u' \pm v'$$

2. Производная произведения двух функций.

$$y = u \cdot v \quad y' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

3. Производная частного двух функций

$$y = \frac{u}{v} \quad y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

4. Производная сложной функции.

Пусть $y = f(u)$, а $u = v(x)$ тогда говорят, что y является сложной функцией. Её производная находится по формуле

$$y' = v'(x) \cdot f'(v(x))$$

Дифференциал функции

Дифференциалом функции $f(x)$ в точке x называется главная, линейная относительно Δx , часть приращения функции

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

При $\Delta x \rightarrow 0$ можно записать дифференциал в виде

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

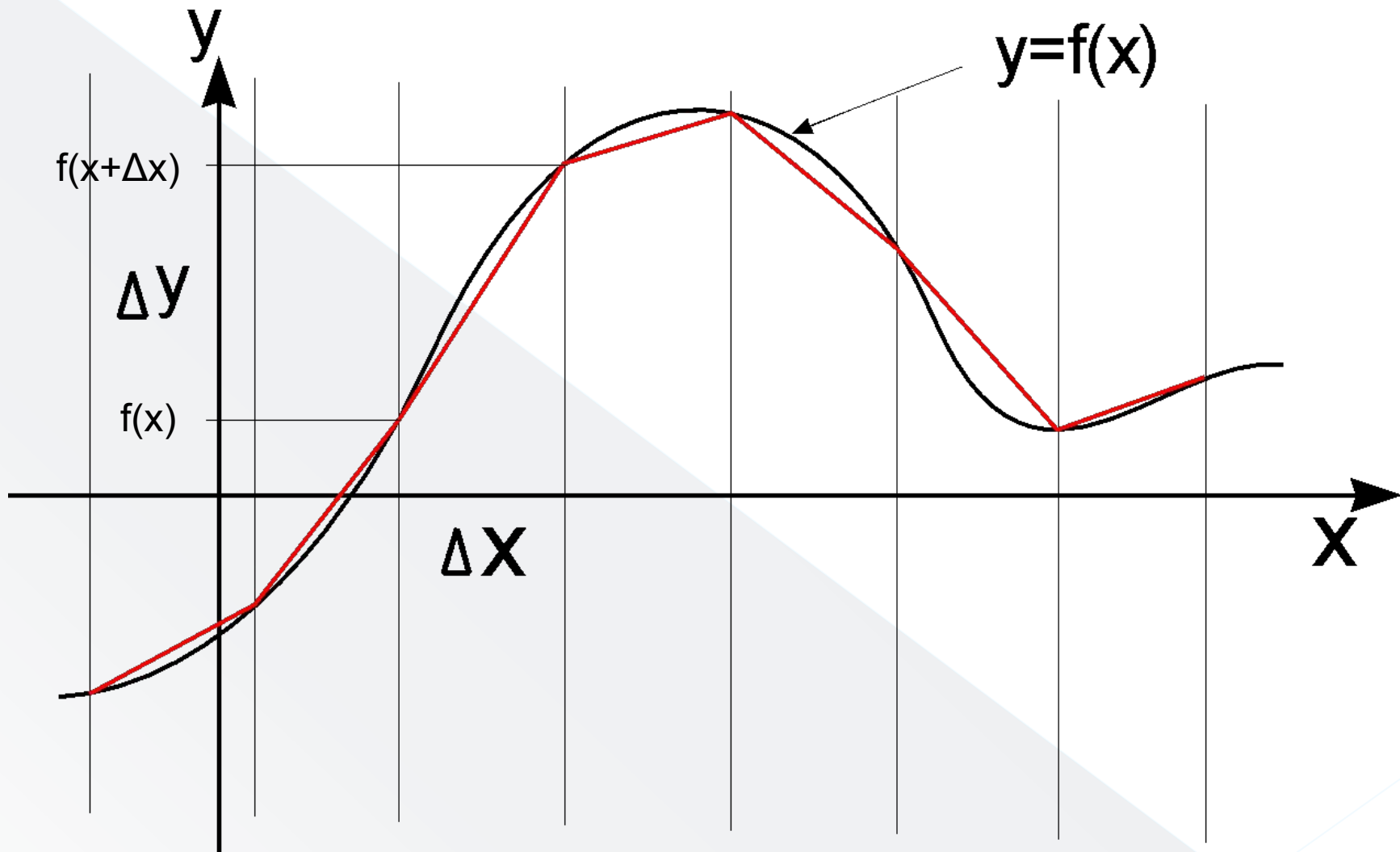
И следовательно производную

можно записать в виде $f'(x) = \frac{dy}{dx}$

Численные методы дифференцирования

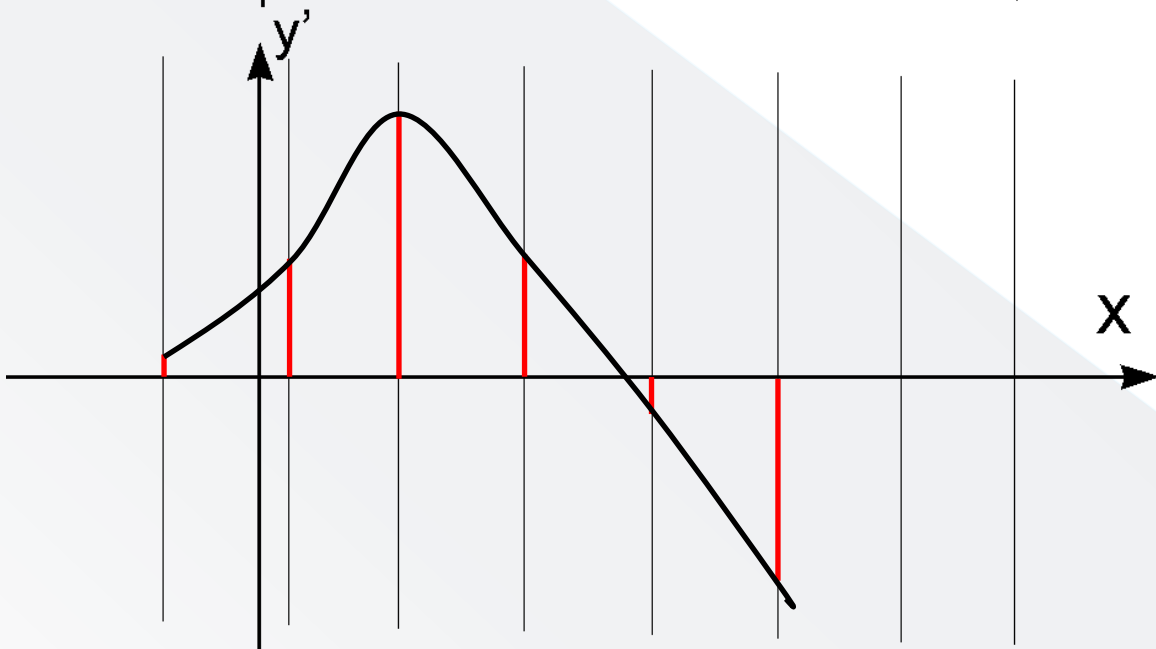
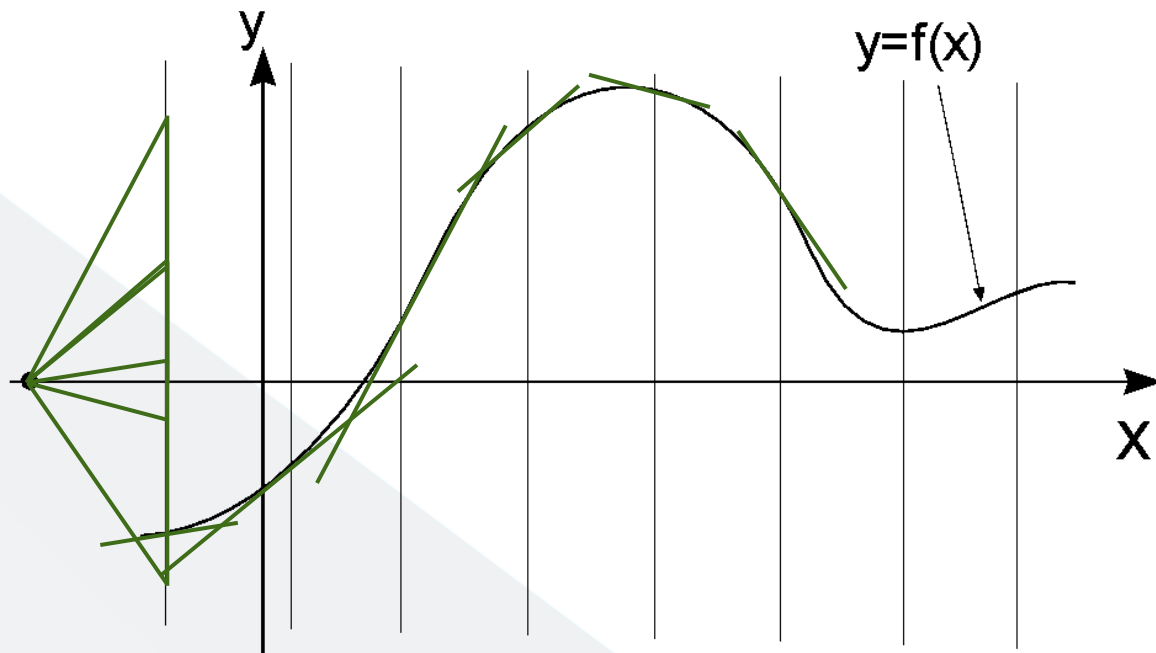
Численные методы дифференцирования основаны на том, что исследуемая функция на малом участке может быть представлена в виде отрезка прямой и следовательно при малом изменении аргумента Δx можно записать

$$y' \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



Геометрические методы дифференцирования

Геометрическим смыслом производной в данной точке является тангенс угла наклона касательной проведенной к графику функции через данную точку. На этом основан геометрический метод дифференцирования.



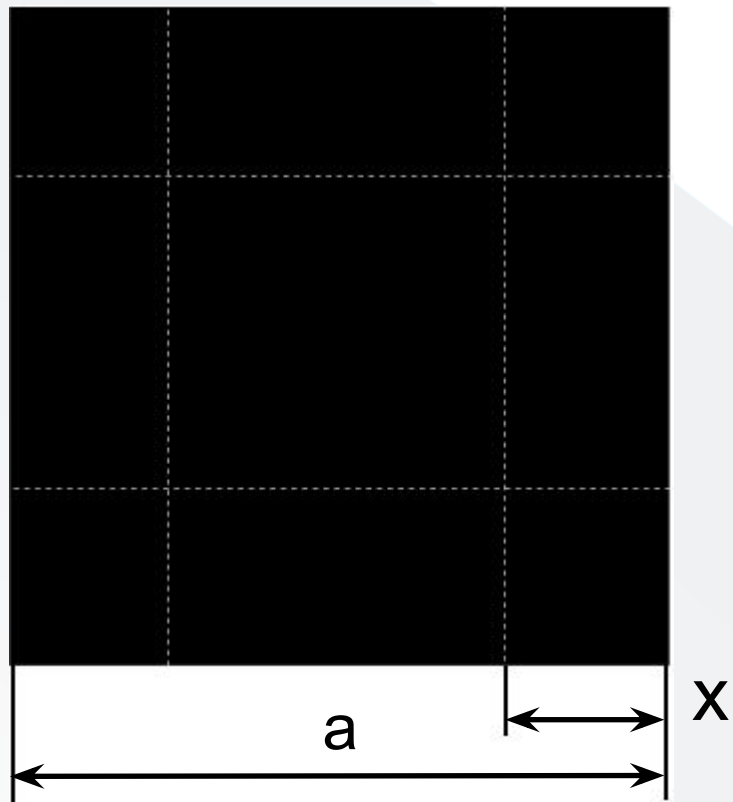
Производные высших порядков

Производной второго порядка функции $y=f(x)$ называется производная от её производной.

Вторая производная обозначается y'' ,
или $\frac{d^2 y}{dx^2}$

Если $s=f(t)$ – закон прямолинейного движения точки, то вторая производная пути по времени есть ускорение этого движения.

Использование производной для решения задач на экстремум функции



Задача о квадратном ведре. Дан квадратный лист металла с ребром равным a . По углам листа делают вырезы размером x , сгибают лист по вырезам и запаивают швы, получается квадратное ведро. Необходимо узнать при какой величине выреза x объем ведра будет максимальный

Из рисунка видно, что основанием ведра будет квадрат с ребром равным $a - 2x$, а высотой ведра будет размер x . Отсюда объем можно вычислить по формуле.

$$V = (a - 2x)^2 \cdot x$$

Упростим выражение раскрыв скобки.

$$V = (a^2 - 4ax + 4x^2) \cdot x$$

$$V = a^2x - 4ax^2 + 4x^3$$

В точке максимума производная этой функции равна нулю, следовательно

$$V' = a^2 - 8ax + 12x^2 = 0$$

• Перепишем полученное выражение в более привычном виде и решим его относительно x

$$V' = 12x^2 - 8ax + a^2 = 0$$
$$x = \frac{8a \pm \sqrt{64a^2 - 4 \cdot 12a^2}}{24}$$
$$x = \frac{8a \pm 4a}{24}$$

Решение дает два значения

$$x_1 = \frac{1}{2}a \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{1}{6}a$$

Так как x не может быть равен x_1 , то ответом будет значение x_2

В общем случае задачи на экстремум решаются в следующей последовательности:

1. Составляется уравнение в левой части которого находится величина экстремум которой ищется, а в правой переменная от которой этот экстремум зависит.
2. Находится производная полученной функции и приравнивается к нулю
3. Решается полученное уравнение относительно переменной.
4. Анализируются полученные решения.

Применение производной для исследования функции.

Производные при исследовании функций используются для:

1. Определения интервалов возрастания и убывания функции.
2. Поиска точек максимумов и минимумов функции, точек перегибов функции.
3. Поиска участков выпуклости и вогнутости исследуемой функции
4. Поиска точек перегиба функции (если они есть)

1. Для определения участков возрастания, уменьшения и постоянства функции, воспользуемся следующими признаками

Достаточный признак возрастания, убывания функции

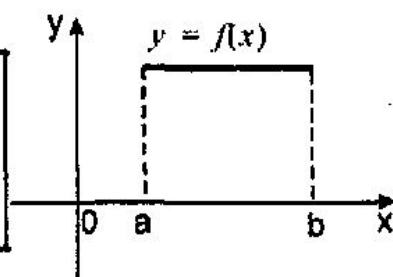
Если $f'(x) > 0$
для всех $x \in (a, b)$, \Rightarrow функция $y = f(x)$
возрастает на промежутке (a, b) .

Если $f'(x) < 0$
для всех $x \in (a, b)$, \Rightarrow функция $y = f(x)$
убывает на промежутке (a, b) .

Если функция непрерывна в конце промежутка, то его можно присоединить к промежутку возрастания (убывания) функции.

Достаточное и необходимое условие постоянства функции

Если $f'(x) = 0$
для всех $x \in (a, b)$, \Leftrightarrow функция $y = f(x)$
постоянная
на промежутке (a, b) .



2. Для поиска критических точек находят точки в которых производная функции равна нулю или не существует.

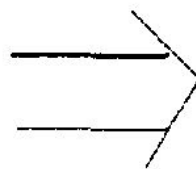
Критические точки функции

$y = f(x)$ — непрерывная функция.

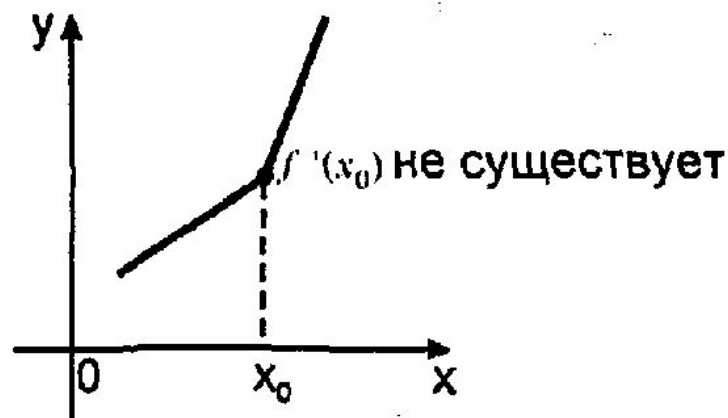
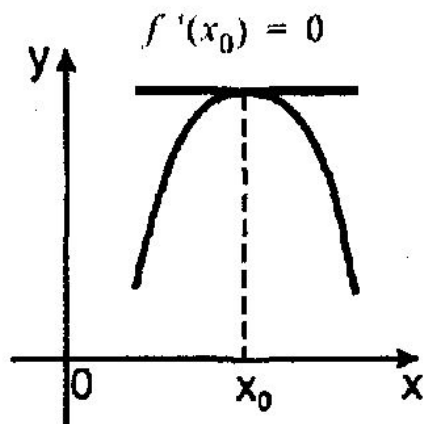
x_0 — внутренняя точка её области определения.

Если

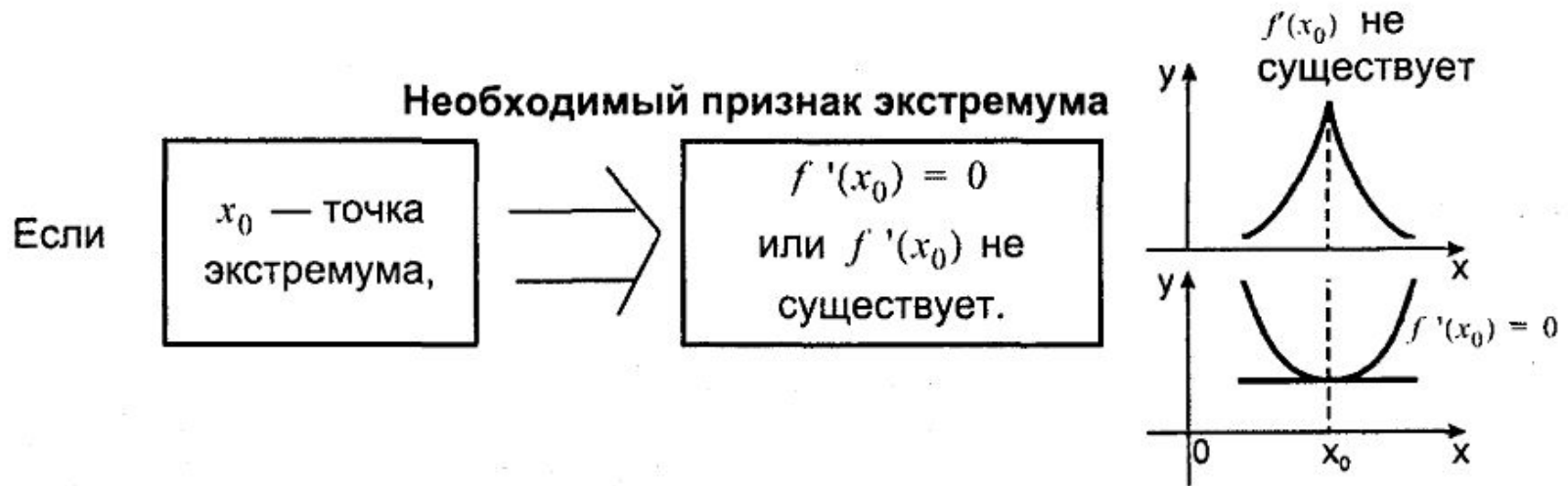
$f'(x_0) = 0$
или $f'(x_0)$ не существует,



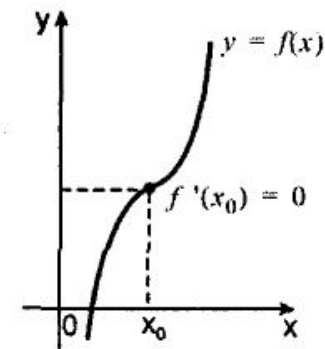
x_0 — критическая точка.



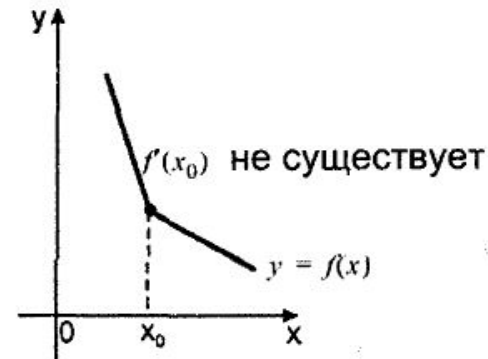
3. Поиск точек экстремумов функции производят среди критических точек



Точки экстремума нужно искать только среди критических точек, но не каждая точка, в которой $f'(x_0) = 0$ или не существует, является точкой экстремума.



$f'(x_0) = 0$, но x_0 — не является точкой экстремума.



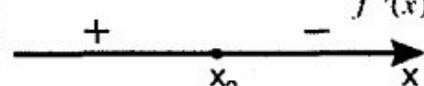
$f'(x_0)$ не существует, но x_0 — не является точкой экстремума.

Достаточный признак экстремума функции

Первый признак

Если x_0 — критическая точка, $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ — не существует.

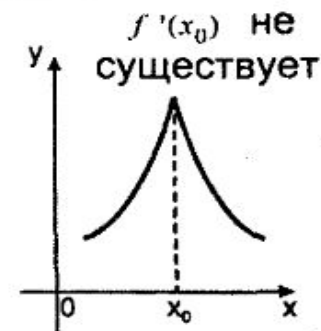
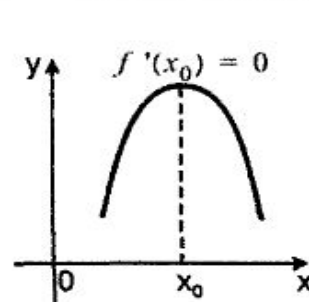
Если при переходе через x_0 производная $f'(x)$ изменяет знак с «+» на «-», $f'(x)$



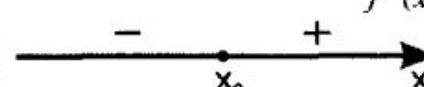
A horizontal number line with an arrow pointing to the right, labeled x at the end. A point x_0 is marked on the line. To the left of x_0 , the line is labeled with a plus sign (+). To the right of x_0 , the line is labeled with a minus sign (-). The label $f'(x)$ is placed above the right side of the line.



x_0 — точка максимума.



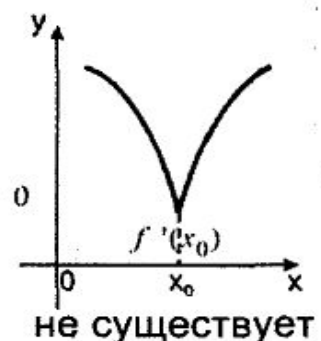
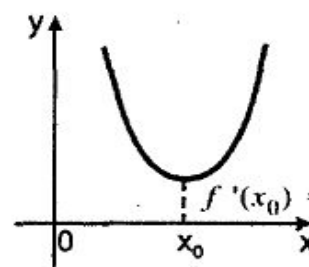
Если при переходе через x_0 производная $f'(x)$ изменяет знак с «-» на «+», $f'(x)$



A horizontal number line with an arrow pointing to the right, labeled x at the end. A point x_0 is marked on the line. To the left of x_0 , the line is labeled with a minus sign (-). To the right of x_0 , the line is labeled with a plus sign (+). The label $f'(x)$ is placed above the right side of the line.



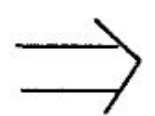
x_0 — точка минимума.



Второй признак

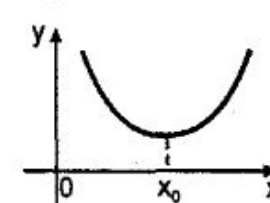
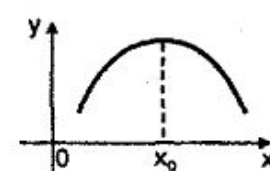
$f'(x_0) = 0$
 $f''(x_0) < 0$

$f'(x_0) = 0$
 $f''(x_0) > 0$



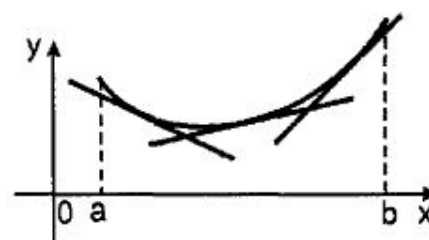
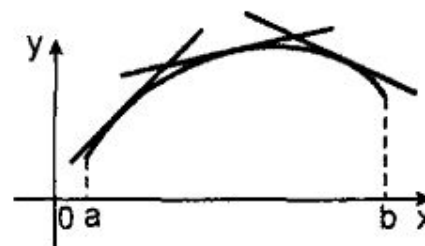
x_0 — точка максимума.

x_0 — точка минимума.

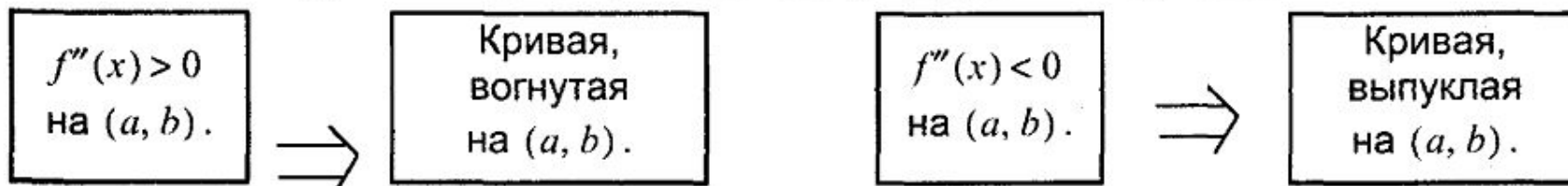


4. Анализ выпуклости функции

Выпуклость и вогнутость кривой

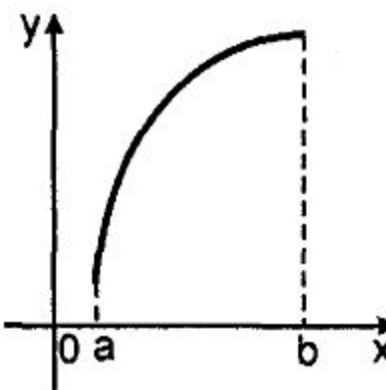
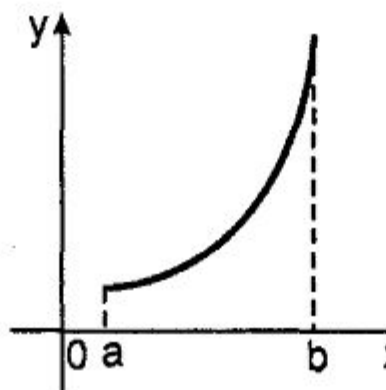
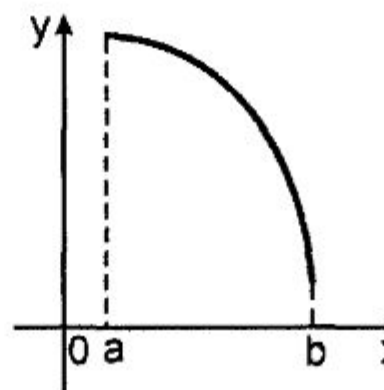
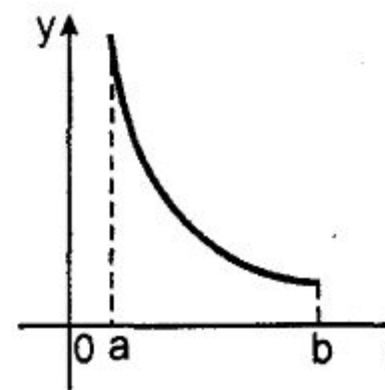


Достаточные признаки выпуклости и вогнутости



Для построения графика целесообразно проанализировать, какой вид имеет график функции на интервале (a, b) в зависимости от знаков первой и второй производных.

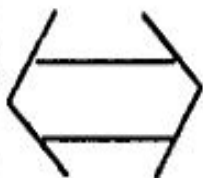
Результат удобно свести в таблицу:

$y' > 0$ $y'' < 0$	$y' > 0$ $y'' > 0$	$y' < 0$ $y'' < 0$	$y' < 0$ $y'' > 0$
			
возрастает, выпуклая.	возрастает, вогнутая.	убывает, выпуклая.	убывает, вогнутая.

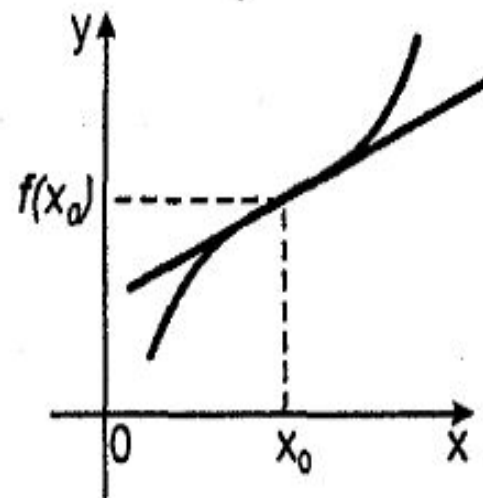
5. Анализ точек перегиба функции

Точки перегиба графика функции

Точка
перегиба
 $(x_0; f(x_0))$.



В точке $(x_0; f(x_0))$
существует
касательная, при
переходе через эту
точку выпуклость
меняется на вогнутость
(или наоборот).



Достаточный признак точки перегиба.

В точке $(x_0; f(x_0))$ существует касательная, $y''(x_0)=0$ (или не существует) и при переходе через точку x_0 y'' изменяет знак.



$(x_0; f(x_0))$ – точка перегиба

Разные типы точек перегиба

