Предел функции

Бесконечные величины и правила работы с ними.

Бесконечно большим или просто бесконечным, называется **переменное** число, стремящееся превзойти по абсолютной величине всякую границу, как бы велика она не была, а **бесконечно малым** называют всякое переменное число, имеющее пределом нуль.

Две бесконечно малые величины называются величинами одного и того же порядка, если их отношение стремится к конечному пределу, отличному от нуля.

Если же отношение одной бесконечно малой величины β к другой α стремится к нулю, то говорят, что β бесконечно малая **более высокого порядка**, чем α.

Правила работы с бесконечными величинами

1. $\alpha \cdot n = \alpha$

2. $\alpha + \beta = \alpha$

3. $\alpha \cdot \beta = \alpha' (\textit{более высокого порядка})$

4. $\dfrac{\alpha}{n} = \alpha$

5. $n \cdot \gamma = \gamma$

6. $\gamma \cdot \mu = \gamma' \, (\textit{более высокого порядка})$

7. $\dfrac{n}{\gamma} = \alpha$

8. $\dfrac{n}{\alpha} = \gamma$

9. $\dfrac{\gamma}{\alpha} = \gamma$

10. $\dfrac{\alpha}{\gamma} = \alpha$

11. *Ситуации* $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\mu}, \alpha \cdot \gamma, \gamma - \mu$ *и некоторые другие называются неопределенностями и требуют для своего разрешения специальных приемов.*

Предел функции

Предел функции при $x \to \infty$

Рассмотрим функцию $y = f(x) = 2 - \frac{1}{x}$ при неограниченном росте величины x

X	1	2	10	100	1000
Y	1	1.5	1.9	1.99	1.999

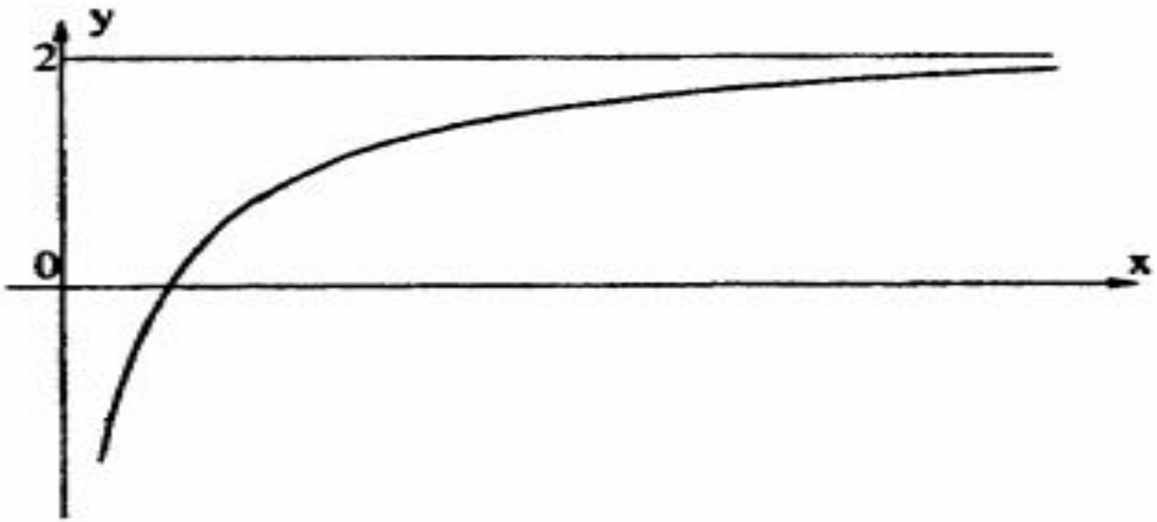


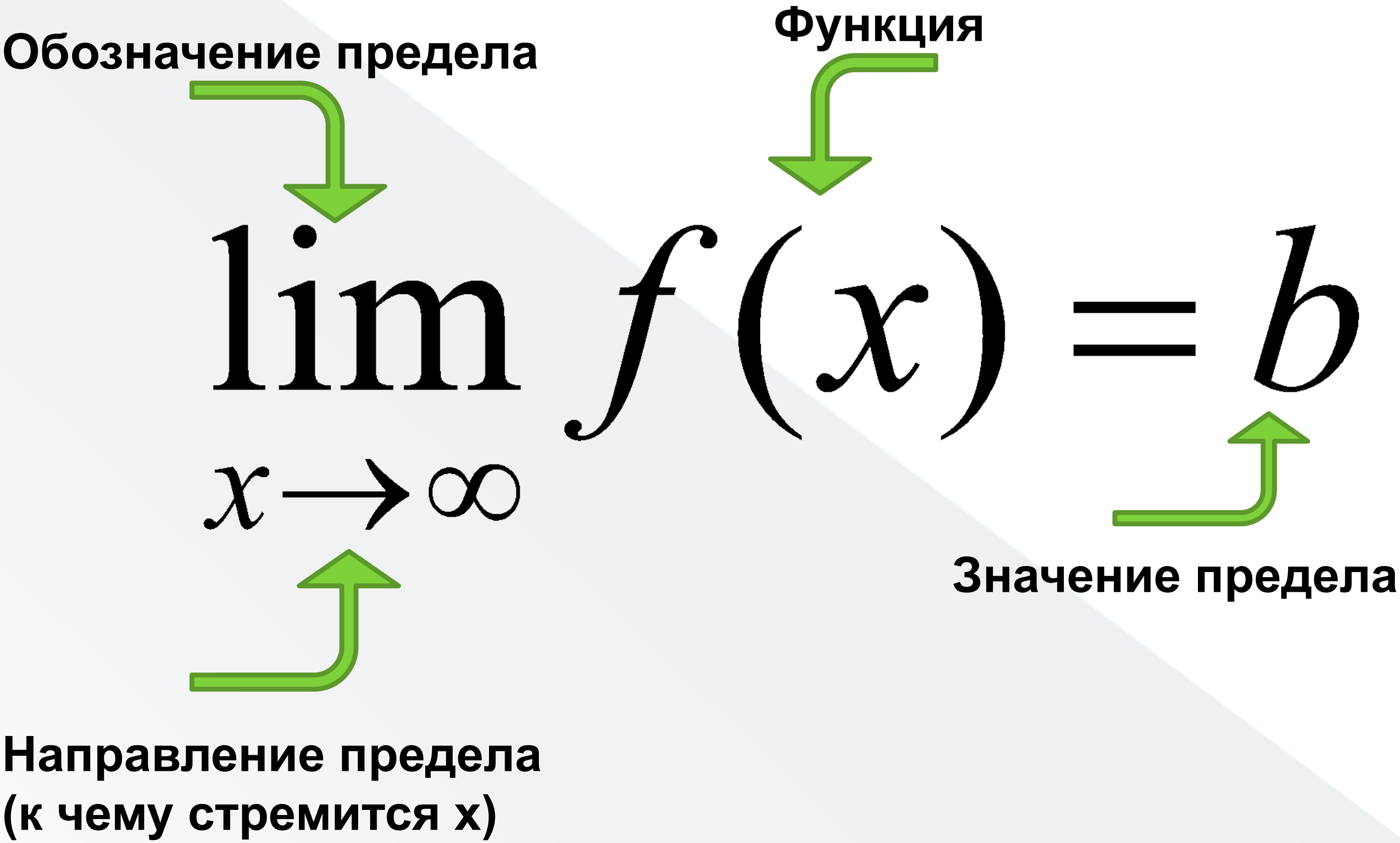
График функции $y = 2 - \frac{1}{x}$

Из приведенной таблицы и графика видно, что значение функции при росте значения аргумента постепенно приближается к 2.
Таким образом для функции может быть введено понятие предела функции.

Определение предела при $x \to \infty$
Число b называется пределом функции y=f(x) при $x \to \infty$, если каково бы ни было положительное число ε можно найти такое N, что для всех x>N выполняется неравенство

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

Символическая запись такого предела выглядит так:



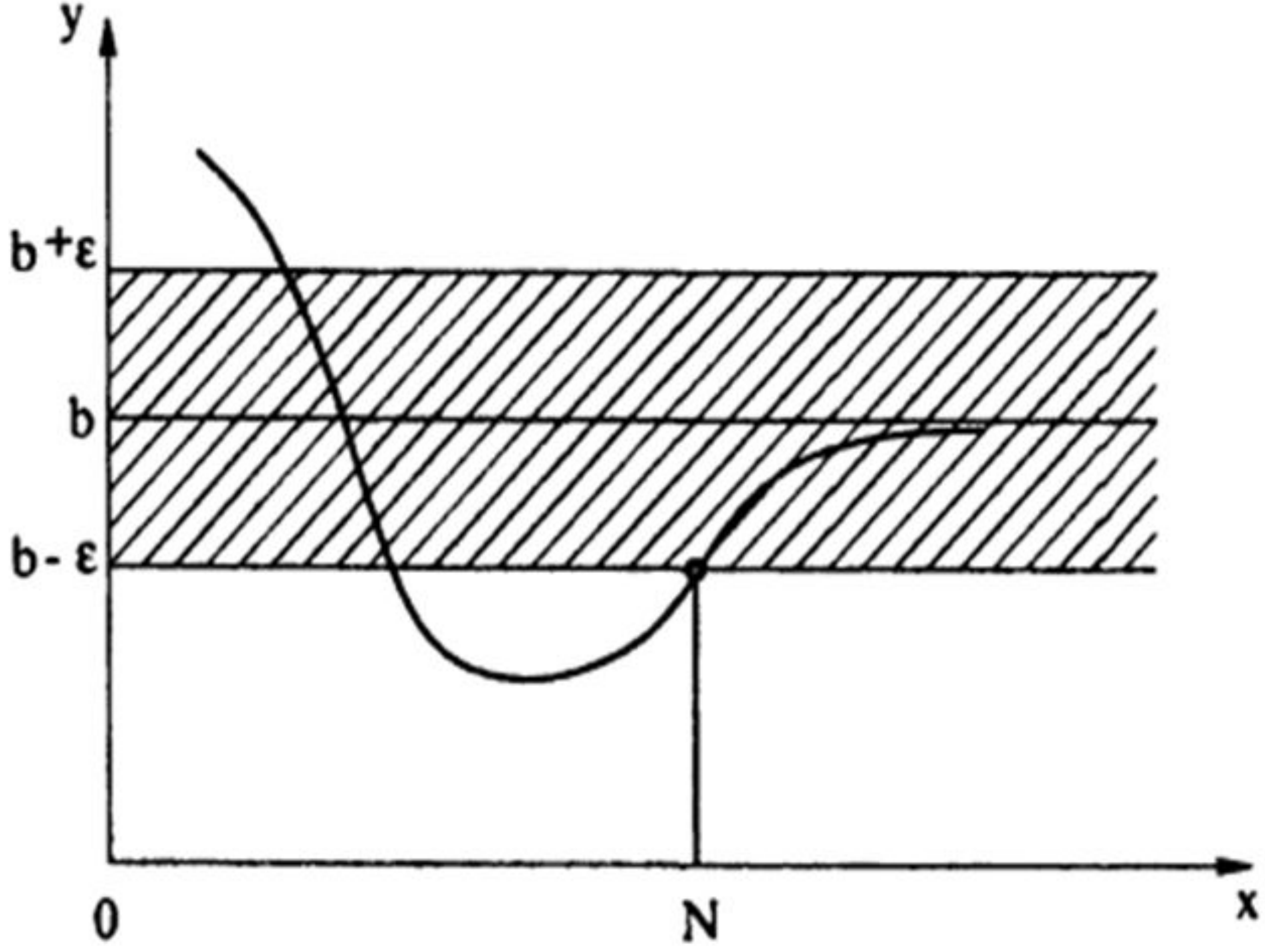
Обозначение предела

Функция

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

Значение предела

Направление предела (к чему стремится x)



Геометрический смысл предела функции при $x \to \infty$

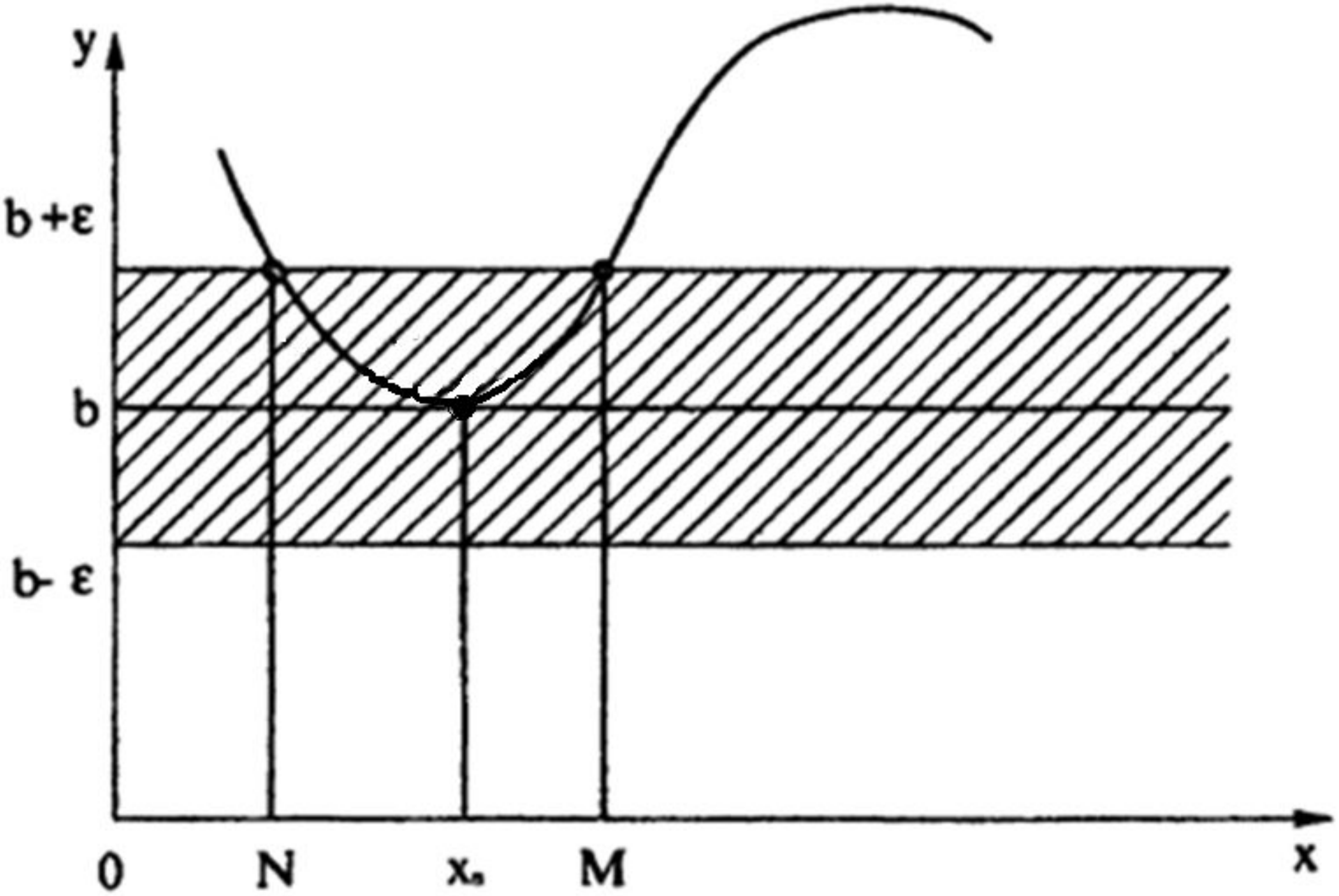
Аналогично вводится понятие предела функции в общем случае

Число b является пределом функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$, если каково бы ни было значение ε, можно найти такие N и M, что для всех x, лежащих в интервале (N; M) (за исключением, быть может, точки x_0), выполняется неравенство

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

Символическая запись предела функции при $x \to x_0$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b$$



Геометрический смысл предела функции при $x \to x_0$

Теоремы о пределах

1. Предел постоянного равен этому постоянному.

$$\lim_{x\to a} C = C$$

2. Предел алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме пределов от этих функций.

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\pm\varphi(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a}\varphi(x)$$

Теоремы о пределах

3. Предел произведения двух функций равен произведению пределов от этих функций.

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot\varphi(x)\right)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}\varphi(x)$$

4. Предел частного двух функций равен частному пределов от этих функций при условии, что предел знаменателя не равен нулю

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}\ \textit{при условии}\ \ \lim_{x\to a}\varphi(x)\neq 0$$

Следствия из теорем о пределах

1. Постоянный множитель можно вынести за знак предела.

$$\lim_{x\to a}(K\cdot f(x))=K\cdot\lim_{x\to a}f(x)$$

2. Если n – натуральное число то:

$$\lim_{x\to a}x^n=a^n$$

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}$$

3. Предел многочлена (целой рациональной функции)

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_{n-1} x + a_n$$

при $x \to a$ равен значению этого многочлена при x=a.

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a)$$

4. Предел дробно-рациональной функции

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+...+b_{n-1}x+b_n}$$

при $x\to a$, равен значению этой функции при x=a, при условии что a входит в область допустимых значений функции.

$$\lim_{x\to a}R(x)=R(a)$$

- 5. Используются также следующие свойства

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

и

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

При решении задач на поиск пределов функции необходимо обращать внимание на возникновении **неопределенностей**. В этом случае для решения задач необходимо применять специальные методы.

Производная

Задача о скорости движения

Пусть тело движется прямолинейно и задан закон его движения $s = s(t)$, т.е. известно расстояние s точки от некоторого начала отсчета в каждый момент времени t.

В момент времени t пройденное расстояние равно s(t), в момент времени t+Δt расстояние равно s(t+ Δt)

За промежуток времени от t до t+Δt т.е. за время Δt тело пройдет расстояние

Δs=s(t+Δt)-s(t).

Средняя скорость движения за промежуток времени Δt будет

$$v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Средняя скорость в момент времени t в общем случае зависит от Δt.

- Чем меньше промежуток Δt, тем точнее средняя скорость будет соответствовать реальной скорости тела в момент времени t.
- В предельном случае можно записать

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

- Пределы подобного вида очень часто встречаются в математике. Это привело в возникновению понятия производной.

Определение производной

Производной функции $f(x)$ в точке х называется предел отношения приращения(изменения) функции к приращению (изменению) аргумента, при стремлении изменения аргумента к нулю, если этот предел существует

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Общее правило поиска производной

Пусть дана функция f(x), непрерывная и определенная в некоторой области. Необходимо найти производную этой функции.

1. Придадим аргументу x некоторое приращение (изменение) Δx и подставим в выражение функции вместо x новое значение x+Δx. Найдем новое измененное значение функции при новом значении аргумента.

$$y+ \Delta y=f(x+ \Delta x)$$

2. Найдем приращение (изменение) функции.

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

3. Найдем отношение приращения функции к приращению аргумента

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

4. Находим предел полученного отношения при

$$\Delta x \to 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Этот предел и есть производная исходной функции f(x)

Рассмотрим пример

- Пусть $y = \sin x$, найдем производную этой функции.

Увеличим x на Δx при этом y увеличится на Δy

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$

Это выражение можно записать в виде

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$

Для преобразования этого выражения используем формулу разности синусов

$$\Delta y = 2 \cdot \cos\frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin\frac{x + \Delta x - x}{2}$$

После упрощения

$$\Delta y = 2 \cdot \cos\frac{2x + \Delta x}{2} \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}$$

Из тригонометрии известно что при малых Δx справедливо равенство $\sin\frac{\Delta x}{2} = \frac{\Delta x}{2}$, отсюда следует

$$\Delta y = 2 \cdot \cos\frac{2x+\Delta x}{2} \cdot \frac{\Delta x}{2}$$

Или после сокращения

$$\Delta y = \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \Delta x$$

- Получим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \Delta x}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos(x + \frac{\Delta x}{2})$$

Найдем согласно определению производной

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) = \cos x$$

Таблица производных

Функция	Производная
1. $y = C$	$y' = 0$
2. $y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$
3. $y = Sin(x)$	$y' = Cos(x)$
4. $y = Cos(x)$	$y' = -Sin(x)$
5. $y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln(a)$
6. $y = \log_a x$	$y' = 1/(x \cdot \ln a)$
7. $y = e^x$	$y' = e^x$

Основные правила дифференцирования.

Пусть заданы две функции u(x) и v(x).

1. Производная алгебраической суммы двух функций

$$y = u \pm v \qquad y' = u' \pm v'$$

2. Производная произведения двух функций.

$$y = u \cdot v \qquad y' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

3. Производная частного двух функций

$$y = \frac{u}{v} \qquad y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

4. Производная сложной функции.

Пусть $y = f(u),\ a \quad u = v(x)$ тогда говорят, что у является сложной функцией. Её производная находится по формуле

$$y' = v'(x) \cdot f'(v(x))$$

Дифференциал функции

Дифференциалом функции f(x) в точке x называется главная, линейная относительно Δx, часть приращения функции

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

При $\Delta x \to 0$ можно записать дифференциал в виде

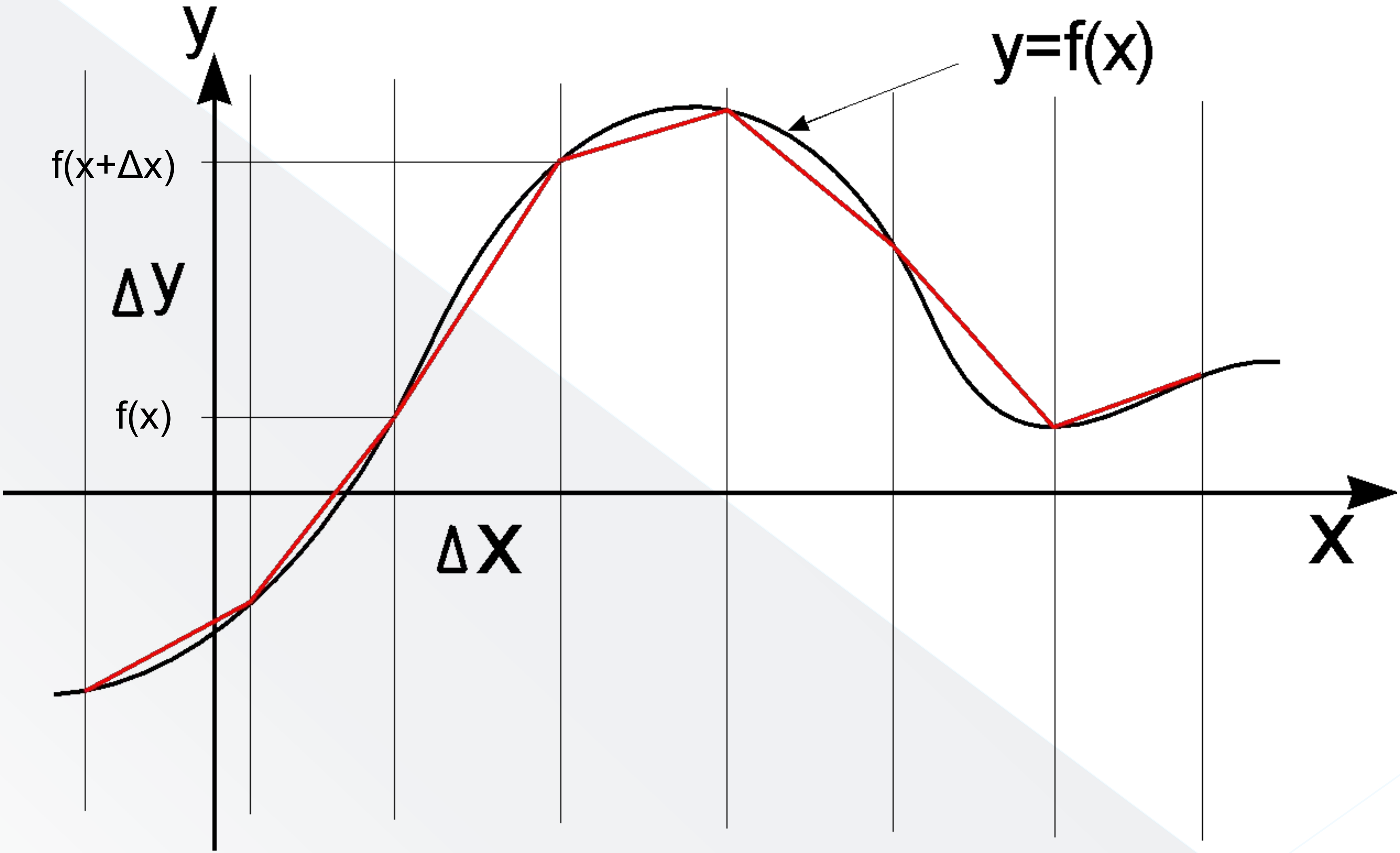
$$dy = f'(x) \cdot dx$$

И следовательно производную можно записать в виде $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$

Численные методы дифференцирования

- Численные методы дифференцирования основаны на том, что исследуемая функция на малом участке может быть представлена в виде отрезка прямой и следовательно при малом изменении аргумента Δx можно записать

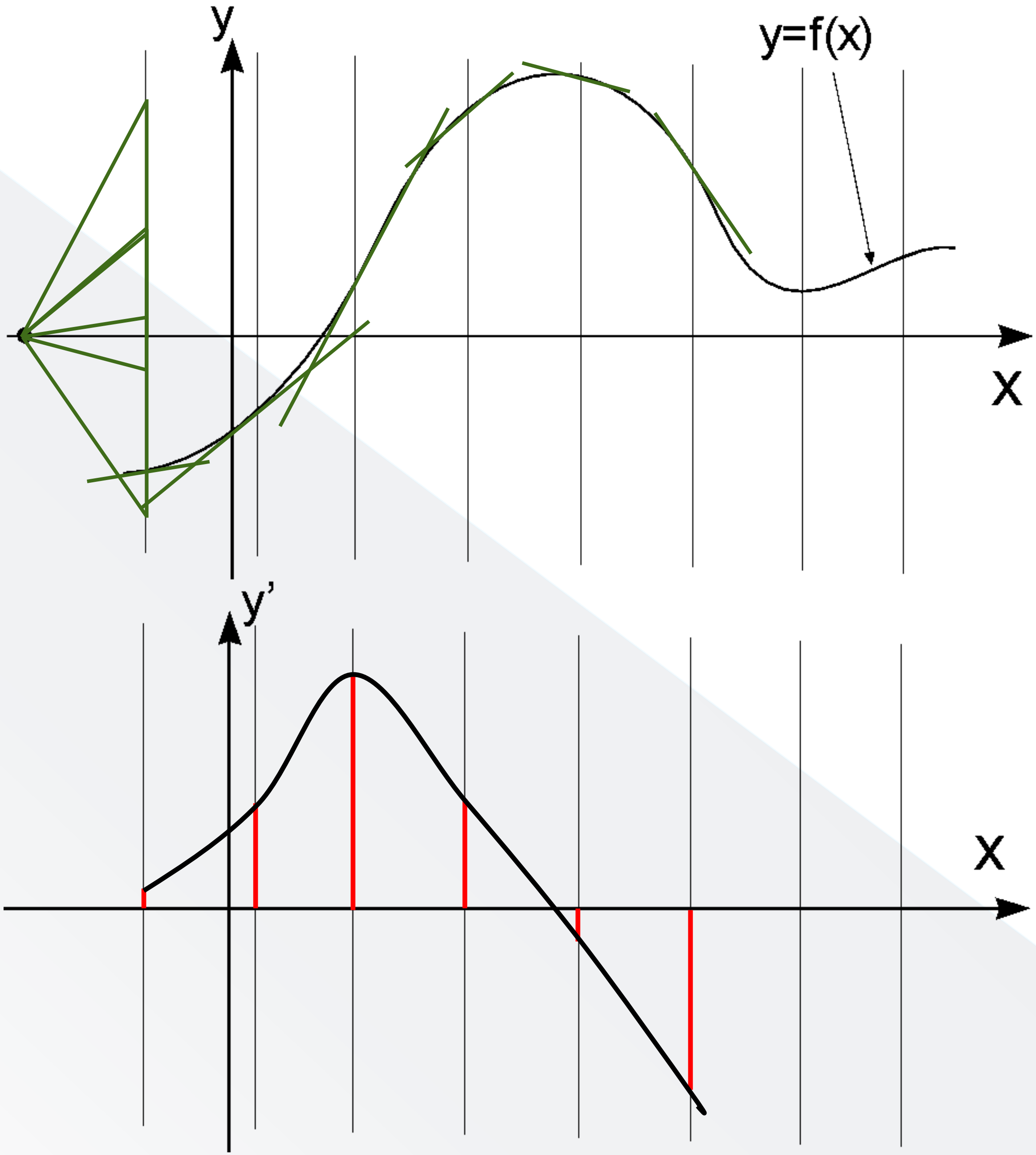
$$y' \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$


y
y=f(x)
f(x+Δx)
Δy
f(x)
Δx
x

Геометрические методы дифференцирования

Геометрическим смыслом производной в данной точке является тангенс угла наклона касательной проведенной к графику функции через данную точку.

На этом основан геометрический метод дифференцирования.


y
y=f(x)
x
y'
x

Производные высших порядков

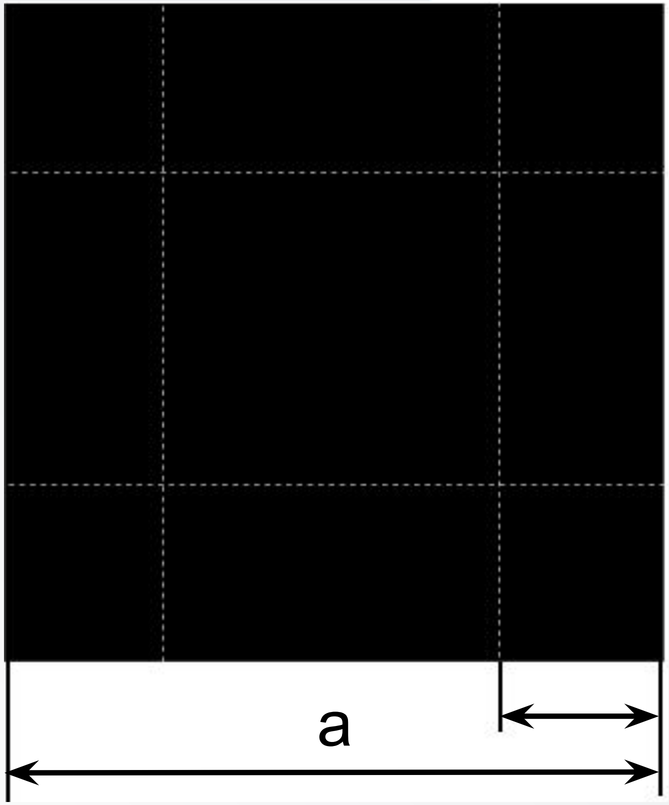
- Производной второго порядка функции y=f(x) называется производная от её производной.

Вторая производная обозначается y'',

или $\frac{d^2y}{dx^2}$

Если s=f(t) – закон прямолинейного движения точки, то вторая производная пути по времени есть ускорение этого движения.

Использование производной для решения задач на экстремум функции



Задача о квадратном ведре.

Дан квадратный лист металла с ребром равным а. По углам листа делают вырезы размером х, сгибают лист по вырезам и запаивают швы, получается квадратное ведро. Необходимо узнать при какой величине выреза х объем ведра будет максимальный

- Из рисунка видно, что основанием ведра будет квадрат с ребром равным а-2х, а высотой ведра будет размер х.

Отсюда объем можно вычислить по формуле.

$$V = (a - 2x)^2 \cdot x$$

Упростим выражение раскрыв скобки.

$$V = (a^2 - 4ax + 4x^2) \cdot x$$

$$V = a^2x - 4ax^2 + 4x^3$$

В точке максимума производная этой функции равна нулю, следовательно

$$V' = a^2 - 8ax + 12x^2 = 0$$

- Перепишем полученное выражение в более привычном виде и решим его относительно x

$$V' = 12x^2 - 8ax + a^2 = 0$$

$$x = \frac{8a \pm \sqrt{64a^2 - 4 \cdot 12a^2}}{24}$$

$$x = \frac{8a \pm 4a}{24}$$

Решение дает два значения

$$x_1 = \frac{1}{2}a \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{1}{6}a$$

Так как x не может быть равен x_1 , то ответом будет значение x_2

В общем случае задачи на экстремум решаются в следующей последовательности:

1. Составляется уравнение в левой части которого находится величина экстремум которой ищется, а в правой переменная от которой этот экстремум зависит.
2. Находится производная полученной функции и приравнивается к нулю
3. Решается полученное уравнение относительно переменной.
4. Анализируется полученные решения.

Применение производной для исследования функции.

Производные при исследовании функций используются для:

1. Определения интервалов возрастания и убывания функции.

2. Поиска точек максимумов и минимумов функции, точек перегибов функции.

3. Поиска участков выпуклости и вогнутости исследуемой функции

4. Поиска точек перегиба функции(если они есть)

1. Для определения участков возрастания, уменьшения и постоянства функции, воспользуемся следующими признаками

Достаточный признак возрастания, убывания функции

Если $f'(x) > 0$ для всех $x \in (a, b)$, $\Rightarrow$ функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке (a, b).

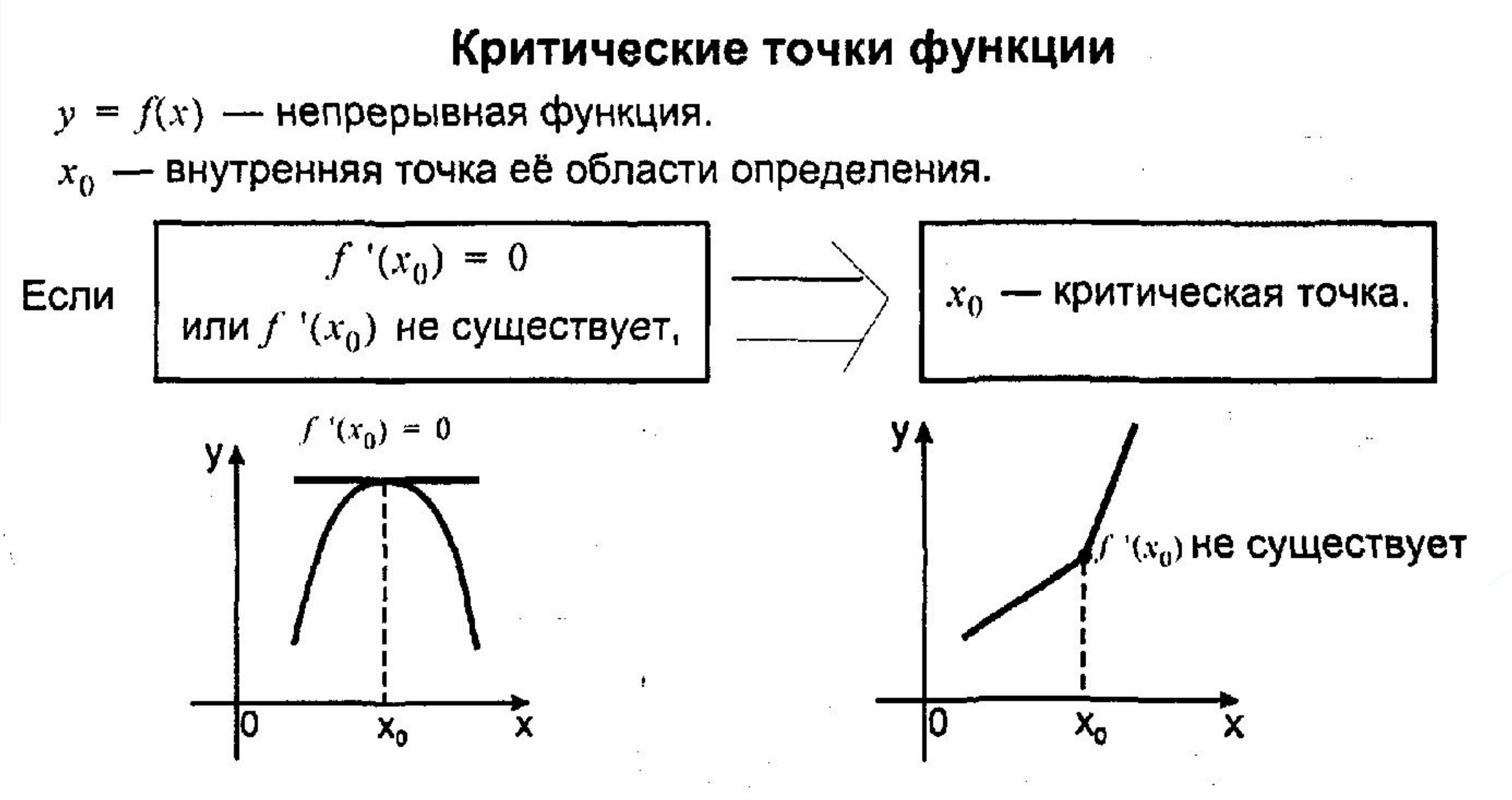
Если $f'(x) < 0$ для всех $x \in (a, b)$, $\Rightarrow$ функция $y = f(x)$ убывает на промежутке (a, b).

Если функция непрерывна в конце промежутка, то его можно присоединить к промежутку возрастания (убывания) функции.

Достаточное и необходимое условие постоянства функции

Если $f'(x) = 0$ для всех $x \in (a, b)$, $\Leftrightarrow$ функция $y = f(x)$ постоянная на промежутке (a, b).

2. Для поиска критических точек находят точки в которых производная функции равна нулю или не существует.



Критические точки функции

$y = f(x)$ — непрерывная функция.

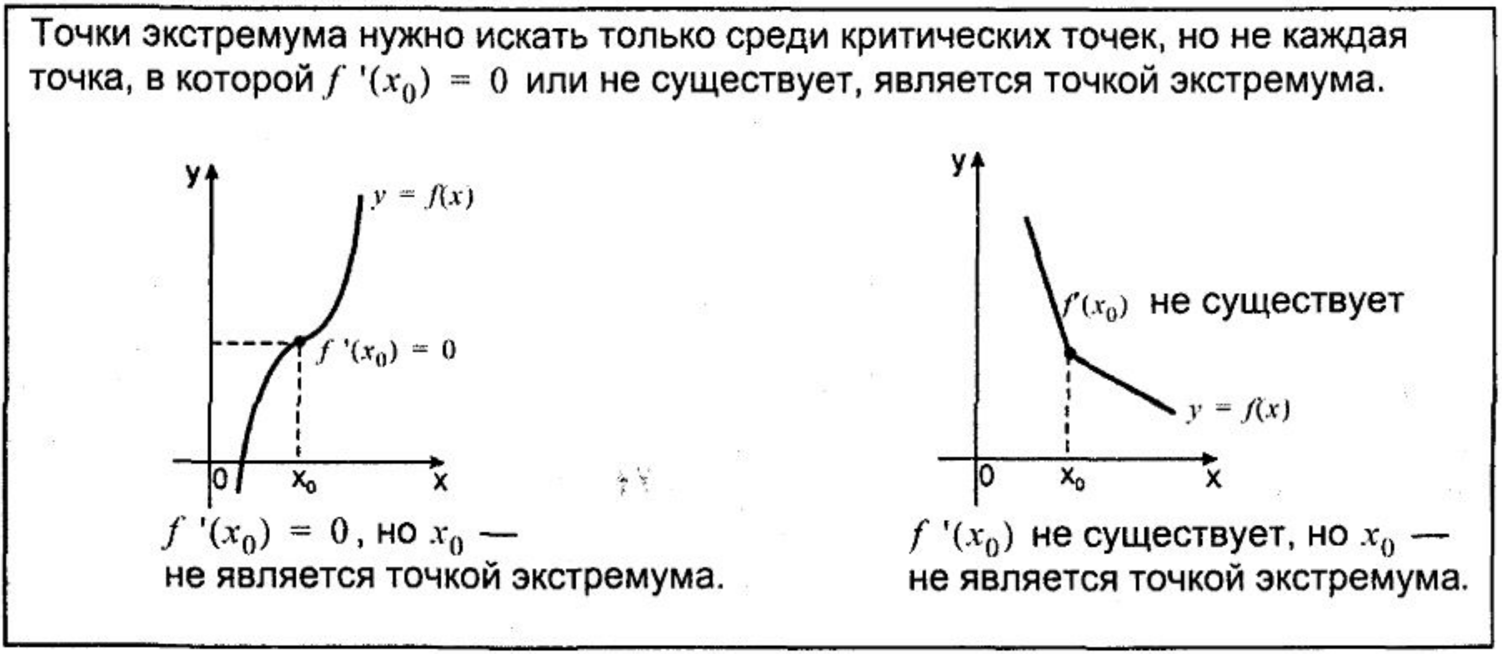
x_0 — внутренняя точка её области определения.

Если $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует, $\Rightarrow$ x_0 — критическая точка.

3. Поиск точек экстремумов функции производят среди критических точек

Необходимый признак экстремума

Если x_0 — точка экстремума, $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует.



Точки экстремума нужно искать только среди критических точек, но не каждая точка, в которой $f'(x_0) = 0$ или не существует, является точкой экстремума.

$f'(x_0) = 0$, но x_0 — не является точкой экстремума.

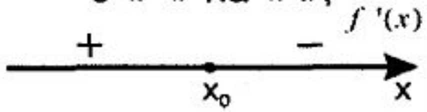
$f'(x_0)$ не существует, но x_0 — не является точкой экстремума.

Достаточный признак экстремума функции

Первый признак

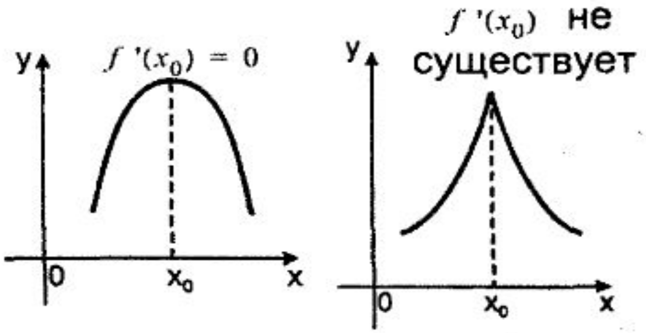
Если x_0 — критическая точка, $f\,'(x_0) = 0$ или $f\,'(x_0)$ — не существует.

Если при переходе через x_0 производная $f\,'(x)$ изменяет знак с «+» на «-»,

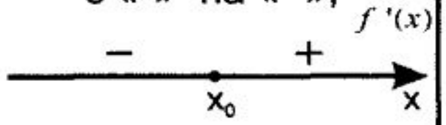


$\Longleftrightarrow$

x_0 — точка максимума.

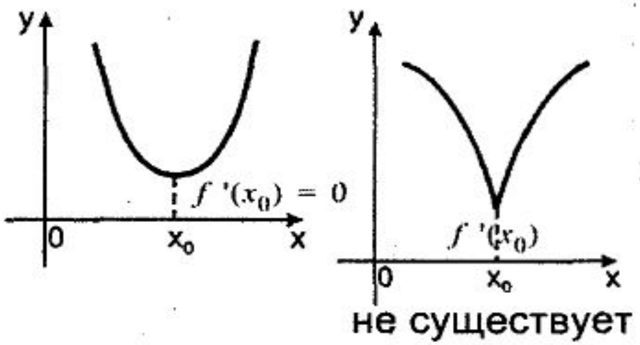


Если при переходе через x_0 производная $f\,'(x)$ изменяет знак с «-» на «+»,



$\Longleftrightarrow$

x_0 — точка минимума.



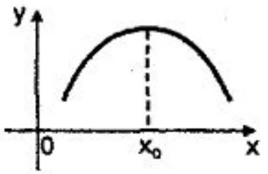
Второй признак

$f\,'(x_0) = 0$

$f\,''(x_0) < 0$

$\Longrightarrow$

x_0 — точка максимума.

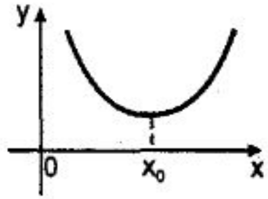


$f\,'(x_0) = 0$

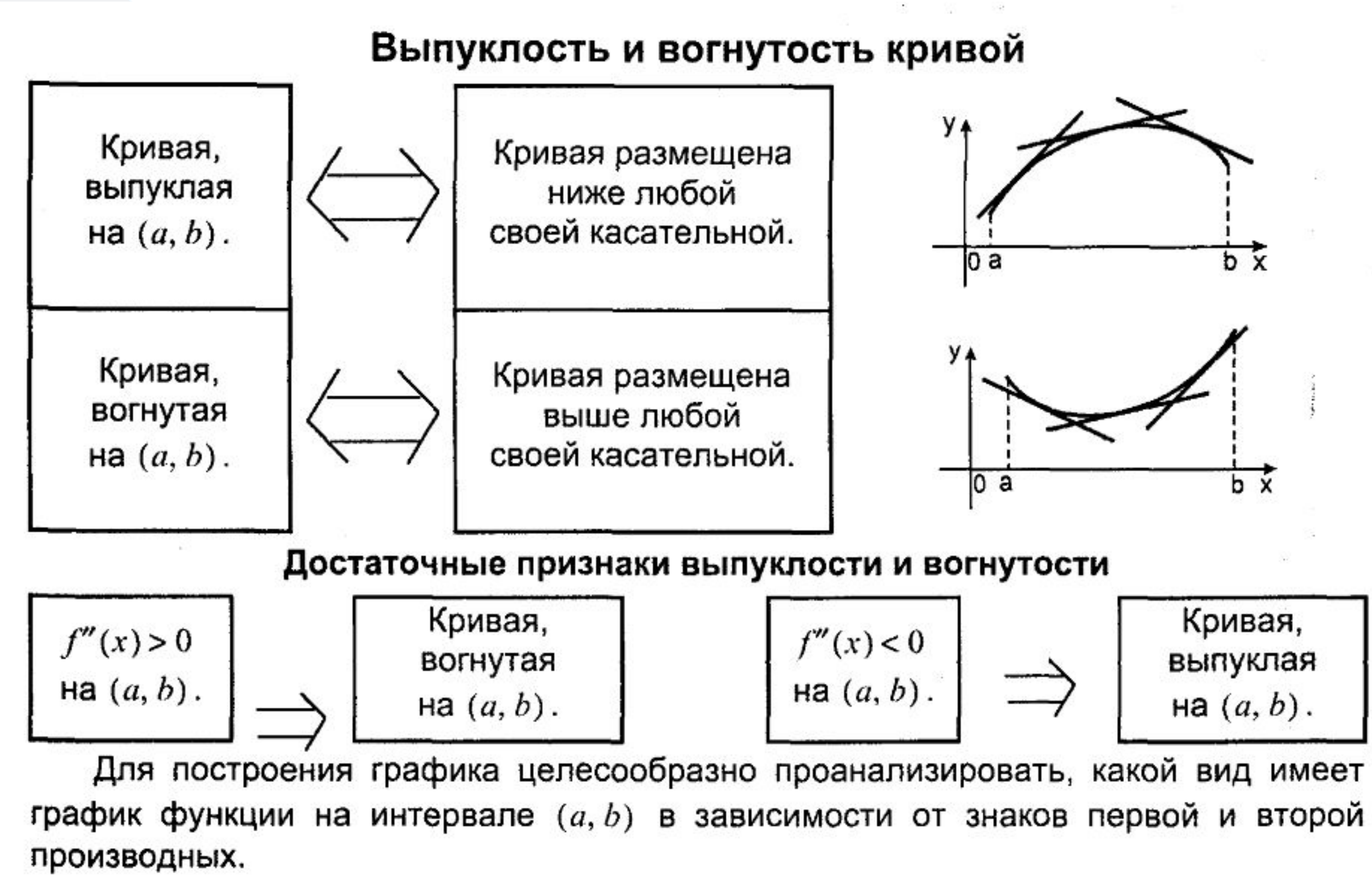
$f\,''(x_0) > 0$

$\Longrightarrow$

x_0 — точка минимума.



4. Анализ выпуклости функции



Выпуклость и вогнутость кривой

Кривая, выпуклая на (a, b). $\Leftrightarrow$ Кривая размещена ниже любой своей касательной.

Кривая, вогнутая на (a, b). $\Leftrightarrow$ Кривая размещена выше любой своей касательной.

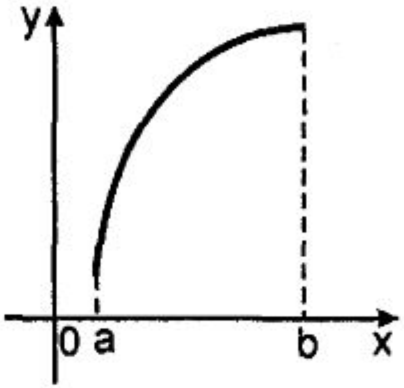
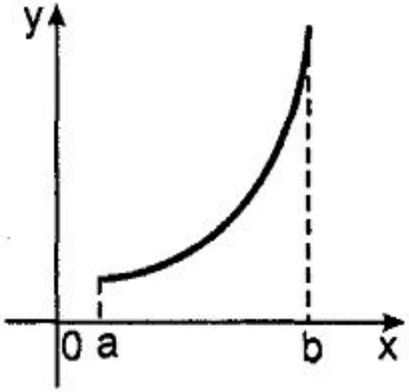
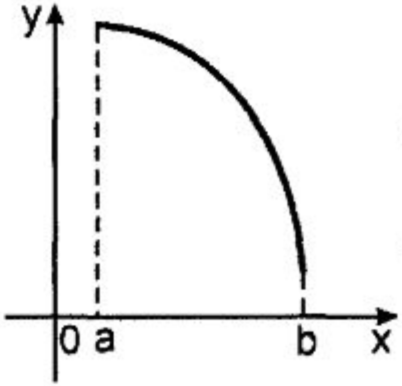
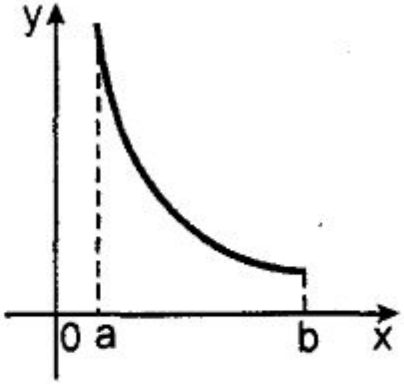
Достаточные признаки выпуклости и вогнутости

$f''(x) > 0$ на (a, b). $\Rightarrow$ Кривая, вогнутая на (a, b).

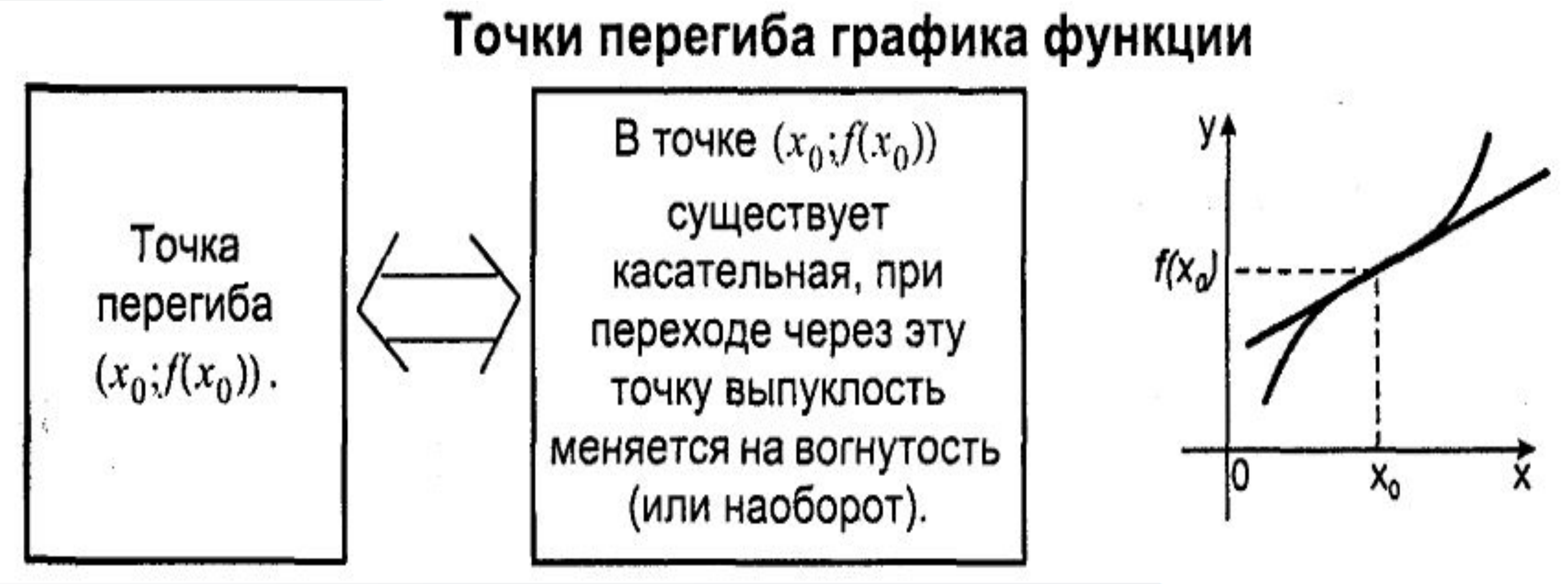
$f''(x) < 0$ на (a, b). $\Rightarrow$ Кривая, выпуклая на (a, b).

Для построения графика целесообразно проанализировать, какой вид имеет график функции на интервале (a, b) в зависимости от знаков первой и второй производных.

Результат удобно свести в таблицу:

$y' > 0$ $y'' < 0$	$y' > 0$ $y'' > 0$	$y' < 0$ $y'' < 0$	$y' < 0$ $y'' > 0$
			
возрастает, выпуклая.	возрастает, вогнутая.	убывает, выпуклая.	убывает, вогнутая.

5. Анализ точек перегиба функции



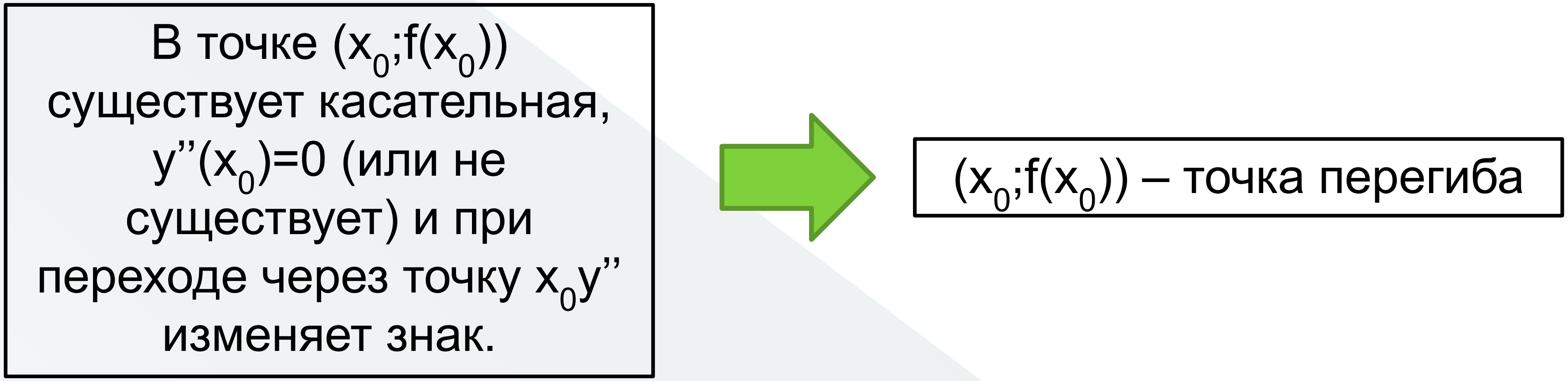
Точки перегиба графика функции

Точка перегиба $(x_0;f(x_0))$.

$\Leftrightarrow$

В точке $(x_0;f(x_0))$ существует касательная, при переходе через эту точку выпуклость меняется на вогнутость (или наоборот).

Достаточный признак точки перегиба.



В точке $(x_0;f(x_0))$ существует касательная, $y''(x_0)=0$ (или не существует) и при переходе через точку x_0 y'' изменяет знак.

$(x_0;f(x_0))$ – точка перегиба

Разные типы точек перегиба

$y'(x_0) = 0$	$y'(x_0) > 0$	$y'(x_0) < 0$	$y'(x_0) = \infty$