ГИПОТЕЗА РИМАНА

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

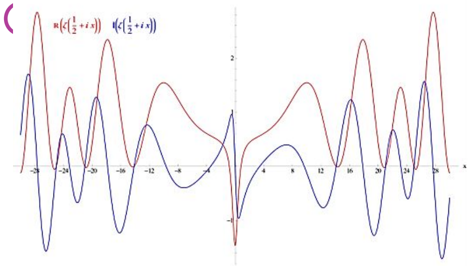
Гипотеза Римана о распределении нулей дзета-функции Римана была сформулирована Бернхардом Риманом в 1859 году.

В то время как не найдено какой-либо закономерности, описывающей распределение простых чисел среди натуральных, Риман обнаружил, что количество простых чисел, не превосходящих x, — функция распределения простых чисел, обозначаемая $\pi(x)$ — выражается через распределение так называемых «нетривиальных нулей» дзета-функции.

Многие утверждения о распределении простых чисел, в том числе о вычислительной сложности некоторых целочисленных алгоритмов, доказаны в предположении верности гипотезы Римана.

Гипотеза Римана входит в список семи «проблем тысячелетия», за решение каждой из которых Математический институт Клэя (Clay Mathematics Institute, Кембридж, Массачусетс) выплатит награду в один миллион долларов США. В случае публикации контрпримера к гипотезе Римана, учёный совет института Клэя вправе решить, можно ли считать данный контрпример окончательным решением проблемы, или же проблема может быть переформулирована в более узкой форме и оставлена открытой (в последнем случае автору контрпримера может быть выплачена небольшая часть награды).

ФОРМУЛИРОВКА



Действительная (красная) и мнимая (синяя) компоненты дзета-функции

Дзета-функция Римана $\varsigma(x)$ определена для всех комплексных $s \neq 1$ и имеет нули в отрицательных чётных $s = -2, -4, -6 \ldots$

из функционального уравнения $\varsigma(x) = 2^s \pi^s \sin\frac{\pi s}{2} \frac{1}{\sin \pi s \Gamma(s)} \varsigma(1-s)$ и явного выражения $\frac{1}{\varsigma(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} = \frac{\mu n}{n^s}$ при $\mathrm{Re}\, s > 1$, где $\mu(n)$ – функция Мёбиуса, следует, что все остальные нули, называемые «нетривиальными», расположены в полосе $0 \leq \mathrm{Re}\, s \leq 1$ симметрично относительно так называемой «критической линии» $\frac{1}{2} + it,\ t \in \mathbb{R}$.

Гипотеза Римана

Гипотеза Римана утверждает, что:

Все нетривиальные нули дзета-функции имеют действительную часть, равную $\frac{1}{2}$.

Обобщённая гипотеза Римана

Обобщённая гипотеза Римана (англ. Generalized Riemann hypothesis) состоит из того же самого утверждения для обобщений дзета-функций, называемых L-функциями Дирихле.

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ФОРМУЛИРОВКИ

В 1901 году Хельге фон Кох показал, что гипотеза Римана эквивалентна следующему утверждению о распределении простых чисел:

$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t} + O\left(\sqrt{x}\ln x\right)$ при $x \to \infty$.

Ещё несколько эквивалентных формулировок:

- Для всех $x \geq 2657$ выполняется неравенство $\left|\pi(x) - \int_2^x \frac{dt}{\ln t}\right| < \frac{1}{8\pi}\sqrt{x}\ln x$,
- Для всех $x \geq 73{,}2$ выполняется неравенство $|\psi(x) - x| < \frac{1}{8\pi}\sqrt{x}\ln^2(x)$, где $\psi(x)$ — вторая функция Чебышёва,
- Для всех $n > 5040$ выполняется неравенство $\sigma(n) < e^{\gamma} n \log\log \mathrm{n}$, где $\sigma(n)$— функция делителей числа n, а γ — постоянная Эйлера-Маскерони.
- Для всех $n > 1$ выполняется неравенство $\sigma(n) < H_n + e^{H_n}\ln H_n$, где H_n – n-е гармоническое число.
- Для любого положительного ε выполняется неравенство $M(n) = O\left(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$, где $M(n)$ — функция Мертенса. Более сильная гипотеза $|M(n)| < \sqrt{n}$ была опровергнута в 1985 году.
- Гипотеза Римана эквивалентна следующему равенству: $\int_0^\infty \frac{(1-12t^2)}{(1+4t^2)^3}\int_{\frac{1}{2}}^\infty \log|\zeta(\sigma+it)|d\sigma\, dt = \frac{\pi(3-\gamma)}{32}$.
- Показано, что гипотеза Римана истинна тогда и только тогда, когда интегральное уравнение $\int_0^\infty \frac{z^{-\sigma-1}\emptyset(z)dz}{e^{\frac{x}{z}}+1} = 0$
- не имеет нетривиальных решений $\emptyset$ для $\frac{1}{2} < \sigma < 1$.
- Если гипотеза Римана неверна, то существует алгоритм, который рано или поздно обнаружит её нарушение. Отсюда следует, что если отрицание гипотезы Римана недоказуемо в арифметике Пеано, то гипотеза Римана верна.

ИСТОРИЯ

В 1896 году Адамар и Валле-Пуссен независимо доказали, что нули дзета-функции не могут лежать на прямых $\mathrm{Re}\, s = 0$ и $\mathrm{Re}\, s = 1$.

В 1900 году Давид Гильберт включил гипотезу Римана в список 23 нерешённых проблем как часть восьмой проблемы, совместно с гипотезой Гольдбаха.

В 1914 году Харди доказал, что на критической линии находится бесконечно много нулей, а позже совместно с Литлвудом дал нижнюю оценку доли нулей, лежащей на критической линии, которую потом улучшали разные математики.

Некоторые нетривиальные нули располагаются экстремально близко друг к другу. Это свойство известно как «явление Лемера».

Титчмарш и Ворос в 1987 году показали, что дзета-функция может быть разложена в произведение через свои нетривиальные нули в разложение Адамара.

На 2004 год проверены более 1013 первых нулей.

Группа математиков Университета Пердью (США) под руководством Луи де Бранжа (Louis De Branges de Bourcia) предложила доказательство гипотезы Римана, которое, однако, оказалось неверным.

СООБРАЖЕНИЯ ОБ ИСТИННОСТИ ГИПОТЕЗЫ

В обзорных работах (Bombieri 2000, Conrey 2003, Sarnak 2008) отмечается, что данные в пользу истинности гипотезы Римана сильны, но оставляют место для обоснованных сомнений. Отдельные авторы, однако, убеждены в ложности гипотезы (в частности, так считал Джон Литлвуд).

Среди данных, позволяющих предполагать истинность гипотезы, можно выделить успешное доказательство сходных гипотез (в частности, гипотезы Римана о многообразиях над конечными полями). Это наиболее сильный теоретический довод, позволяющий предположить, что условие Римана выполняется для всех дзета-функций, связанных с автоморфными отображениями (англ.)русск., что включает классическую гипотезу Римана. Истинность аналогичной гипотезы уже доказана для дзета-функции Сельберга (англ.)русск., в некоторых отношениях сходной с функцией Римана, и для дзета-функции Госса (англ.)русск. (аналог дзета-функции Римана для функциональных полей).

С другой стороны, некоторые из дзета-функций Эпштейна (англ.)русск. не удовлетворяют условию Римана, хотя они имеют бесконечное число нулей на критической линии. Однако эти функции не выражаются через ряды Эйлера и не связаны напрямую с автоморфными отображениями.

К «практическим» доводам в пользу истинности Римановской гипотезы относится вычислительная проверка большого числа нетривиальных нулей дзета-функции в рамках проекта ZetaGrid.

ИНТЕРЕСНЫЕ ФАКТЫ

- Знаменит ответ Гильберта на вопрос о том, каковы будут его действия, если он по какой-либо причине проспит пятьсот лет и вдруг проснётся. Математик ответил, что первым делом он спросит, была ли доказана гипотеза Римана.
- Гипотеза Римана относится к знаменитым открытым проблемам математики, в число которых в своё время входила и теорема Ферма. Как известно, Ферма сделал запись о том, что доказал свою теорему, не оставив самого доказательства, и тем самым бросил вызов следующим поколениям математиков. Британский математик Г. Х. Харди использовал ситуацию с этими проблемами для обеспечения собственной безопасности во время морских путешествий. Каждый раз перед отправкой в путешествие он отправлял одному из своих коллег телеграмму: ДОКАЗАЛ ГИПОТЕЗУ РИМАНА ТЧК ПОДРОБНОСТИ ПО ВОЗВРАЩЕНИИ ТЧК. Харди считал, что бог не допустит повторения ситуации с теоремой Ферма и позволит ему благополучно вернуться из плавания.

ЛИТЕРАТУРА

- Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. — М.: Физматлит, 1994.
- Дербишир, Джон. Простая одержимость. Бернхард Риман и величайшая нерешенная проблема в математике. Астрель, 2010. 464 с. ISBN 978-5-271-25422-2.
- Николенко С. Проблемы 2000 года: гипотеза Римана // Компьютерра. — 2005. — Вып. 35.
- Bombieri, Enrico (2000), «The Riemann Hypothesis - official problem description», Clay Mathematics Institute. Проверено 25 октября 2008.
- Conrey, Brian (2003), "«The Riemann Hypothesis»", Notices of the American Mathematical Society: 341–353
- Sarnak, Peter (2008), "Problems of the Millennium: The Riemann Hypothesis", in Borwein, Peter; Choi, Stephen & Rooney, Brendan et al., «The Riemann Hypothesis», CMS Books in Mathematics, New York: Springer, сс. 107–115, ISBN 978-0387721255

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ