

Применение координатно-векторного метода в решении стереометрических задач

Творческая работа
ученика 11 «Г» класса
Аткина Кирилла
Руководитель – учитель
математики

Гришина Ирина Владимировна

Цели и задачи работы:

- Изучить формулы и приемы координатно-векторного метода;
- Провести классификацию стереометрических задач, к которым целесообразно применение координатно-векторного метода;
- Освоить применение координатно-векторного метода решения стереометрических задач.

Классификация задач

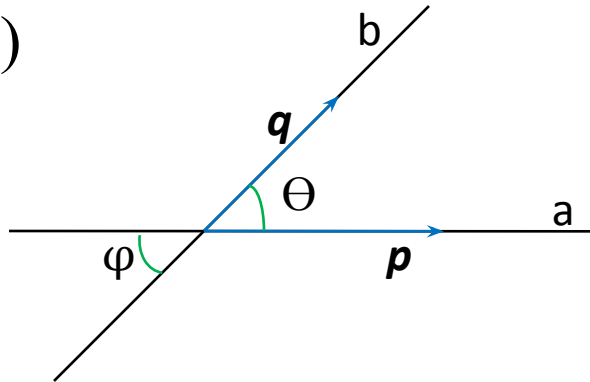
Координатно-векторный метод удобен при решении задач на нахождение

- углов между прямыми
- углов между прямой и плоскостью
- углов между плоскостями

- расстояния от точки до плоскости
- расстояния от точки до прямой
- расстояния между скрещивающимися прямыми

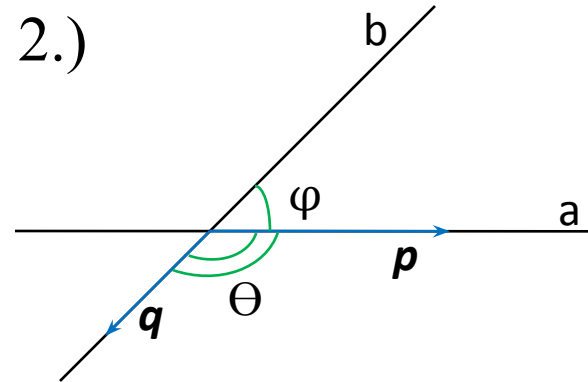
Угол между двумя прямыми.

1.)



$$0^{\circ} \leq \Theta \leq 90^{\circ}$$
$$\varphi = \Theta$$

2.)



$$90^{\circ} < \Theta \leq 180^{\circ}$$
$$\varphi = 180^{\circ} - \Theta$$

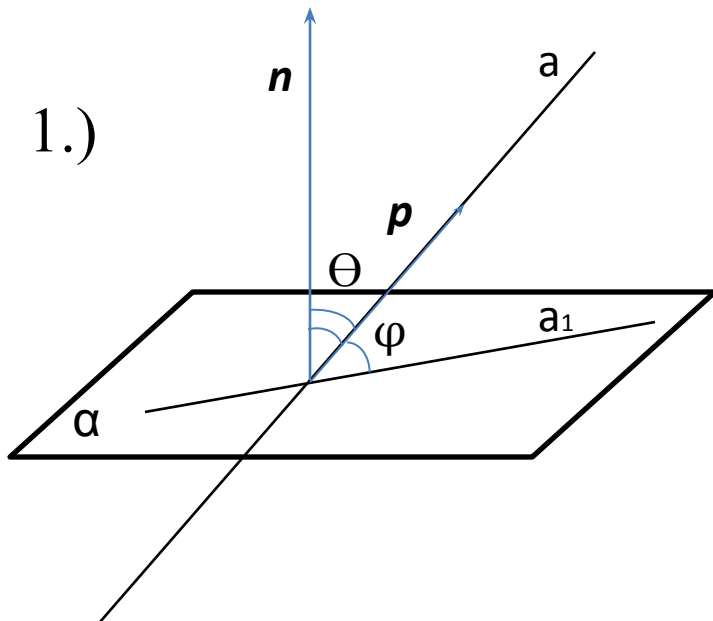
Косинус угла между двумя прямыми равняется модулю косинуса угла между направляющими векторами данных прямых.

$$\cos \varphi = | \cos \Theta |$$

$$\cos \Theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Угол между прямой и плоскостью.

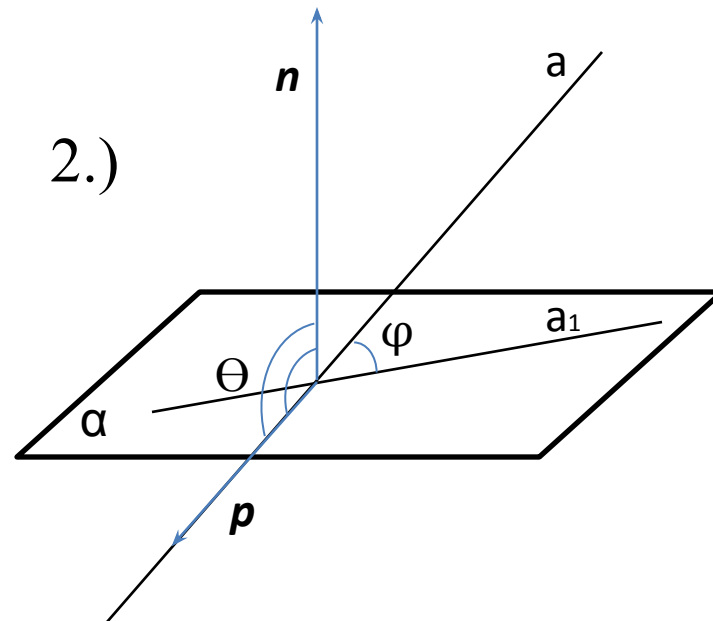
1.)



$$0^{\circ} \leq \Theta \leq 90^{\circ}$$

$$\varphi + \Theta = 90^{\circ}$$

2.)



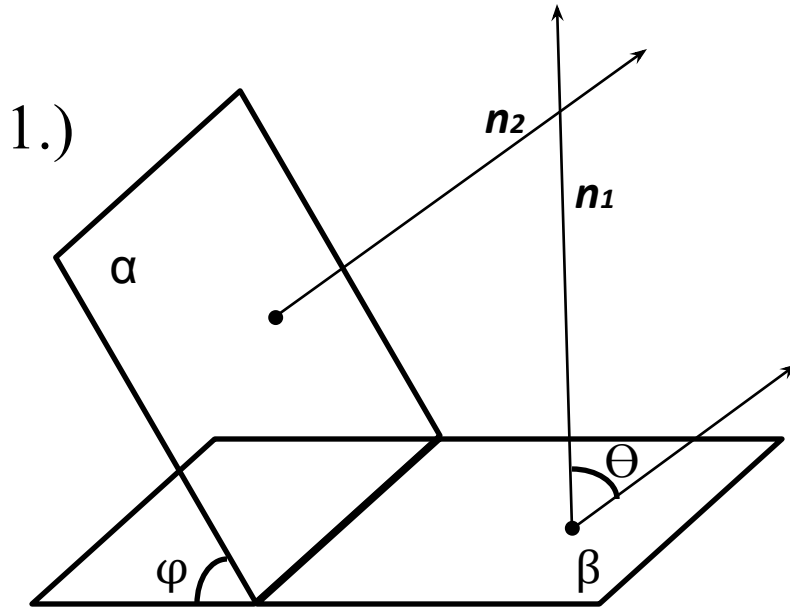
$$90^{\circ} < \Theta \leq 180^{\circ}$$

$$\Theta = 90^{\circ} + \varphi$$

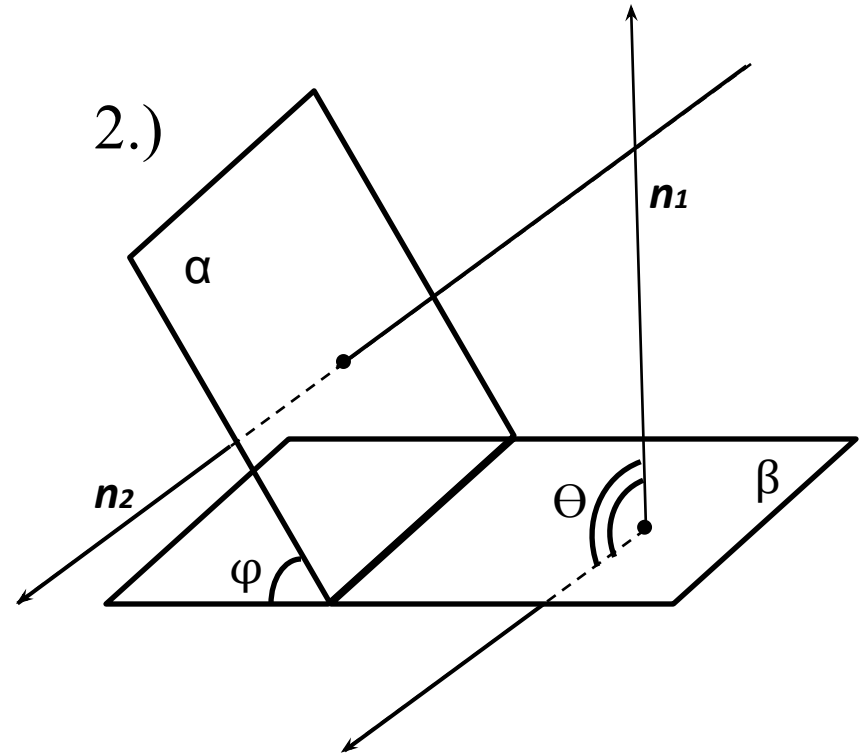
Синус угла между прямой и плоскостью равен модулю косинуса угла между направляющим вектором прямой и вектором нормали к данной плоскости

$$\sin \varphi = | \cos \Theta |$$

Угол между двумя плоскостями.



$$0^{\circ} \leq \theta \leq 90^{\circ}$$
$$\varphi = \theta$$

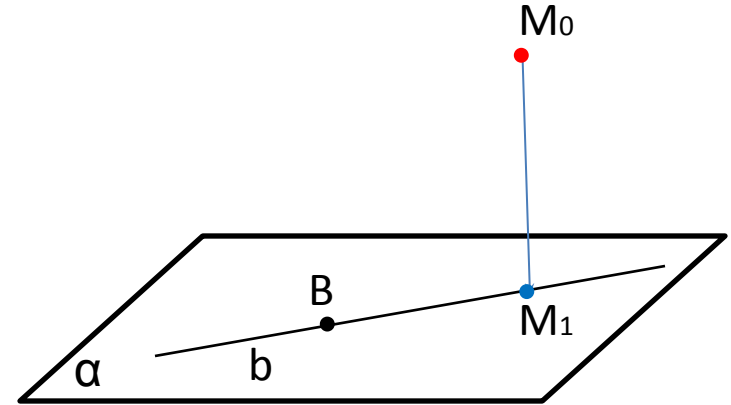


$$90^{\circ} < \theta \leq 180^{\circ}$$
$$\varphi = 180^{\circ} - \theta$$

Косинус угла между плоскостями равен модулю косинуса угла между векторами нормалей к данным плоскостям.

$$\cos \varphi = | \cos \theta |$$

Расстояние от точки до плоскости.



Дано:

α - плоскость, заданная уравнением

$$ax+by+cz+d=0$$

$$M_0(x_0; y_0; z_0)$$

Найти:

расстояние от M_0 до плоскости α

Решение.

Обозначим основание перпендикуляра, опущенного из точки M_0 на плоскость α точкой $M_1(x_1; y_1; z_1)$.

Поскольку точка M_1 лежит в плоскости α , то ее координаты удовлетворяют уравнению данной плоскости:

$$ax_1+by_1+cz_1+d=0 \quad (1)$$

Вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ (если не является нулевым), как и вектор $\mathbf{n}\{a,b,c\}$, перпендикулярен к плоскости α , поэтому $\overrightarrow{M_0M_1} \parallel \mathbf{n}$. Следовательно, существует такое число k , что $\overrightarrow{M_0M_1} = k\mathbf{n}$. Запишем это равенство в координатах:

$$x_1-x_0=ka, \quad y_1-y_0=kb, \quad z_1-z_0=kc \quad (2)$$

За $\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}$ же равно длине вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$, т.е. равно

$$l = \sqrt{(ka)^2 + (kb)^2 + (kc)^2}$$

$$l = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$l = |k| \quad (3)$$

Выразим теперь координаты точки M_1 из уравнений(2) : $x_1=x_0+ka$ $y_1=y_0+kb$ $z_1=z_0+kc$

и подставим в уравнение (1): $a(ka+x_0)+b(kb+y_0)+c(kc+z_0)+d=0$

(4)

$$ka^2+x_0a+kb^2+y_0b+kc^2+z_0c+d=0 \quad k = - \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$$

При подстановке уравнения(4) в уравнение(3) получаем: $\rho(M_0; \alpha) =$

Полученная формула является формулой расстояния от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$

Расстояние от точки до прямой.

Дано:

вектор $\mathbf{p} \{a, b, c\}$ - направляющий вектор прямой l

точка $A(x_1, y_1, z_1)$ принадлежит прямой l

точка $M(x_2, y_2, z_2)$ - произвольная точка пространства

Найти:

расстояние от точки M до прямой l

Решение.

Чтобы найти расстояние от точки M до прямой l , то есть длину перпендикуляра MH ($H \in l$), представим вектор MH в виде:

$$\mathbf{MH} = \mathbf{MA} + \mathbf{AH}.$$

Пусть вектор $\mathbf{MA} = \mathbf{m} \{x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2\}$, вектор $\mathbf{AH} = x\mathbf{p}$, где x - некоторое действительное число, так как он коллинеарен вектору \mathbf{p} . Значит,

$$\mathbf{MH} = \mathbf{m} + x\mathbf{p}.$$

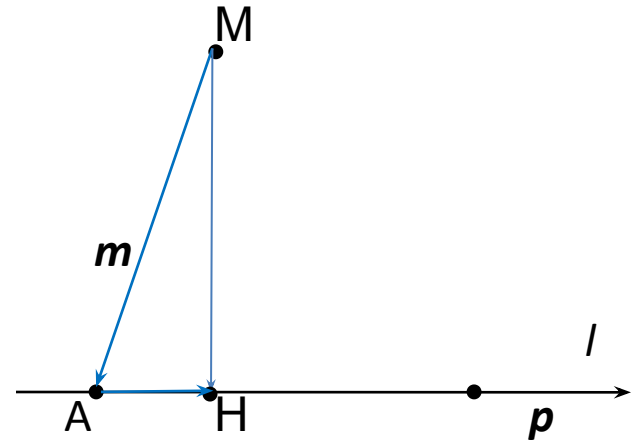
Неизвестный коэффициент x найдем из условия перпендикулярности векторов \mathbf{MH} и \mathbf{p} . Скалярное произведение этих векторов равно нулю:

$$\begin{aligned} (\mathbf{m} + x\mathbf{p})\mathbf{p} &= 0 \\ \mathbf{mp} + \frac{x\mathbf{pp}}{p^2} &= 0 \end{aligned}$$

$x =$

Искомое $\sqrt{(\mathbf{m} + x\mathbf{p})^2}$ значение MH выражается следующим образом:

$$|\mathbf{MH}| =$$



Расстояние между скрещивающимися прямыми.

Дано:

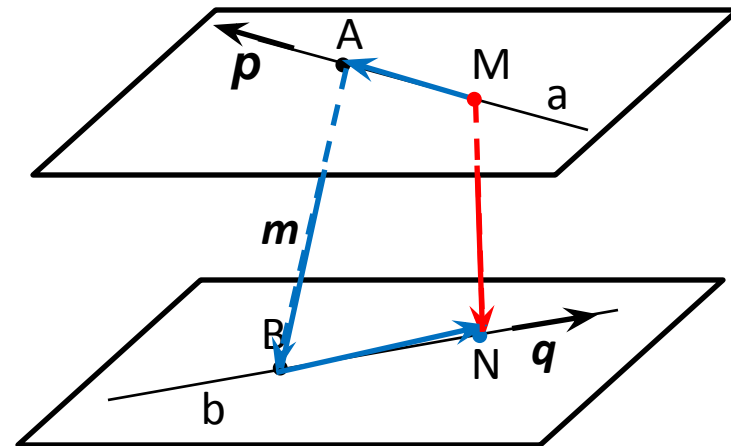
Скрещивающиеся прямые a и b

прямая a задана направляющим вектором \mathbf{p} и точкой $A(x_1, y_1, z_1)$

прямая b задана направляющим вектором \mathbf{q} и точкой $B(x_2, y_2, z_2)$

Найти:

расстояние между прямыми a и b



Решение.

Известно, что существует общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых, и притом только один. Пусть это будет отрезок MN , концы которого M и N лежат на прямых a и b

соответственно. Выразим вектор MN :

$MN = MA + AB + BN$.

$MN = MA + AB + BN$.

Так как векторы MA и BN коллинеарны векторам \mathbf{p} и \mathbf{q} соответственно, то их можно представить в виде:

$MA = x\mathbf{p}$, $BN = y\mathbf{q}$, где x и y – некоторые действительные числа

$AB = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\} = \mathbf{m}$.

Тогда $MN = \mathbf{m} + x\mathbf{p} + y\mathbf{q}$.

Неизвестные коэффициенты x и y найдем из условий перпендикулярности вектора MN векторам \mathbf{p} и \mathbf{q} :

$MN \cdot \mathbf{p} = 0$, $MN \cdot \mathbf{q} = 0$

В результате получается система линейных уравнений с двумя неизвестными x и y , решив

$$\begin{cases} (\mathbf{m} + x\mathbf{p} + y\mathbf{q}) \cdot \mathbf{q} = 0, \\ (\mathbf{m} + x\mathbf{p} + y\mathbf{q}) \cdot \mathbf{p} = 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + y\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{q}, \\ x\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + y\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{p}; \end{cases}$$

\Leftrightarrow

Искомое $\sqrt{(\mathbf{m} + x\mathbf{p} + y\mathbf{q})^2}$ MN выражается следующим образом:

Пример задачи о нахождении расстояния от точки до прямой.

Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ - единичный куб, где P и Q – середины соответственно ребер $A_1 B_1$ и BC .

Найти:

расстояние от точки D_1 до прямой PQ ,

Решение.

Рассмотрим прямоугольную

систему координат с началом в точке B , единичный отрезок равен ребру куба.

Отметим на PQ точку H такую, что отрезок $D_1 H$ – перпендикуляр к PQ .

Найдем координаты точек: $P(0.5;0;1)$ $Q(0;0.5;0)$

$$D_1(1;1;1) \quad B_1(0;0;1)$$

Тогда $D_1 P \{-0.5; -1; 0\}$

$$PQ \{-0.5; 0.5; -1\}$$

$$D_1 H = D_1 P + PH.$$

Но PH коллинеарен PQ , поэтому $PH = xPQ \Rightarrow PH \{-0.5x; 0.5x; -x\}$

$$D_1 H \{-0.5 - 0.5x; -1 + 0.5x; -x\}$$

$D_1 H \perp PQ$, поэтому $D_1 H \cdot PQ = 0$

$$0.25 + 0.25x - 0.5 + 0.25x + x = 0$$

$$3/2 x - 0.25 = 0$$

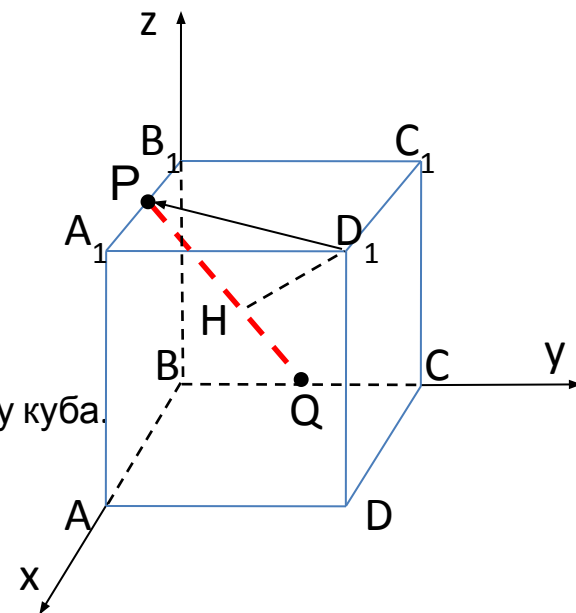
$$x = 1/6.$$

Вычисляем координаты вектора $D_1 H$, а затем его длину.

$$D_1 H \{-7/12; -11/12; -1/6\}$$

$$D_1 H = \sqrt{\frac{49}{144} + \frac{121}{144} + \frac{4}{144}} = \frac{\sqrt{174}}{12}$$

Ответ: расстояние от точки D_1 до прямой PQ равно $\frac{\sqrt{174}}{12}$.



Пример задачи о нахождении расстояния между скрещивающимися прямыми.

Дано:

$DABC$ – правильный тетраэдр с ребром 1

M – середина BC

N – середина AB

Найти:

расстояние между скрещивающимися прямыми CN и DM

Решение.

Пусть PQ – общий перпендикуляр прямых DM и CN

$PQ = PD + DA + AN + NQ$ (*)

Введем систему прямоугольную координат так, как показано на рисунке и определим координаты точек.

$A(0;0;0)$

$C(0;1;0)$

$B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0,5; 0\right)$

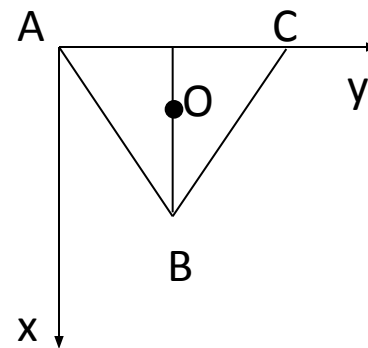
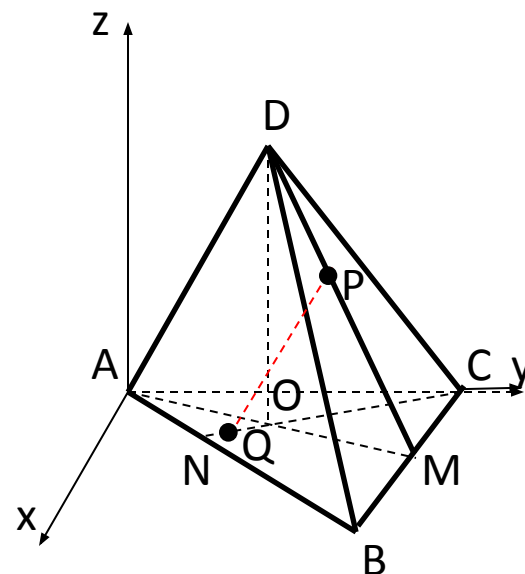
$O\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0,5; 0\right)$

$D\left(\frac{\sqrt{3}}{6}; 0,5; \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

$N\left(\frac{\sqrt{3}}{4}; 0,25; 0\right)$

$M\left(\frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{3}{4}; 0\right)$

$$DO^2 = AD^2 - AO^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}$$



Поскольку $NQ \parallel NC$ справедливо равенство $NQ = \alpha NC$,

где α - некоторое действительное число. $N = \left(\frac{\sqrt{3}}{12}; \frac{3}{4}; 0 \right)$,

следовательно $NQ = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}; \frac{3}{4}; \alpha; 0 \right)$

$$NQ = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{4}\alpha; \frac{3}{4}\alpha; 0 \right\}$$

$$PD = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{12}\beta; -0,25\beta; \frac{\sqrt{6}}{3}\beta \right\}$$

$$PQ = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{4}\alpha - \frac{\sqrt{3}}{12}\beta + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{3}{4}\alpha - 0,25\beta + 0,25 - 0,5; \frac{\sqrt{6}}{3}\beta - \frac{\sqrt{6}}{3} \right\}$$

$$PQ = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{4}\alpha - \frac{\sqrt{3}}{12}\beta + \frac{\sqrt{3}}{12}; \frac{3}{4}\alpha - 0,25\beta - 0,25; \frac{\sqrt{6}}{3}\beta - \frac{\sqrt{6}}{3} \right\}$$

$$PQ \perp CN \Rightarrow PQ \cdot CN = 0; PQ \cdot NC = 0$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{4} \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\alpha - \frac{\sqrt{3}}{12}\beta + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) - 0,25 \left(\frac{3}{4}\alpha - 0,25\beta - 0,25 \right) + 0 \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\beta - \frac{\sqrt{6}}{3} \right) = 0$$

$$\frac{3}{16}\alpha + \frac{3}{48}\beta - \frac{3}{48} + \frac{9}{16}\alpha - \frac{3}{16}\beta - \frac{3}{16} = 0$$

$$\frac{3}{4}\alpha + \frac{1}{8}\beta - \frac{1}{4} = 0 \quad | \cdot 8;$$

$$6\alpha - \beta - 2 = 0$$

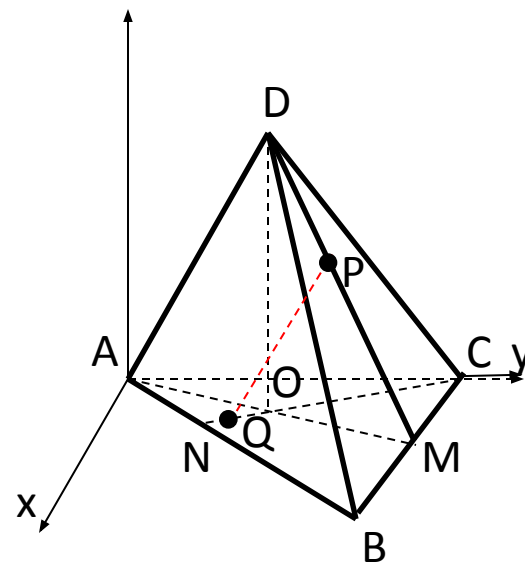
$$PQ \perp MD \Rightarrow PQ \cdot MD = 0$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{12} \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\alpha - \frac{\sqrt{3}}{12}\beta + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) - 0,25 \left(\frac{3}{4}\alpha - 0,25\beta - 0,25 \right) + \frac{\sqrt{6}}{3} \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\beta - \frac{\sqrt{6}}{3} \right) = 0$$

$$\frac{2}{48}\alpha + \frac{3}{144}\beta - \frac{3}{144} - \frac{3}{16}\alpha + \frac{1}{16}\beta + \frac{1}{16} + \frac{6}{9}\beta - \frac{6}{9} = 0$$

$$-\frac{1}{8}\alpha + \frac{3}{4}\beta - \frac{5}{8} = 0 \quad | \cdot (-8);$$

$$\alpha - 6\beta + 5 = 0$$



$$\begin{cases} 6\alpha - \beta - 2 = 0 \mid \cdot (-6), \\ \alpha - 6\beta + 5 = 0 \mid \cdot (-6); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 35\alpha = 17, \\ \beta = 6\alpha - 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{17}{35}, \\ \beta = 6 \cdot \frac{17}{35} - 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{17}{35}, \\ \beta = \frac{102-70}{35}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{17}{35}, \\ \beta = \frac{32}{35}; \end{cases}$$

$$PQ: x = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(-\frac{17}{35} - \frac{32}{3 \cdot 35} + \frac{1}{3} \right) = -\frac{4\sqrt{3}}{35}$$

$$y = 0,25 \left(\frac{51}{35} - \frac{32}{35} - 1 \right) = -\frac{4}{35}$$

$$z = \frac{\sqrt{6}}{3} \left(\frac{32}{35} - 1 \right) = -\frac{\sqrt{6}}{35}$$

$$PQ^2 = \frac{48+16+6}{35^2} = \frac{70}{35 \cdot 35} = \frac{2}{35}$$

$$PQ = \sqrt{\frac{2}{35}}$$

Ответ: расстояние между скрещивающимися прямыми CN и DM равно $\sqrt{\frac{2}{35}}$

Заключение

В работе проведена

- систематизация стереометрических задач, к решению которых возможно применение координатно-векторного метода;
- для каждой из рассмотренных задач приведено общее решение, выведена формула или показан общий подход к поиску решения;
- применение формул или общих подходов иллюстрируется с помощью примеров задач.

Координатно-векторный метод позволяет избежать сложных логических рассуждений и геометрических построений, что упрощает решение определенного класса задач на нахождение углов и расстояний в пространстве.