Применение координатно-векторного метода в решении стереометрических задач

Творческая работа
ученика 11 «Г» класса
Аткина Кирилла
Руководитель – учитель
математики
Гришина Ирина Владимировна

Цели и задачи работы:

-Изучить формулы и приемы координатно-векторного метода;

- Провести классификацию стереометрических задач, к которым целесообразно применение координатно-векторного метода;

-Освоить применение координатно-векторного метода решения стереометрических задач.

Классификация задач

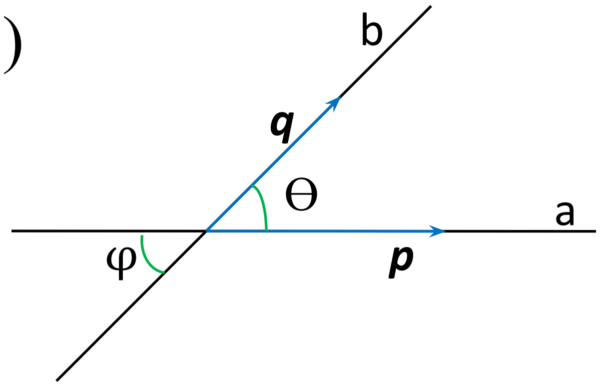
Координатно-векторный метод удобен при решении задач на нахождение

- углов между прямыми
- углов между прямой и плоскостью
- углов между плоскостями

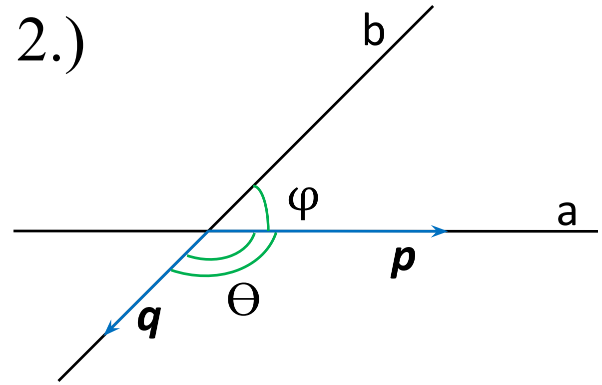
- расстояния от точки до плоскости
- расстояния от точки до прямой
- расстояния между скрещивающимися прямыми

Угол между двумя прямыми.

1.)



2.)



$0^0 \le \Theta \le 90^0$

$\varphi = \Theta$

$90^0 < \Theta \le 180^0$

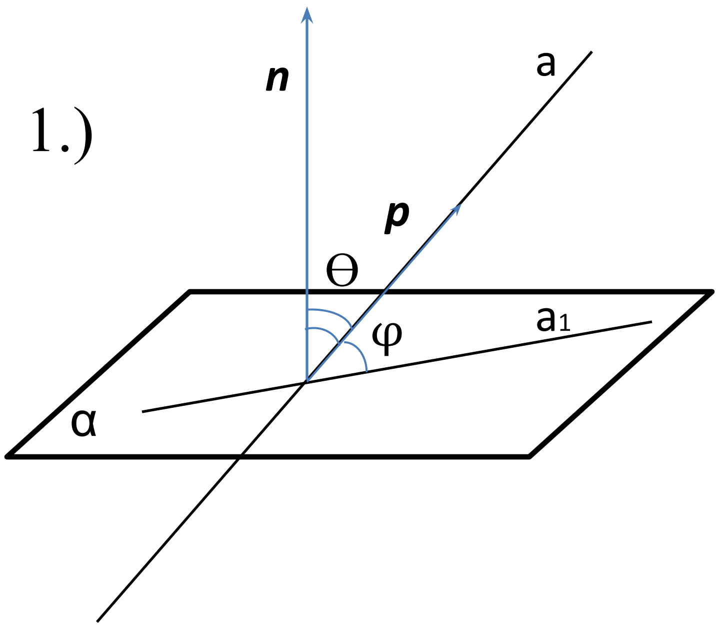
$\varphi = 180^0 - \Theta$

Косинус угла между двумя прямыми равняется модулю косинуса угла между направляющими векторами данных прямых.

$\cos\varphi = |\cos\theta|$

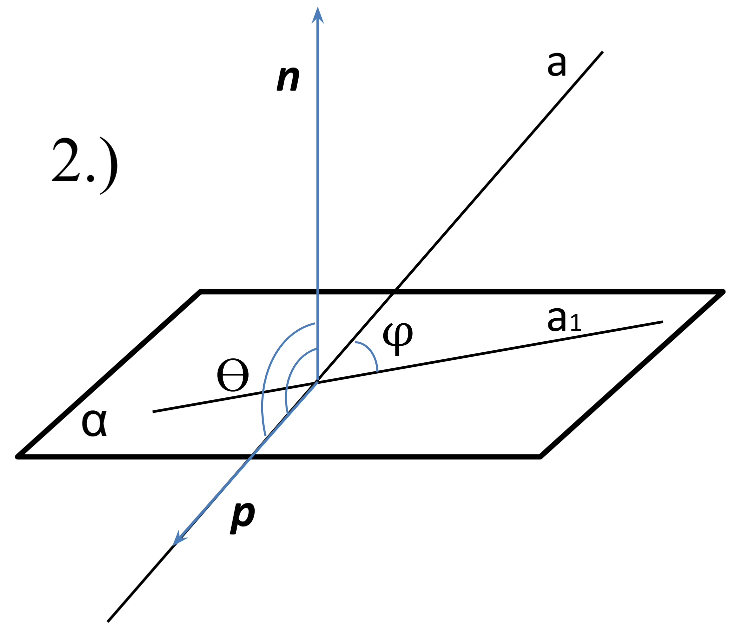
$$\cos\theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Угол между прямой и плоскостью.



$0^0 \le \Theta \le 90^0$

$\varphi + \Theta = 90^0$



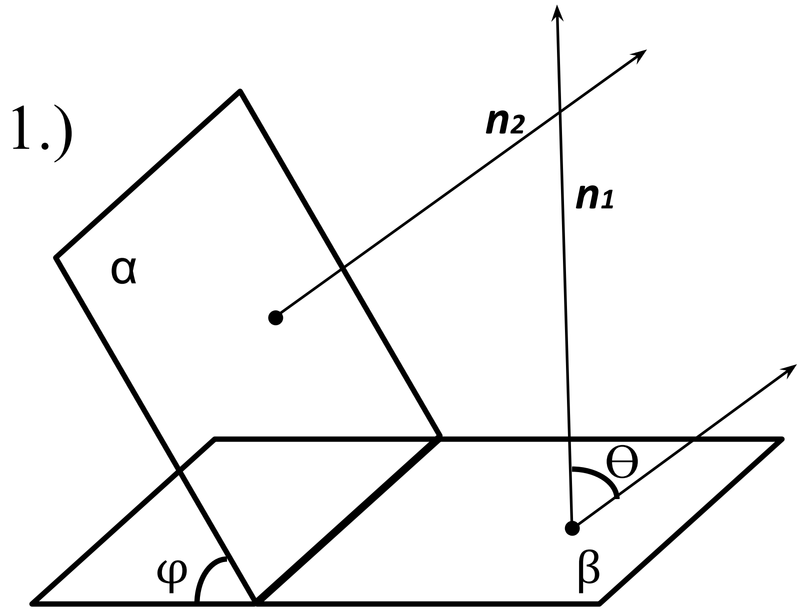
$90^0 < \Theta \le 180^0$

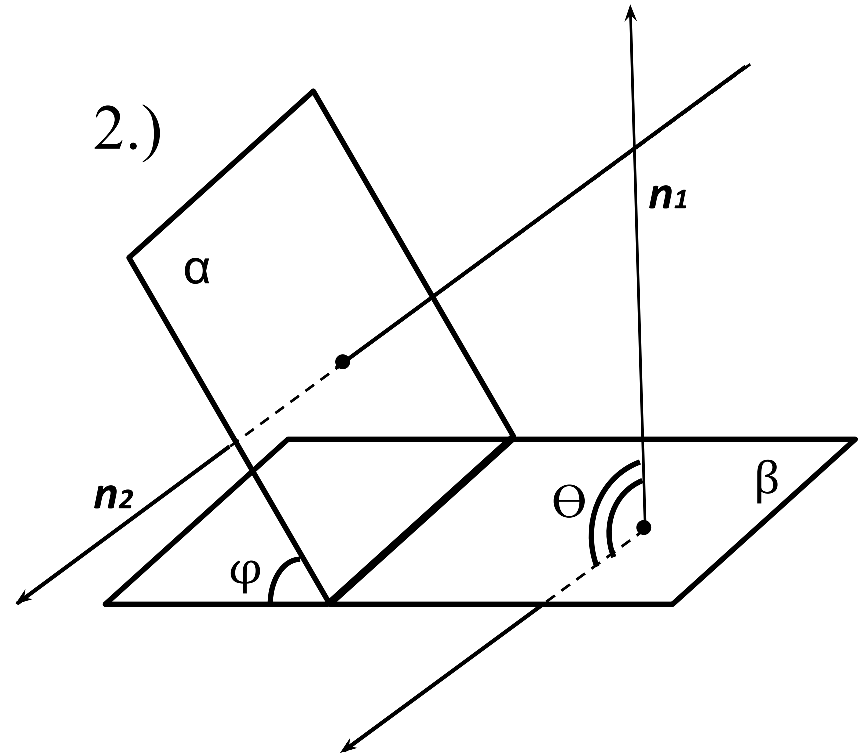
$\Theta = 90^0 + \varphi$

Синус угла между прямой и плоскостью равен модулю косинуса угла между направляющим вектором прямой и вектором нормали к данной плоскости

$\sin\varphi = |\cos\Theta|$

Угол между двумя плоскостями.





$0^0 \le \Theta \le 90^0$

$\varphi = \Theta$

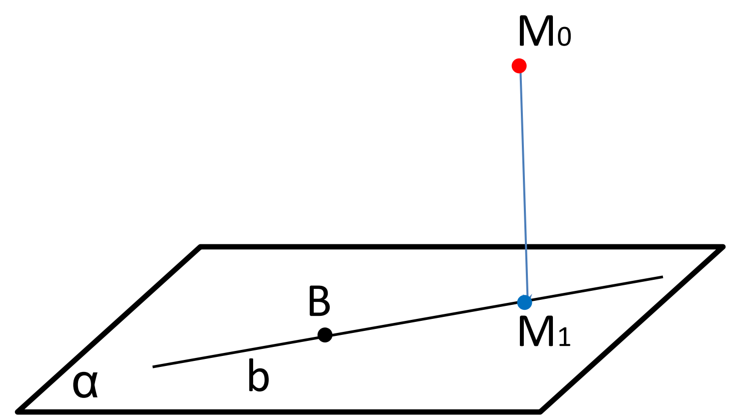
$90^0 < \Theta \le 180^0$

$\varphi = 180^0 - \Theta$

Косинус угла между плоскостями равен модулю косинуса угла между векторами нормалей к данным плоскостям.

$\cos\varphi = |\cos\Theta|$

Расстояние от точки до плоскости.



Дано:
α - плоскость, заданная уравнением
ax+by+cz+d=0
$M_0(x_0;y_0;z_0)$

Найти:
расстояние от M_0 до плоскости α

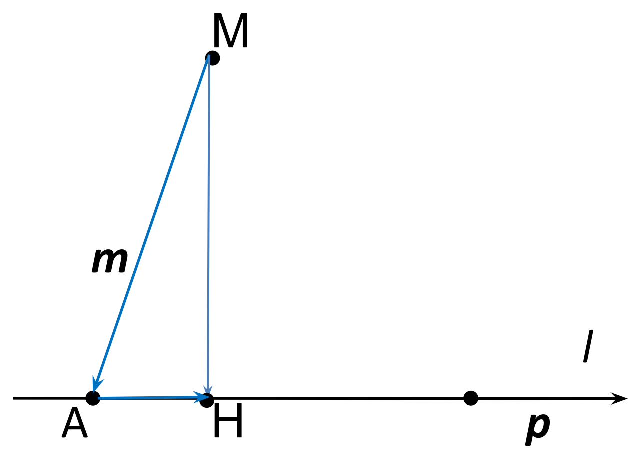
Решение.
Обозначим основание перпендикуляра, опущенного из точки M_0 на плоскость α точкой M_1 $(x_1;y_1;z_1)$.
Поскольку точка M_1 лежит в плоскости α, то ее координаты удовлетворяют уравнению данной плоскости:
$ax_1+by_1+cz_1+d=0$ (1)
Вектор $\boldsymbol{M_0M_1}$ (если не является нулевым), как и вектор $\boldsymbol{n}$\{a,b,c\}, перпендикулярен к плоскости α, поэтому $\boldsymbol{M_0M_1} \parallel \boldsymbol{n}$. Следовательно, существует такое число k, что $\boldsymbol{M_0M_1}$= kn. Запишем это равенство в координатах:
$x_1-x_0=ka$, $y_1-y_0=kb$, $z_1-z_0=kc$ (2)
За… ие равно длине вектора $\boldsymbol{M_0M_1}$, т.е. равно
l = $\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}$
l = $\sqrt{(ka)^2+(kb)^2+(kc)^2}$
l = |k| $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ (3)

Выразим теперь координаты точки M_1 из уравнений(2) : $x_1=x_0+ka$ $y_1=y_0+kb$ $z_1=z_0+kc$
и подставим в уравнение (1):$a(ka+x_0)+b(kb+y_0)+c(kc+z_0)+d=0$ $ka^2+x_0a+kb^2+y_0b+kc^2+z_0c+d=0$ k= $-\dfrac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}$
(4)

При подстановке уравнения(4) в уравнение(3) получаем: $\rho(M_0;\alpha) = \boxed{\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$

Полученная формула является формулой расстояния от точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$

Расстояние от точки до прямой.



Дано:
вектор ***p*** {a,b,c} - направляющий вектор прямой *l*
точка A(x_1,y_1,z_1) принадлежит прямой *l*
точка M(x_2,y_2,z_2) – произвольная точка пространства

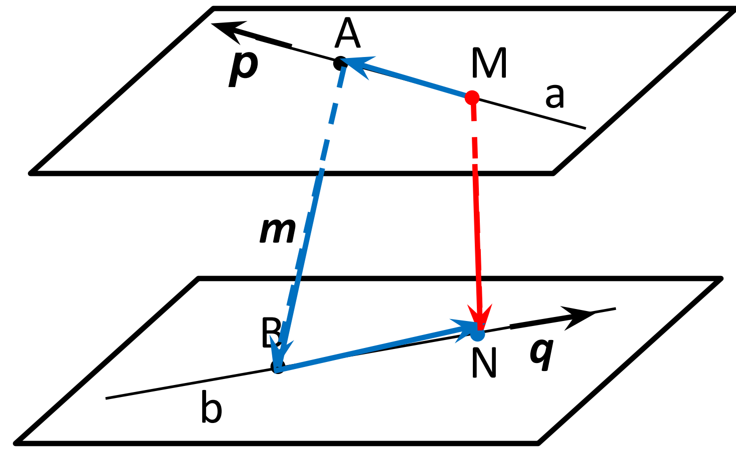
Найти:
расстояние от точки M до прямой *l*
Решение.
Чтобы найти расстояние от точки M до прямой *l*, то есть длину перпендикуляра ***MH*** (H∈*l*), представим вектор ***MH*** в виде:
MH= ***MA***+***AH.***
Пусть вектор ***MA***=***m*** {x_1-x_2, y_1-y_2,z_1-z_2}, вектор ***AH***=x***p***, где x – некоторое действительное число, так как он коллинеарен вектору ***p***. Значит,
MH=***m*** + x***p.***
Неизвестный коэффициент x найдем из условия перпендикулярности векторов ***MH*** и ***p***. Скалярное произведение этих векторов равно нулю:
(***m***+ x***p***)***p***=0
mp$\frac{-\boldsymbol{mp}}{\boldsymbol{p}^2}$=0

x=

Искомо$\sqrt{(\boldsymbol{m}+x\boldsymbol{p})^2}$ние MH выражается следующим образом:

|***MH***|=

Расстояние между скрещивающимися прямыми.



Дано:
Скрещивающиеся прямые a и b
прямая a задана направляющим вектором ***p*** и точкой $A(x_1,y_1,z_1)$
прямая b задана направляющим вектором ***q*** и точкой $B(x_2,y_2,z_2)$

Найти:
расстояние между прямыми a и b

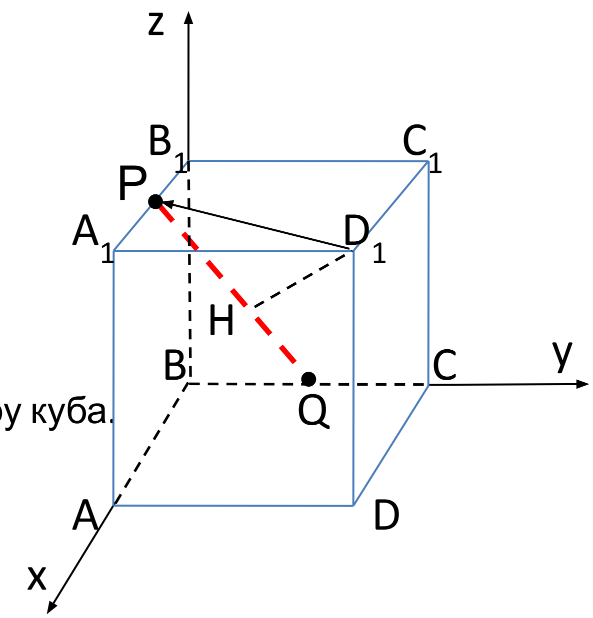
Решение.
Известно, что существует общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых, и притом только один. Пусть это будет отрезок MN, концы которого M и N лежат на прямых a и b соответственно. Выразим вектор ***MN***:
MN= ***MA+AB+BN***.
Так как векторы ***MA*** и ***BN*** коллинеарны векторам ***p*** и ***q*** соответственно, то их можно представить в виде:
MA=x***p***, ***BN***=y***q***, где x и y – некоторые действительные числа
AB$\{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\}$ = ***m***.
Тогда ***MN***= ***m*** + x***p*** + y***q***.
Неизвестные коэффициенты x и y найдем из условий перпендикулярности вектора ***MN*** векторам ***p*** и ***q***:
MN·p=0, ***MN·q***=0
В результате получается система линейных уравнений с двумя неизвестными x и y, решив к... y.

$$\begin{cases}(m + xp + yq)q = 0,\\ (m + xp + yq)p = 0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}xpq + yq^2 = -mq,\\ xp^2 + ypq = -mp;\end{cases}$$

Искомое ... MN выражается следующим образом: $\sqrt{(m + xp + yq)^2}$

Пример задачи о нахождении расстояния от точки до прямой.

Дано:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ - единичный куб, где P и Q – середины соответственно ребер A_1B_1 и BC.
Найти:
расстояние от точки D_1 до прямой PQ,

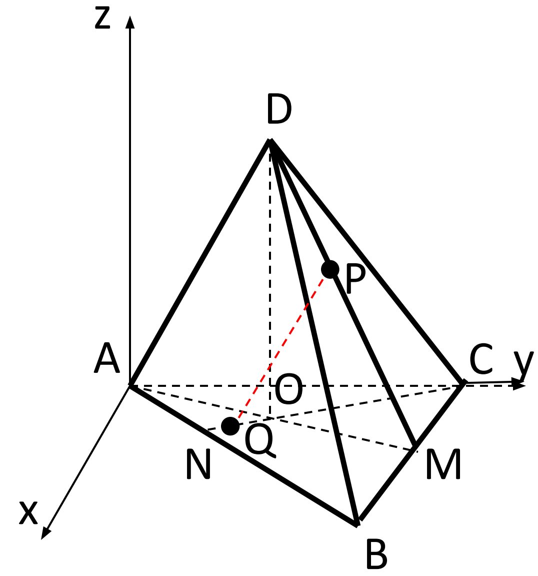


Решение.
Рассмотрим прямоугольную систему координат с началом в точке B, единичный отрезок равен ребру куба.
Отметим на PQ точку H такую, что отрезок D_1H –перпендикуляр к PQ
Найдем координаты точек: P(0.5;0;1) Q(0;0.5;0)
D_1(1;1;1) B_1(0;0;1)
Тогда $\boldsymbol{D_1P}\{-0,5;-1;0\}$
$\boldsymbol{PQ}\{-0,5;0,5;-1\}$
$\boldsymbol{D_1H} = \boldsymbol{D_1P} + \boldsymbol{PH}.$
Но ***PH*** коллинеарен ***PQ***, поэтому ***PH***=x***PQ*** => ***PH***{-0.5x;0.5x;-x}
$\boldsymbol{D_1H}\{-0.5-0.5x;-1+0.5x;-x\}$
$\boldsymbol{D_1H} \perp \boldsymbol{PQ}$, поэтому $\boldsymbol{D_1H} \cdot \boldsymbol{PQ}=0$
0.25+0.25 x-0.5+0.25 x+ x=0
3/2 x -0.25=0
x=1/6.
Вычисляем координаты вектора $\boldsymbol{D_1H}$, а затем его длину.
$\boldsymbol{D_1H}\{-7/12;-11/12;-1/6\}$

$$\boldsymbol{D_1H} = \sqrt{\frac{49}{144}+\frac{121}{144}+\frac{4}{144}} = \frac{\sqrt{174}}{12}$$

Ответ: расстояние от точки D_1 до прямой PQ рав $\frac{\sqrt{174}}{12}$.

Пример задачи о нахождении расстояния между скрещивающимися прямыми.



Дано:
DABC – правильный тетраэдр с ребром 1
M – середина BC
N – середина AB
Найти:
расстояние между скрещивающимися прямыми CN и DM

Решение.

Пусть PQ – общий перпендикуляр прямых DM и CN
PQ=PD+DA+AN+NQ $(_*)$
Введем систему прямоугольную координат так, как показано на рисунке и определим координаты точек.

A (0;0;0)

C (0;1;0)

B $(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0{,}5; 0)$

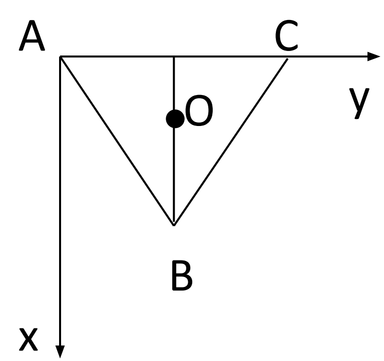
O $(\frac{\sqrt{3}}{\text{[illegible]}}; 0{,}5; 0)$

D $(\frac{\sqrt{3}}{6}; 0{,}5; \sqrt{\frac{2}{3}})$

N $(\frac{\sqrt{3}}{4}; 0{,}25; 0)$

M $(\frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{3}{4}; 0)$

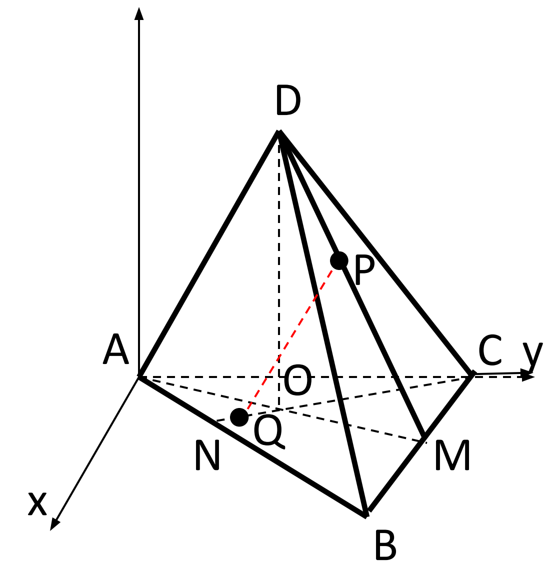
$DO^2=AD^2-AO^2 = 1-(\frac{\sqrt{3}}{3})^2 = \frac{2}{3}$



Поскольку ***NQ***‖***NC*** справедливо равенство ***NQ***=α***NC***,

где α - некоторое действительное число. ***N***$-\frac{\sqrt{3}}{12}$ $\frac{3}{4}$; ;0},

следовательно ***NQ***$-\frac{\sqrt{3}}{4}$ с$\frac{3}{4}$ α;0}



$$NQ\{-\frac{\sqrt{3}}{4}\alpha;\frac{3}{4}\alpha;0\}$$

$$PD\{-\frac{\sqrt{3}}{12}\beta;-0{,}25\beta;\frac{\sqrt{6}}{3}\beta\}$$

$$PQ\{-\frac{\sqrt{3}}{4}\alpha-\frac{\sqrt{3}}{12}\beta+\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{6};\ \frac{3}{4}\alpha\text{-}0{,}25\beta+0{,}25-0{,}5;\ \frac{\sqrt{6}}{3}\beta-\frac{\sqrt{6}}{3}\}$$

$$PQ\{-\frac{\sqrt{3}}{4}\alpha-\frac{\sqrt{3}}{12}\beta+\frac{\sqrt{3}}{12};\ \frac{3}{4}\alpha\text{-}0{,}25\beta-0{,}25;\ \frac{\sqrt{6}}{3}\beta-\frac{\sqrt{6}}{3}\}$$

$$PQ\perp CN \Rightarrow PQ\cdot CN=0;\ PQ\cdot NC=0$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{4}\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\alpha-\frac{\sqrt{3}}{12}\beta+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)-0{,}25\left(\frac{3}{4}\alpha\text{-}0{,}25\beta-0{,}25\right)+0\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\beta-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=0$$

$$\frac{3}{16}\alpha+\frac{3}{48}\beta-\frac{3}{48}+\frac{9}{16}\alpha-\frac{3}{16}\beta-\frac{3}{16}=0$$

$$\frac{3}{4}\alpha+\frac{1}{8}\beta-\frac{1}{4}=0\ |\cdot 8;$$

$$\boxed{6\alpha\text{-}\beta\text{-}2=0}$$

$$PQ\perp MD \Rightarrow PQ\cdot MD=0$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{12}\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\alpha-\frac{\sqrt{3}}{12}\beta+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)-0{,}25\left(\frac{3}{4}\alpha\text{-}0{,}25\beta-0{,}25\right)+\frac{\sqrt{6}}{3}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\beta-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=0$$

$$\frac{2}{48}\alpha+\frac{3}{144}\beta-\frac{3}{144}-\frac{3}{16}\alpha+\frac{1}{16}\beta+\frac{1}{16}+\frac{6}{9}\beta-\frac{6}{9}=0$$

$$-\frac{1}{8}\alpha+\frac{3}{4}\beta-\frac{5}{8}=0\ |:(-8);$$

$$\boxed{\alpha\text{-}6\beta\text{+}5=0}$$

$$\begin{cases} 6\alpha - \beta - 2 = 0 \mid \cdot(-6), \\ \alpha - 6\beta + 5 = 0 \mid \cdot(-6); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 35\alpha = 17, \\ \beta = 6\alpha - 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{17}{35}, \\ \beta = 6 \cdot \frac{17}{35} - 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{17}{35}, \\ \beta = \frac{102-70}{35}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{17}{35}, \\ \beta = \frac{32}{35}; \end{cases}$$

PQ: $x=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(-\frac{17}{35}-\frac{32}{3\cdot 35}+\frac{1}{3}\right)= -\frac{4\sqrt{3}}{35}$

$y=0{,}25(\frac{51}{35}-\frac{32}{35}-1) = -\frac{4}{35}$

$z=\frac{\sqrt{6}}{3}\left(\frac{32}{35}-1\right) = -\frac{\sqrt{6}}{35}$

$PQ^2=\frac{48+16+6}{35^2}=\frac{70}{35\cdot 35}=\frac{2}{35}$

$PQ=\sqrt{\frac{2}{35}}$

Ответ: расстояние между скрещивающимися прямыми CN и DM равно $\sqrt{\frac{2}{35}}$

Заключение

В работе проведена
- систематизация стереометрических задач, к решению которых возможно применение координатно-векторного метода;
- для каждой из рассмотренных задач приведено общее решение, выведена формула или показан общий подход к поиску решения;
-применение формул или общих подходов иллюстрируется с помощью примеров задач.

Координатно-векторный метод позволяет избежать сложных логических рассуждении и геометрических построений, что упрощает решение определенного класса задач на нахождение углов и расстояний в пространстве.