Отыскание наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке.

Автор: учитель математики гимназии №87 Медведева И.А.

Понятие непрерывной функции

Наибольшее и наименьшее значения

Алгоритм

Стационарные и критические точки

Пример 1

Определение непрерывной функции:

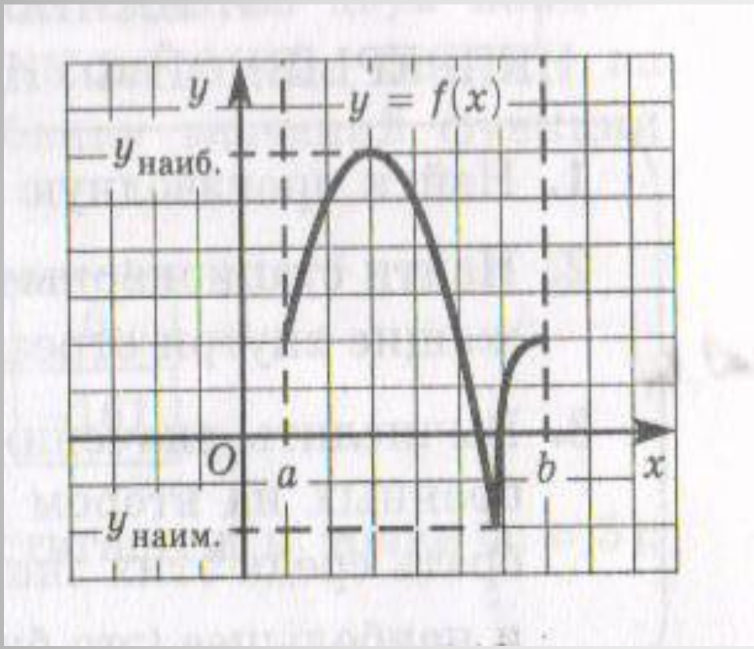
- Функцию y=f(x) называют непрерывной в точке x=a , если выполняется соотношение : $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

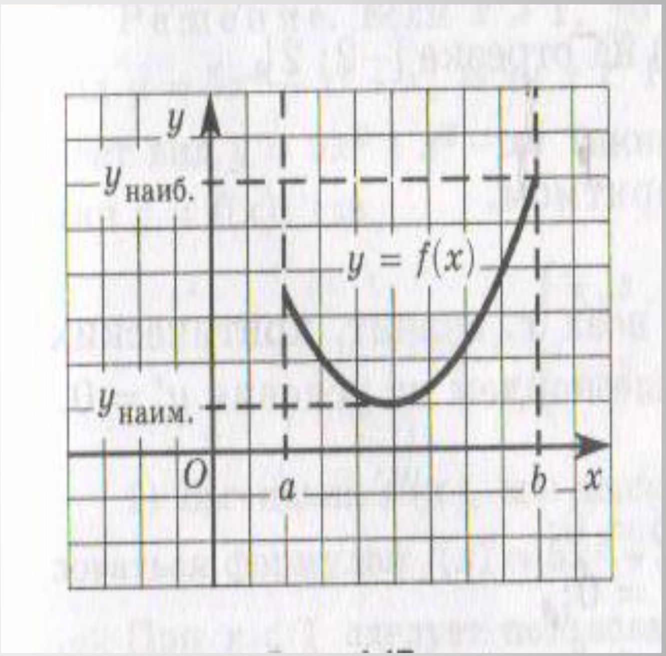
- Функцию y=f(x) называют непрерывной на промежутке X, если она непрерывна в каждой точке промежутка.

Если выражение $f(x)$ составлено из рациональных, иррациональных, тригонометрических выражений, то функция $y = f(x)$ непрерывна в любой точке, в которой определено выражение.

- Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на нем и своего наибольшего и своего наименьшего значений.

Наибольшего и наименьшего значений непрерывная функция может достигать как на концах отрезка, так и внутри него.

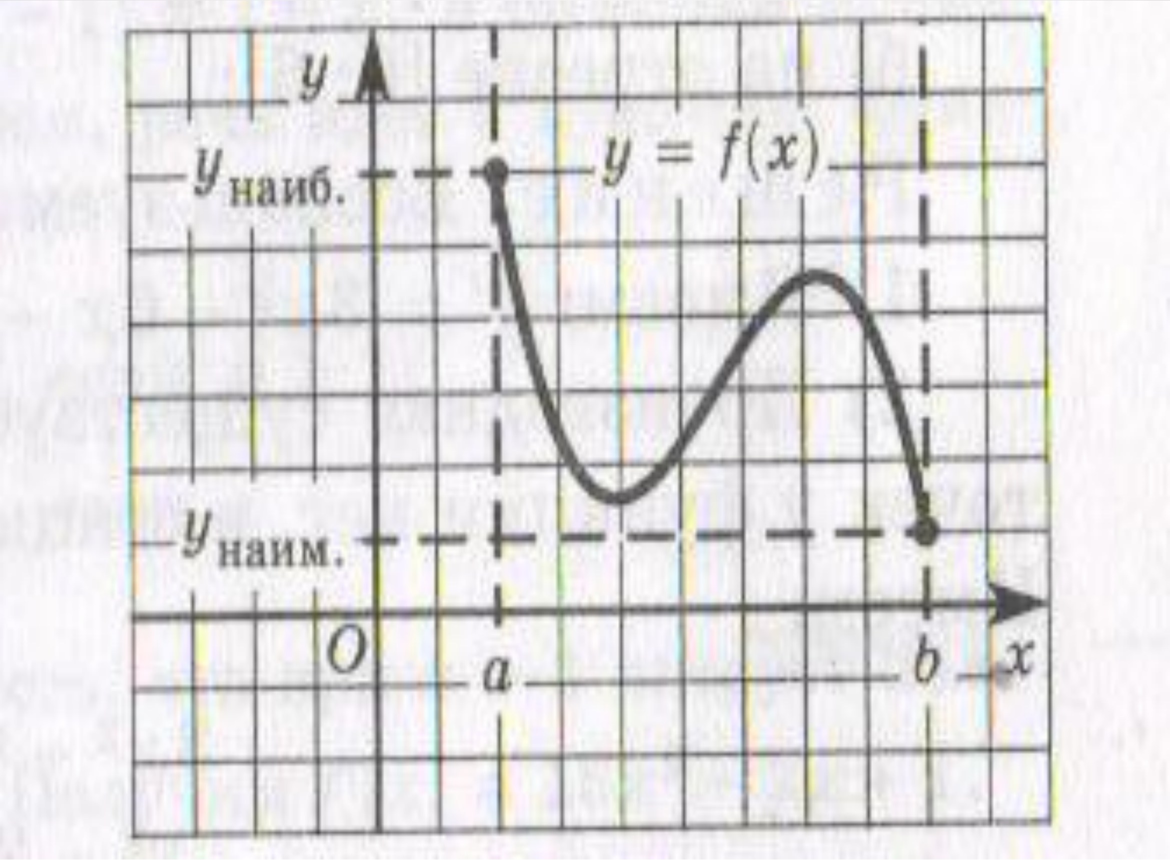




Наибольшее и наименьшее значение достигается внутри отрезка.

Наименьшее значение достигается внутри отрезка, а наибольшее в концевой точке.

Наибольшее и наименьшее значения достигаются в концевых точках.

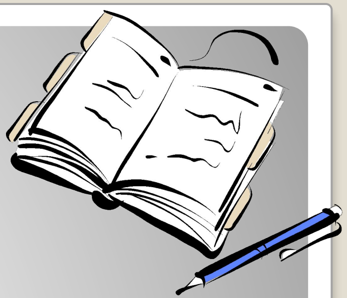


Если наибольшее (или наименьшее) значение достигается внутри отрезка, то только в стационарной или критической точке.

Внутренние точки области определения функции, в которых производная равна нулю, называют стационарными.

Внутренние точки области определения функции, в которых функция непрерывна, но производная не существует,- называют критическими.

Алгоритм отыскания наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции y=f(x) на отрезке [a;в].



1.Найти производную $f^{/}(x)$.
2.Найти стационарные и критические точки функции, лежащие внутри отрезка [a;в] .
3.Вычислить значения функции y=f(x) в точках, отобранных на втором шаге, и в точках a и в , выбрать среди этих значений наименьшее (это будет $y_{наим}$) и наибольшее (это будет $y_{наиб}$).

Пример: Найти наименьшее и наибольшее значение функции

$$y = x^4 - 8x^3 + 10x^2 + 1$$

а) на отрезке $[0;6]$;

б) на отрезке $\left[\frac{1}{2};2\right]$;

в) на отрезке $[-2;-1]$;

Решение: Воспользуемся алгоритмом.

1) **Имеем:** $y^{/} = 4x^3 - 24x^2 + 20x$

2) **Производная существует при всех x, значит, критических точек нет, а стационарные найдем из условия** $y^{/} = 0$

Имеем: $4x^3 - 24x^2 + 20x = 0;$

$$4x(x^2 - 6x + 5) = 0;$$

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 5$$

Дальнейшие рассуждения зависят от условия задачи:

а) Все стационарные точки ($x=0$, $x=1$ и $x=5$) принадлежат заданному отрезку $[0;6]$

Значит, что на третьем шаге алгоритма мы составим такую таблицу значений функции:

$$y = x^4 - 8x^3 + 10x^2 + 1$$

X	0	1	5	6
y	1	4	-124	-71

Таким образом, $y_{наиб} = 4$ (достигается в точке $x=1$); $y_{наим} = -124$ (достигается в точке $x=5$).

б) отрезку $\left[\frac{1}{2};2\right]$ принадлежат лишь одна из двух найденных стационарных точек, а именно точка $x=1$.

Значит, на третьем шаге мы составим такую таблицу значений функции

$$y=x^4-8x^3+10x^2+1$$

X	0,5	1	2
y	$2\frac{9}{16}$	4	-7

Таким образом, $y_{наим}=-7$ (достигается в точке $x=2$);

$y_{наиб}=4$ (достигается в точке $x=1$).

в) Отрезку $\left[-2;-1\right]$ не принадлежит ни одна из найденных стационарных точек.

Значит, достаточно вычислить значения функции в концевых точках:

$f(-2)=121 \qquad f(-1)=20$

Таким образом, в этом случае

$y_{наим}=20 \qquad y_{наиб}=121$