Тригонометрия

Тема:

Тригонометрические функции

Содержание

1.История
2.Введение
3.Основные тождества и их следствия
4.Формулы сложения и вычитания аргументов
5.Числовая окружность
6.Некоторые значения тригонометрических функций
7.Четность тригонометрических функций
8.Формулы приведения
9.Знаки тригонометрических функций по четвертям

История

История

Истоки тригонометрии берут начало в древнем Египте, Вавилонии и долине Инда более 3000 лет назад. Индийские математики были первопроходцами в применении алгебры и тригонометрии к астрономическим вычислениям. Лагадха — единственный из самых древних известный сегодня математик, использовавший геометрию и тригонометрию в своей книге «Джьётиша-веданга» («Jyotisa Vedanga»), бо́льшая часть работ которого была уничтожена иностранными захватчиками.

Греческий математик Клавдий Птолемей также внес большой вклад в развитие тригонометрии. Значительный вклад в развитие тригонометрии внесли арабские ученые Аль-Батани (850-929) и Абу-ль-Вафа, Мухамед-бен Мухамед (940-998), который составил таблицы синусов и тангенсов через 10’ с точностью до $1/60^4$. Теорему синусов уже знали индийский ученый Бхаскара (р. 1114, год смерти неизвестен) и азербайджанский астроном и математик Насиреддин Туси Мухамед (1201-1274). Кроме того, Насиреддин Туси в своей работе «Трактат о полном четырехстороннике» изложил плоскую и сферическую тригонометрию как самостоятельную дисциплину.

Введение

Для введения тригонометрических функций нам понадобиться новая математическая модель – *<u>числовая окружность.</u>*

<u>Пример 1</u>. Дана окружность радиусом 1см. Чему равна длина окружности, ее половины, ее четверти?

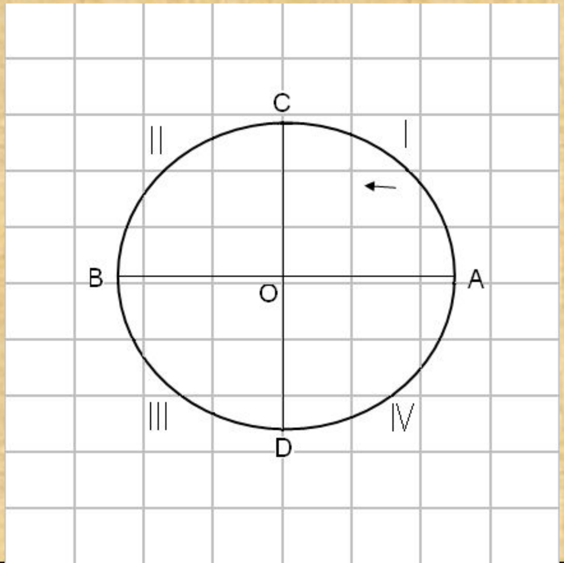
<u>Решение.</u> Длина L окружности радиусом R вычисляется по формуле: L=2πR, где π≈3,14.

Если R =1см, то

L=2 π см ≈6,28см.

Длинна половины окружности равна π см, а длинна четверти окружности (AB, BC, CD или DA) равна π/2 см.

<u>Ответ</u>: ≈6,28 см; ≈3,14 см; ≈1,57.



Основные тождества и их следствия

1 $\cos^2 a+\sin^2 a=1$

2 $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$

3 $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

4 $1+tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

5 $1+ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

6 $tga \times ctga=1$

7 $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

8 $ctg = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Формулы сложения и вычитания аргументов

1. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
2. $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
3. $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
4. $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

5. $tg(\alpha+\beta)=\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$

6. $ctg(\alpha+\beta)=\dfrac{ctg\alpha ctg\beta-1}{ctg\alpha+ctg\beta}$

7. $ctg(\alpha-\beta)=\dfrac{ctg\alpha ctg\beta+1}{ctg\alpha-ctg\beta}$

8. $tg(\alpha-\beta)=\dfrac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}$

Числовая окружность

- Единичная окружность с установленным соответствием (между действительными числами и точками окружности) будем называть числовой окружностью.
- Пример 1. Найти на числовой окружности точку, которая соответствует заданному числу: π/2, π, 3π/2.
- Решение: Так как все числа положительны, то для отыскания соответствующих им точек окружности нужно пройти по окружности путь заданной длины, двигаясь из точки А в положительном направлении. Учтем при этом, что длина каждой четверти единичной окружности равна π/2.
- АВ=π/2, значит, числу π/2 соответствует точка В; В=В (π/2).

Некоторые значения тригонометрических функций

Градусы	0°	15°	18°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Радианы	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Функция										
$\sin\alpha$	0	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
$\mathrm{ctg}\alpha$	-	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

Четность тригонометрических функций

Функция sina нечетная, поэтому sin(-a)=-sina
Функция cosa четная, поэтому cos(-a)=cosa
Функции tga и ctga нечетные, поэтому
tg(-a)=-tga и ctg(-a)=-ctga

Формулы приведения тригонометрических функций

α	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$
$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$

Эти формулы в общем виде можно сформулировать так:

1. Если угол a откладывается от горизонтальной оси, то название функции не меняется.
2. Если угол a откладывается от вертикальной оси, то название функции меняется на противоположную.
3. Перед приведенной функцией ставится знак, который имеет исходная (приводимая) функция.

Знаки тригонометрических функций по четвертям