Тригонометрия

Тема:

Тригонометрические функции

Содержание

История

История

Истоки тригонометрии берут начало в древнем Египте, Вавилонии и долине Инда более 3000 лет назад. Индийские математики были первопроходцами в применении алгебры и тригонометрии к астрономическим вычислениям. Лагадха — единственный из самых древних известный сегодня математик, использовавший геометрию и тригонометрию в своей книге «Джьётиша-веданга» («Jyotisa Vedanga»), бо́льшая часть работ которого была уничтожена иностранными захватчиками.

Греческий математик Клавдий Птолемей также внес большой вклад в развитие тригонометрии. Значительный вклад в развитие тригонометрии внесли арабские ученые Аль-Батани (850-929) и Абу-ль-Вафа, Мухамед-бен Мухамед (940-998), который составил таблицы синусов и тангенсов через 10’ с точностью до $1/60^4$. Теорему синусов уже знали индийский ученый Бхаскара (р. 1114, год смерти неизвестен) и азербайджанский астроном и математик Насиреддин Туси Мухамед (1201-1274). Кроме того, Насиреддин Туси в своей работе «Трактат о полном четырехстороннике» изложил плоскую и сферическую тригонометрию как самостоятельную дисциплину.

Введение

Для введения тригонометрических функций нам понадобиться новая математическая модель – *числовая окружность.*

Пример 1. Дана окружность радиусом 1см. Чему равна длина окружности, ее половины, ее четверти?

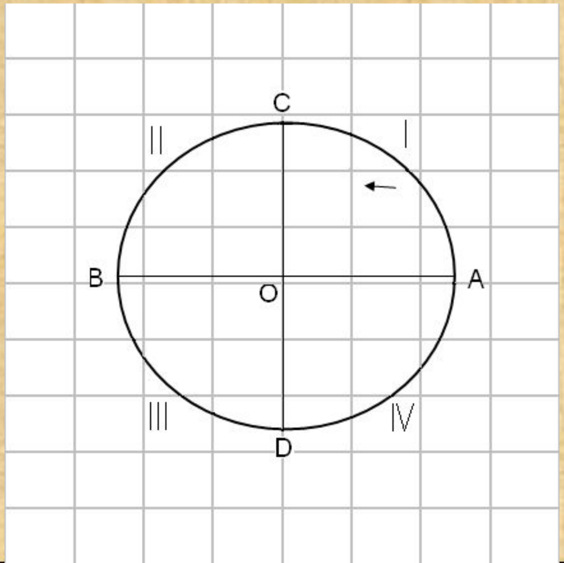
Решение. Длина L окружности радиусом R вычисляется по формуле: $L=2\pi R$, где $\pi\approx3{,}14$.

Если R =1см, то

$$L=2\pi \text{ см} \approx 6{,}28\text{см}.$$

Длинна половины окружности равна π см, а длинна четверти окружности (AB, BC, CD или DA) равна π/2 см.

Ответ: ≈6,28 см; ≈3,14 см; ≈1,57.



Основные тождества и их следствия

1 $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$

2 $\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$

3 $\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$

4 $1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

5 $1 + ctg^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

6 $tga \times ctga = 1$

7 $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

8 $ctg = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Формулы сложения и вычитания аргументов

1. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
2. $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
3. $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
4. $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
5. $tg(\alpha + \beta) = \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta}$
6. $ctg(\alpha + \beta) = \dfrac{ctg\alpha ctg\beta - 1}{ctg\alpha + ctg\beta}$
7. $ctg(\alpha - \beta) = \dfrac{ctg\alpha ctg\beta + 1}{ctg\alpha - ctg\beta}$
8. $tg(\alpha - \beta) = \dfrac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha tg\beta}$

Числовая окружность

- Единичная окружность с установленным соответствием (между действительными числами и точками окружности) будем называть числовой окружностью.
- Пример 1. Найти на числовой окружности точку, которая соответствует заданному числу: $\pi/2$, π, $3\pi/2$.
- Решение: Так как все числа положительны, то для отыскания соответствующих им точек окружности нужно пройти по окружности путь заданной длины, двигаясь из точки А в положительном направлении. Учтем при этом, что длина каждой четверти единичной окружности равна $\pi/2$.
- $AB=\pi/2$, значит, числу $\pi/2$ соответствует точка В; $B=B(\pi/2)$.

Некоторые значения тригонометрических функций

Градусы	0°	15°	18°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Радианы	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Функция										
$\sin\alpha$	0	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
$\mathrm{ctg}\alpha$	-	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

Четность тригонометрических функций

Функция sina нечетная, поэтому sin(-a)=-sina
Функция cosa четная, поэтому cos(-a)=cosa
Функции tga и ctga нечетные, поэтому
tg(-a)=-tga и ctg(-a)=-ctga

Формулы приведения тригонометрических функций

α	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$
$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$

Эти формулы в общем виде можно сформулировать так:
1. Если угол а откладывается от горизонтальной оси, то название функции не меняется.
2. Если угол а откладывается от вертикальной оси, то название функции меняется на противоположную.
3. Перед приведенной функцией ставится знак, который имеет исходная (приводимая) функция.

Знаки тригонометрических функций по четвертям