Основные методы построения графиков функций

Изучение действий функций и построение их графиков является важным разделом математики.

Свободное владение техникой построения графиков часто помогает решить многие задачи и порой является единственным средством их решения.

Схема исследования функции при построении графика

Область определения функции – множество значений аргумента, при которых функция задана, определена.	Геометрически – это проекция графика функции на ось x Пример
Нули функции – это точки, в которых функция обращается в нуль.	Геометрически – это абсциссы точек пересечения графика функции с осью x Пример
Промежутки постоянного знака – множества решений неравенств f(x)>0 и f(x)<0	Геометрически – это интервалы оси x, соответствующие точкам графика, лежащим выше (или ниже) этой оси Пример
Промежутки монотонности – промежутки оси x, на которых функция возрастает или убывает	Геометрически – это интервалы оси x , где график функции идет вверх или вниз Пример
Точки экстремума – точки, лежащие внутри области определения, в которых функция принимает самое большое (максимум) или самое малое (минимум) значения по сравнению со значениями в близких точках	Геометрически – около точек экстремума график функции выгибается выпуклостью вверх или вниз Пример
Говорят, что в точке x0 функция f принимает наибольшее (наименьшее) значение, если для любого значения x. Само число и называется наибольшим (наименьшим) значением функции.	Геометрически – это ординаты самой высокой (самой низкой) точки графика. Пример
Область значений функции – множество чисел, состоящее из всех значений функции.	Геометрически – это проекция графика функции на ось y. Пример

При рассмотрении графиков многих функций часто можно избежать проведения подобного исследования, используя ряд методов, упрощающих аналитическое выражение функции и облегчающих построение графика.

Параллельный перенос
Перенос (сдвиг) вдоль оси ординат

Пусть требуется построить график y=f(x)+b. Ординаты этого графика для всех значений аргумента на b единиц больше соответствующих ординат графика y=f(x) при b>0 и на b единиц меньше при b<0. График функции y=f(x)+b можно получить параллельным переносом вдоль оси ординат графика функции y=f(x) на b единиц вверх при b>0 или вниз при b<0.

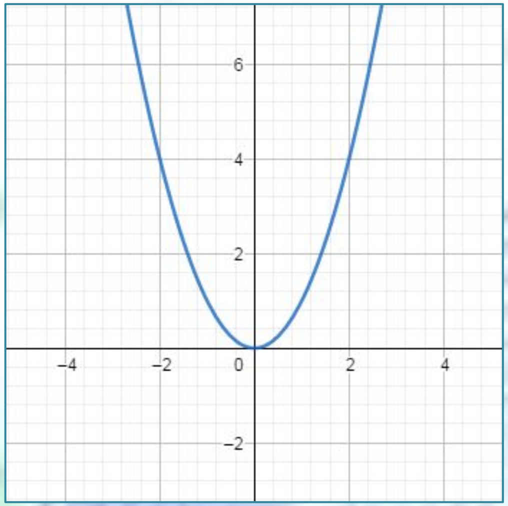


Рис. 1

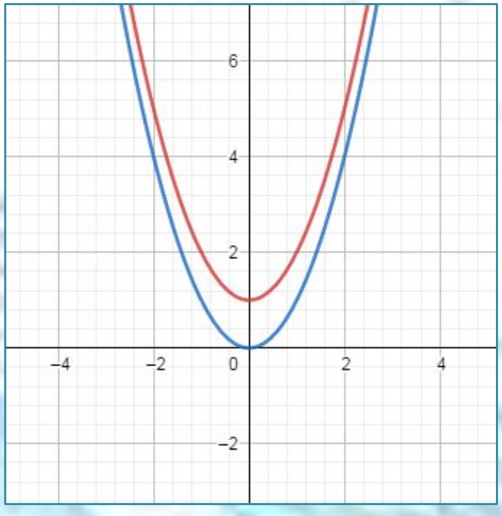


Рис. 2

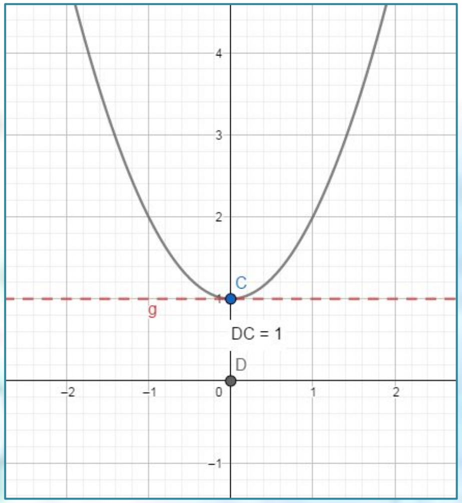


Рис. 3

Пример 1. Построить график функции y = $2^x + 3$.

Решение. Строим график функции y = 2^x и переносим ось абсцисс на 3 единицы вниз. Получаем график функции y = 2^x+3 (рис. 4). Прямая y = 3 является горизонтальной асимптотой. График пересекает ось ординат в точке (0;4).

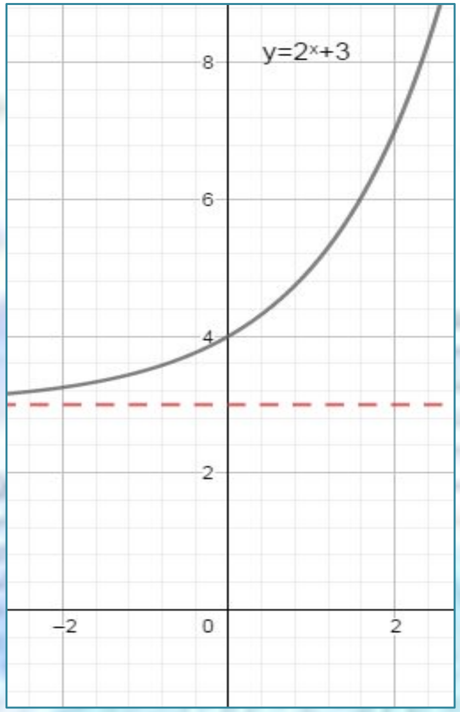


Рис.4

Пример 2. Построить график функции $y = \frac{1}{x} - \frac{5}{4}$

Решение. Строим график функции $y = \frac{1}{x}$ и переносим ось абсцисс на 5/4 единиц вверх. Получаем график функции $y = \frac{1}{x} - \frac{5}{4}$(рис. 5). Прямая $y = -\frac{5}{4}$ является горизонтальной асимптотой. График пересекает ось абсцисс в точке ($\frac{4}{5}$,0)

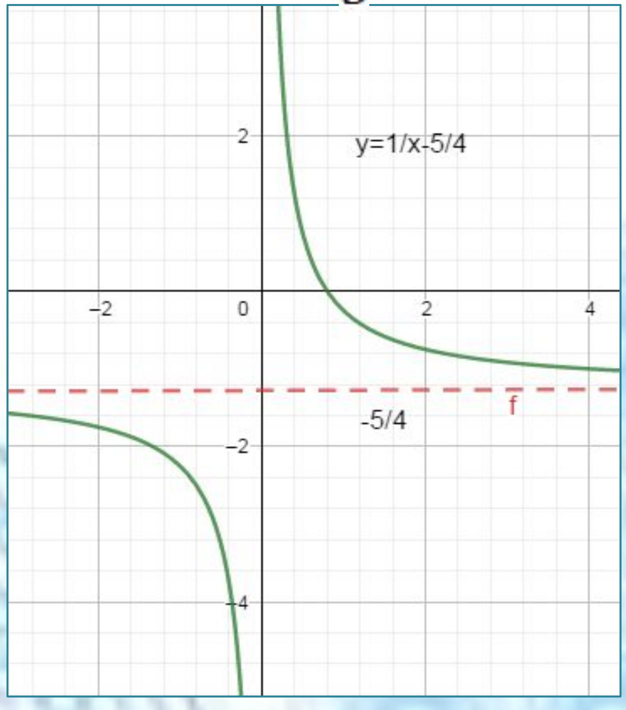


Рис.5

Перенос вдоль оси абсцисс

Для построения графика функции следует построить график функции y=f(x) и перенести ось ординат на a единиц вправо при a>0 и на a единиц влево при a<0. Полученный в новой системе координат график является графиком функции y=f(x+a).

Пример 3. Построить график функции $y = log_2(x+2)$

Решение. Строим график функции $y = log_2 x$

Переносим ось ординат на 2 единицы вправо, и в полученной таким образом системе координат имеем график функции $y = log_2(x+2)$

Прямая x=-2 является вертикальной асимптотой. График пересекает ось абсцисс в точке x=-1, а ось ординат - в точке y=1 (рис.6).

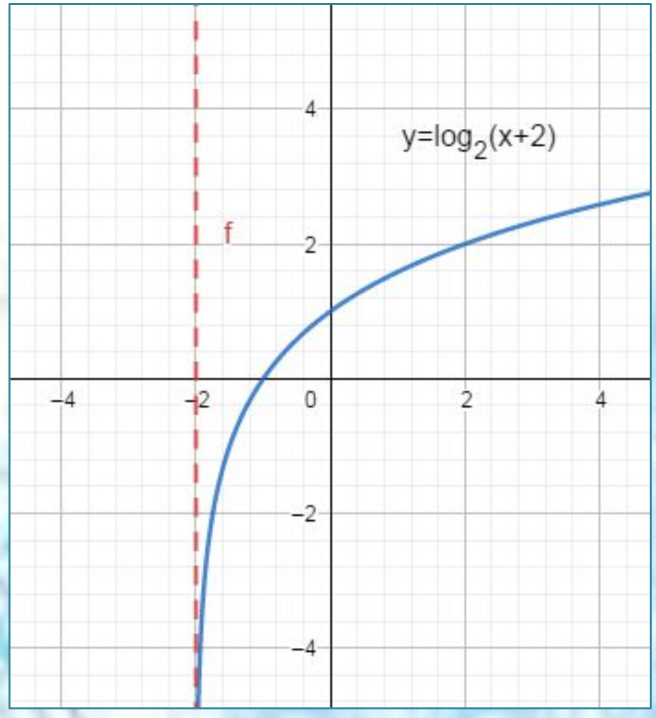


Рис. 6

Пример 4. Построить график функции $y = \sin(x - \sqrt{2})$

Решение. Строим график функции $y = \sin x$

Переносим ось ординат на $\sqrt{2}$ единиц влево и во вновь полученной системе координат имеем график функции $y = \sin(x - \sqrt{2})$ (рис.7). Координаты точек пересечения графика с осью абсцисс находим из условия $y = \sin(x - \sqrt{2}) = 0$ откуда $x = \sqrt{2} + \pi k$

, где k = 0, $\pm 1, \pm 2, \dots$

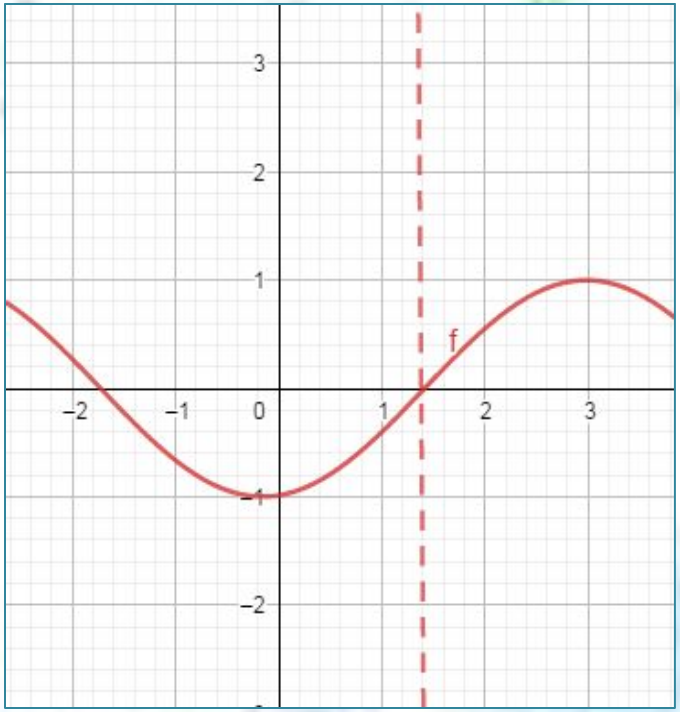


Рис. 7

Отражение
Построение графика функции вида y=f(-x)

Для построения графика функции y=f(-x) следует построить график функции y=f(x) и отразить его относительно оси ординат. Полученный график является графиком функции y=f(-x).

Пример 5. Построить график функции $y = log_{\frac{1}{2}}(-x)$

Решение. Строим график функции $y = log_{\frac{1}{2}}x$

и отражаем его относительно ординат. Получаем график функции

$y = log_{\frac{1}{2}}(-x)$ (рис.8).

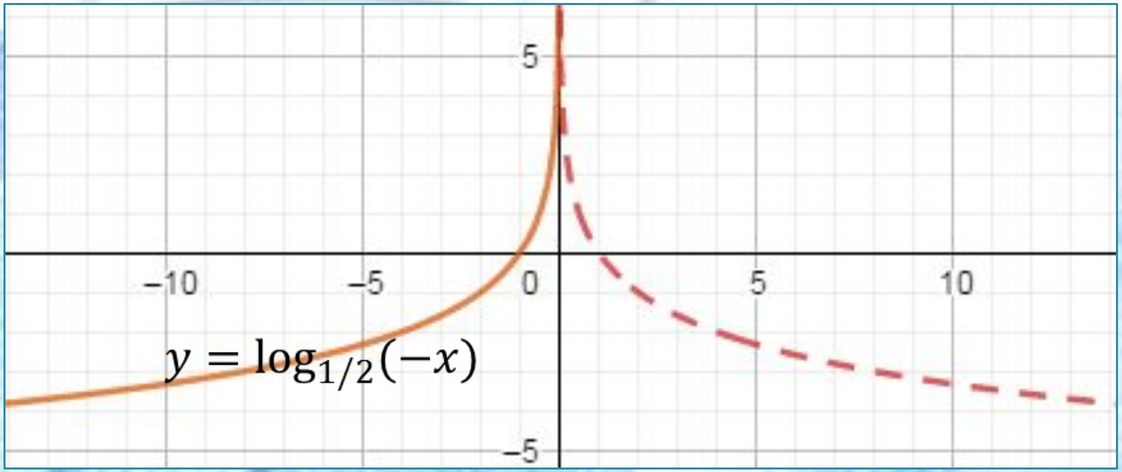


Рис.

Построение графика функции вида y=-f(x)

Для построения графика функции y=-f(x) следует построить график функции y=f(x) и отразить его относительно оси абсцисс.

Пример 6. Построить график функции y= - cosx.
Решение. Строим график функции y= cosx (рис.9) и, отражая его относительно оси абсцисс, получаем график функции y= - cosx.

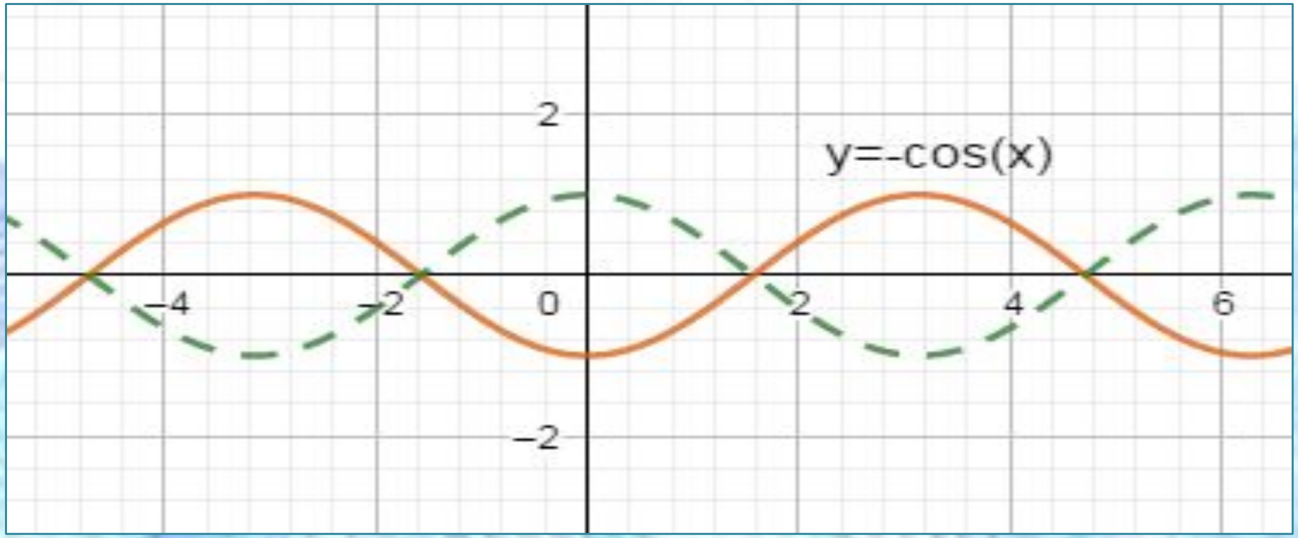


Рис. 9

Построение графиков чётной и нечётной функций

Для построения графика четной функции y=f(x) следует построить ветвь графика этой функции только в области положительных значений аргумента x≥0. График функции y=f(x) в области отрицательных значений аргумента симметричен построенной ветви относительно оси ординат и получается отражением ее относительно этой оси.

Для построения графика нечетной функции следует строить ветвь графика этой функции только в области положительных значений аргумента (x≥0). График функции y=f(x) в области отрицательных значений аргумента симметричен построенной ветви относительно начала координат с последующим отражением в области отрицательных значений x относительно оси абсцисс.

Пример 8. Построить график функции $y = \frac{|x|}{x^2}$

Решение. Данная функция – четная, поэтому достаточно построить ее график лишь в области положительных значений x. При x>0 исходная функция имеет вид $y = \frac{1}{x}$

График функции $y = \frac{|x|}{x^2}$

в области отрицательных значений x получаем отражением относительно оси ординат (рис.11).

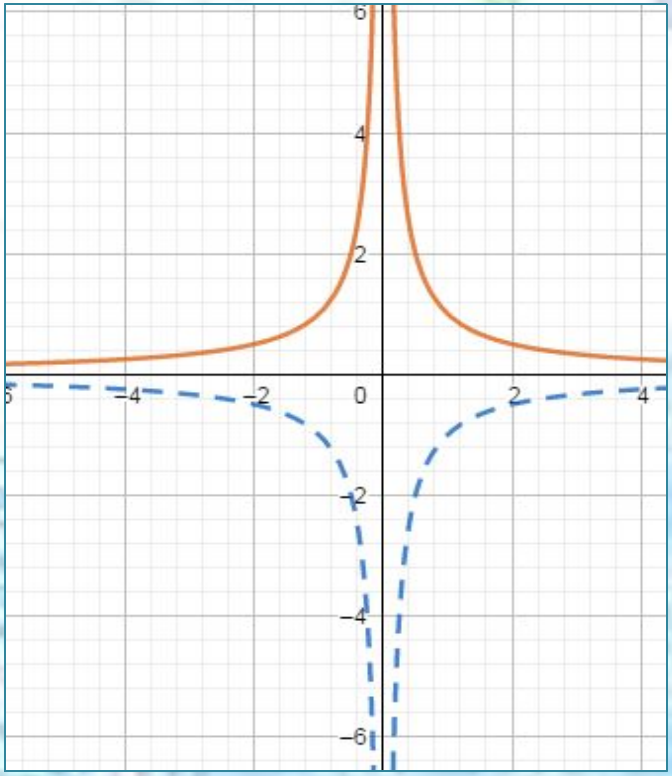


Рис.11

Деформация (сжатие и растяжение). Сжатие (растяжение) графика вдоль оси ординат.

Для построения графика функции $y=A\cdot f(x)$ следует построить график функции $y=f(x)$ и увеличить его ординаты в A раз при $A>1$ (произвести растяжение графика вдоль оси ординат) или уменьшить его ординаты в $1/A$ раз при $A<1$ (произвести сжатие графика вдоль оси ординат). Полученный график является графиком функции $y=A\cdot f(x)$

Сжатие (растяжение) графика вдоль оси абсцисс.

Для построения графика функции $y=f(\omega x)$ следует построить график функции $y=f(x)$ и уменьшить его абсциссы в ω раз при $\omega>1$ (произвести сжатие графика вдоль оси абсцисс) или увеличить его абсциссы в $1/\omega$ раз при $\omega<1$ (произвести растяжение графика вдоль оси абсцисс). Полученный график является графиком функции $y=f(\omega x)$.

Задания для самостоятельного выполнения

С помощью элементарных преобразований постройте графики следующих функций:

$y = x^2 - 2$ $\qquad$ $y = sin\frac{1}{2}x$

$y = (x+1)^2$ $\qquad$ $y = -3sinx$

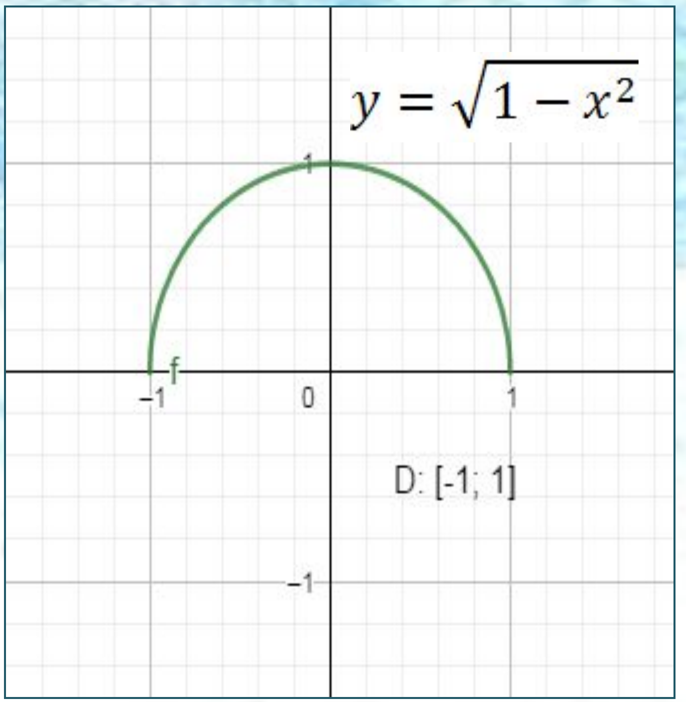
Написать последовательность преобразований и построить графики следующих функций:

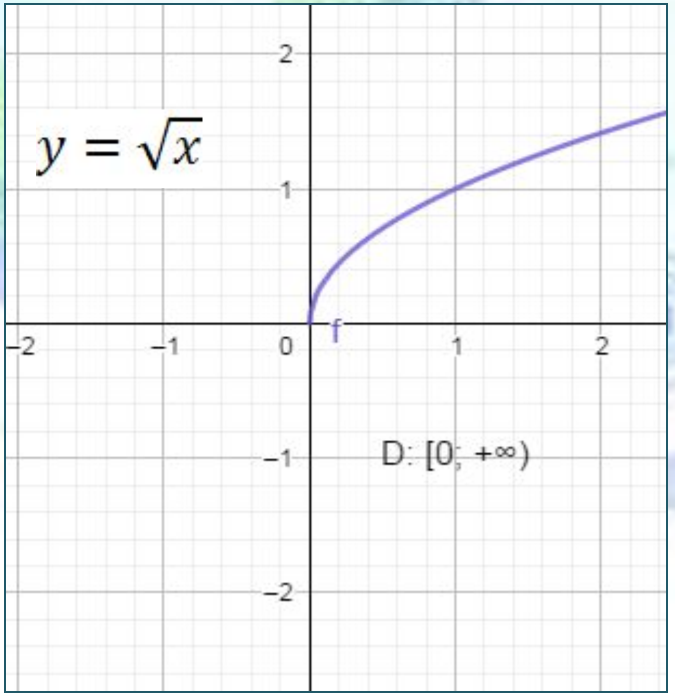
$y = \sqrt{4-5x}$ $\qquad$ $y = \ln(1-x)$

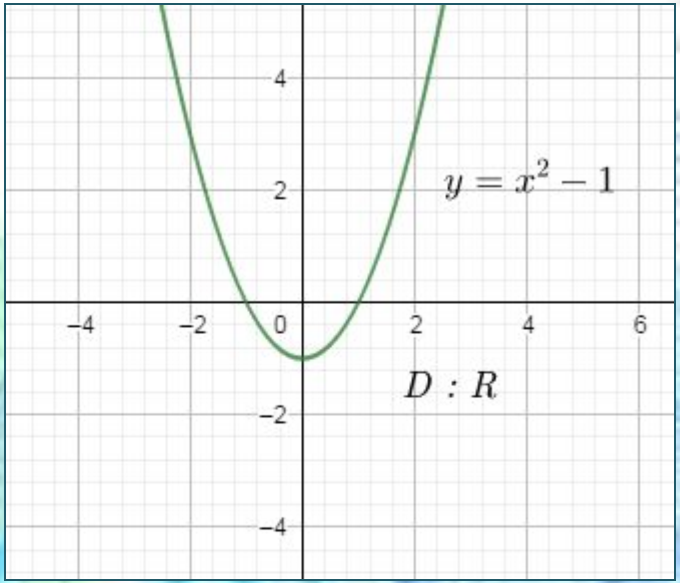
$y = (x-1)^3 + 2$ $\qquad$ $y = tg(-\frac{\pi}{2}x)$

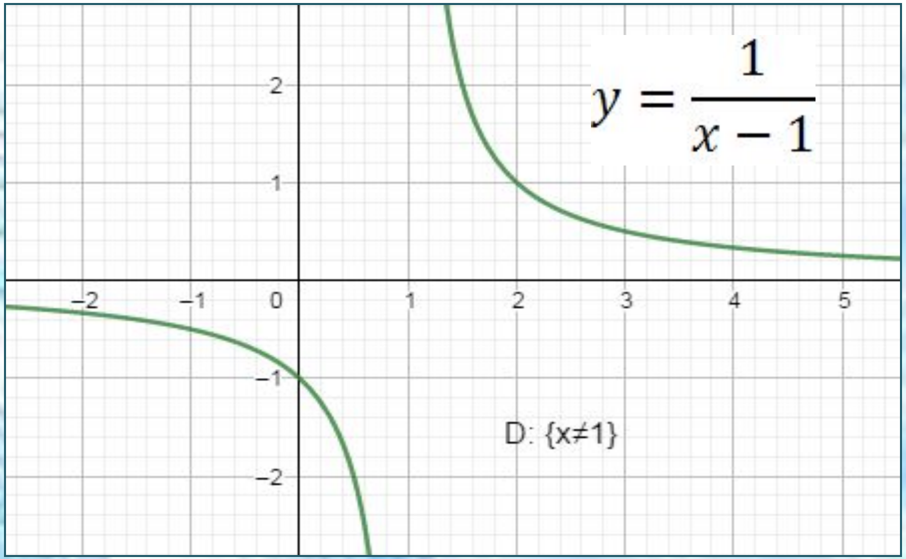
Список использованной литературы

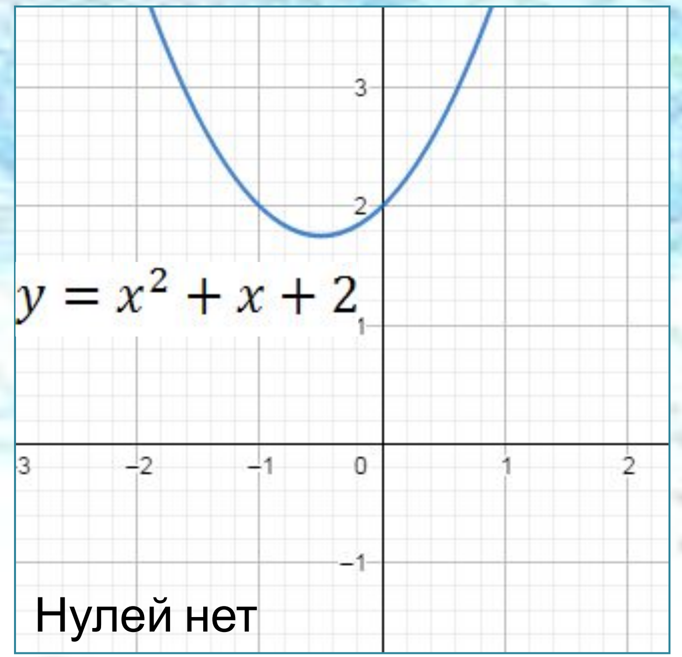
1. Башмаков М.И. Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. Для студ. Учреждений сред. Проф. образования/ М.И. Башмаков. - М.: Издательский центр «Академия», 2017
2. Башмаков М.И. учебник для 10 класса: среднее (полное) общее образование (базовый уровень)/ М.И. Башмаков. - М.: Издательский центр «Академия», 2014
3. Башмаков М.И. Математика 10 класс. Сборник задач: среднее (полное) общее образование (базовый уровень)/ М. И. Башмаков. - М.: Издательский центр «Академия», 2014

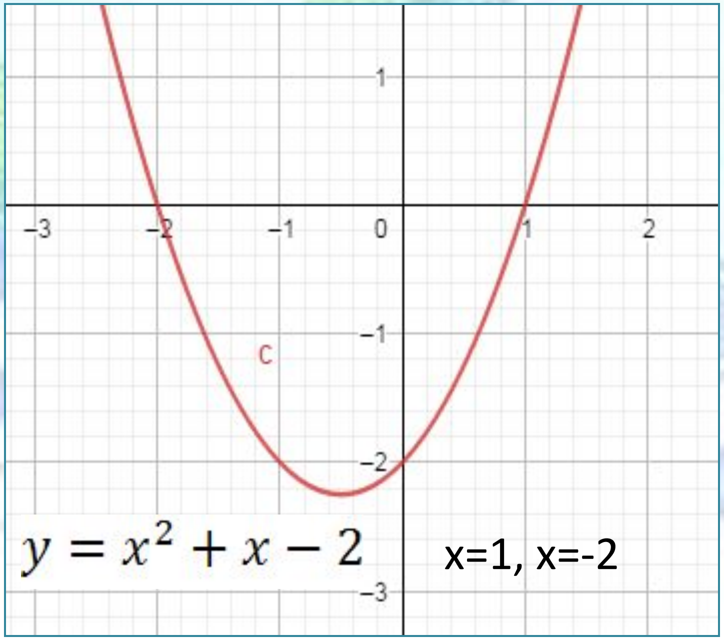

$y = \sqrt{1 - x^2}$
1
f
−1
0
1
D: [-1; 1]
−1

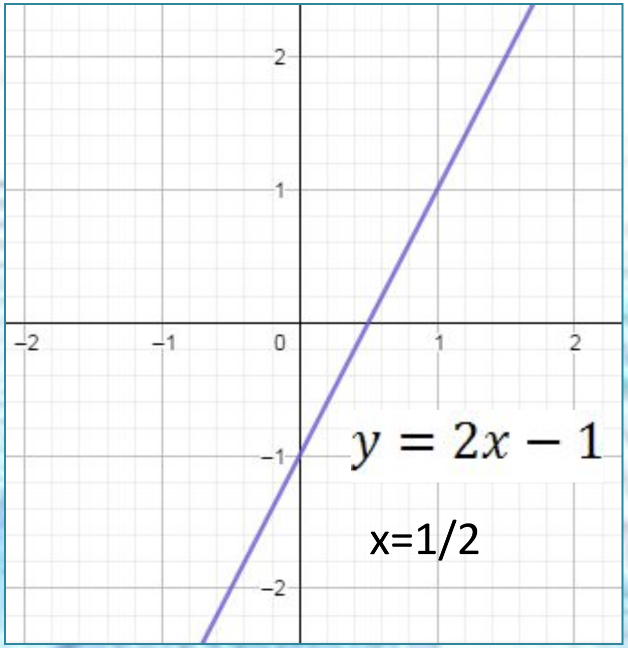

$y = \sqrt{x}$
2
1
f
−2
−1
0
1
2
−1
D: [0; +∞)
−2

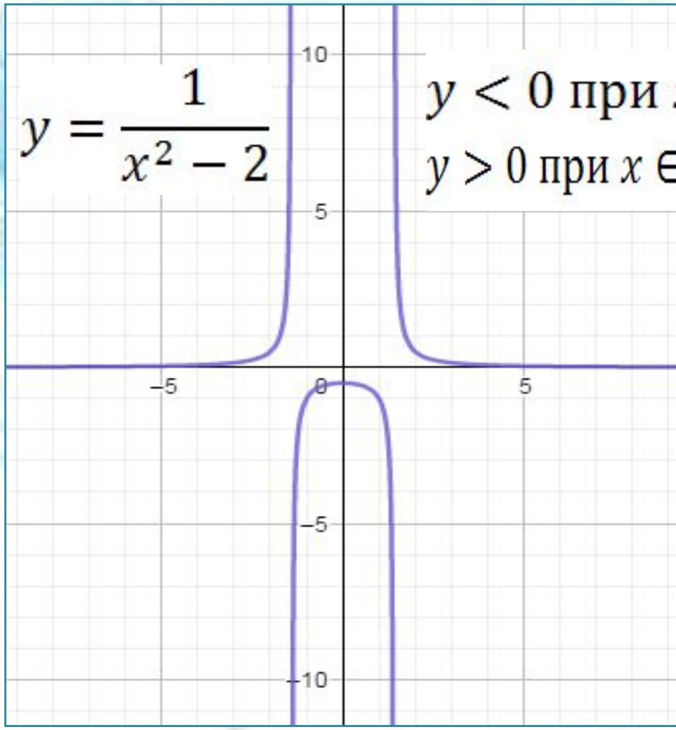

4
2
$y = x^2 - 1$
−4
−2
0
2
4
6
$D : R$
−2
−4


$y = \frac{1}{x-1}$
2
1
−2
−1
0
1
2
3
4
5
−1
D: {x≠1}
−2


3
2
1
-3
-2
-1
0
1
2
-1
$y = x^2 + x + 2$
Нулей нет


1
-3
-2
-1
0
1
2
-1
c
-2
-3
$y = x^2 + x - 2$
x=1, x=-2

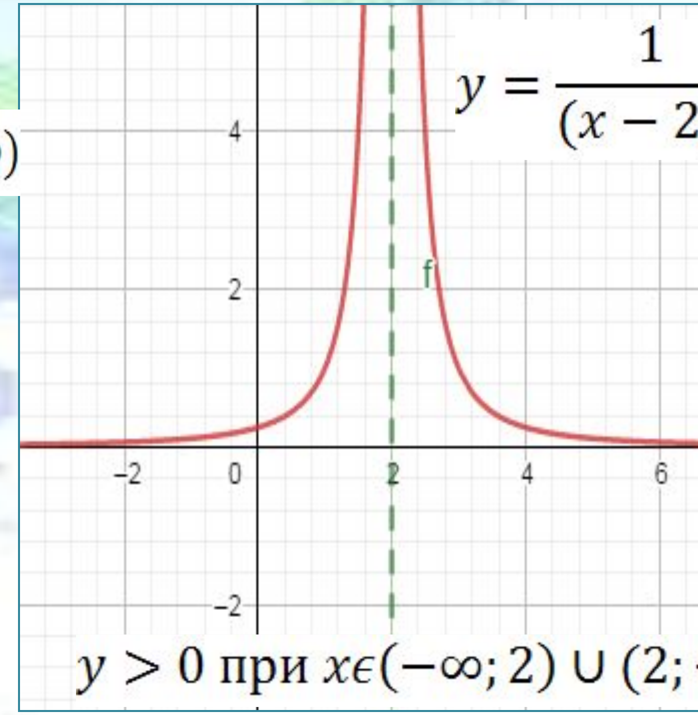

2
1
-2
-1
0
1
2
-1
-2
$y = 2x - 1$
x=1/2



$$y = \frac{1}{x^2 - 2}$$

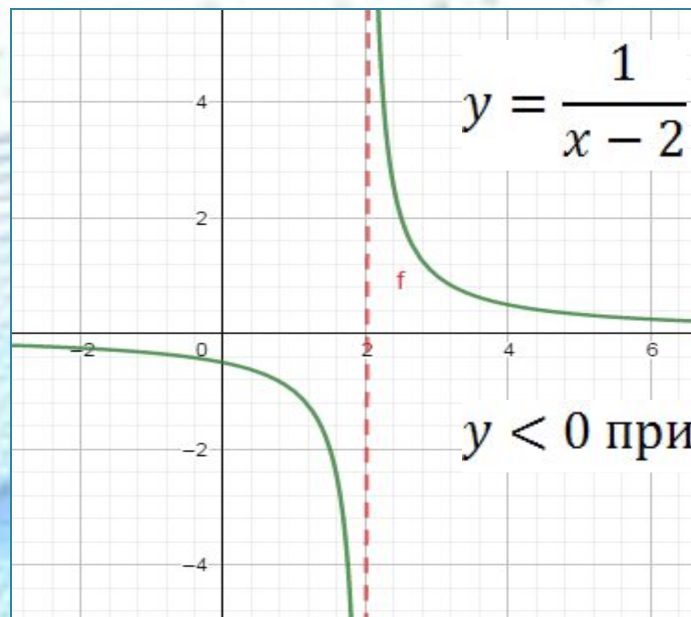
$y < 0$ при $x \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

$y > 0$ при $x \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; +\infty\right)$



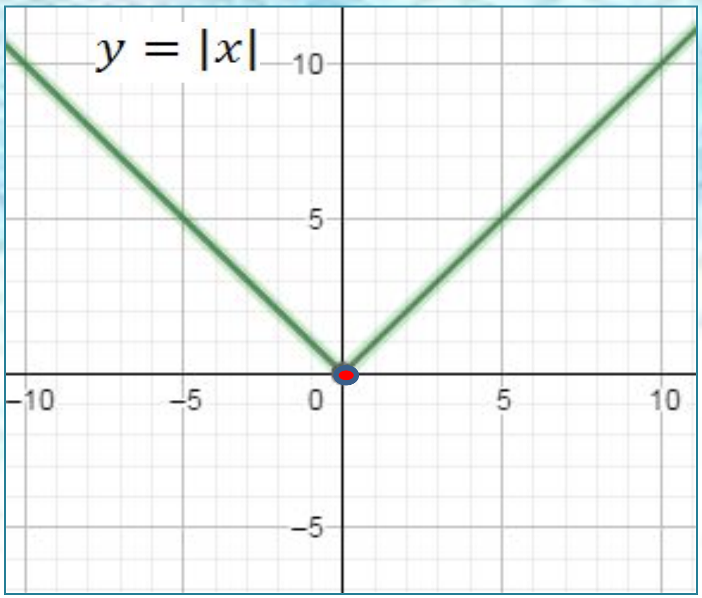
$$y = \frac{1}{(x-2)^2}$$

$y > 0$ при $x \epsilon (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$

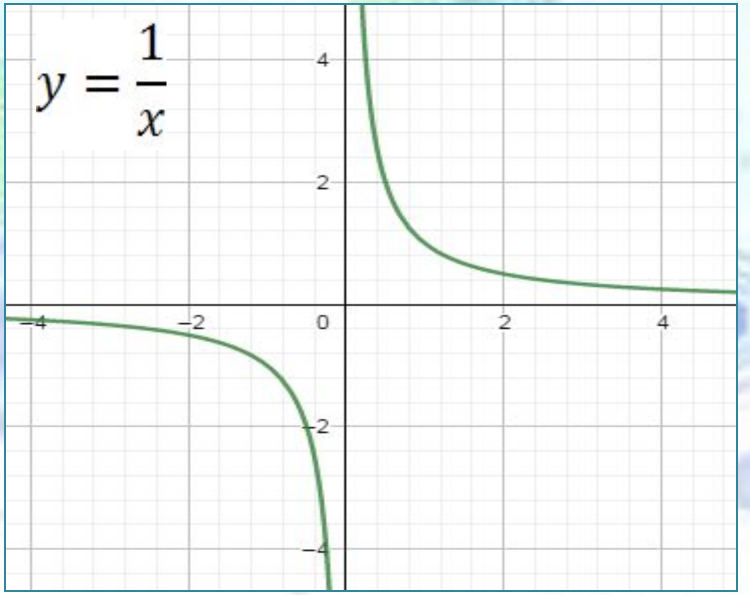


$$y = \frac{1}{x - 2}$$

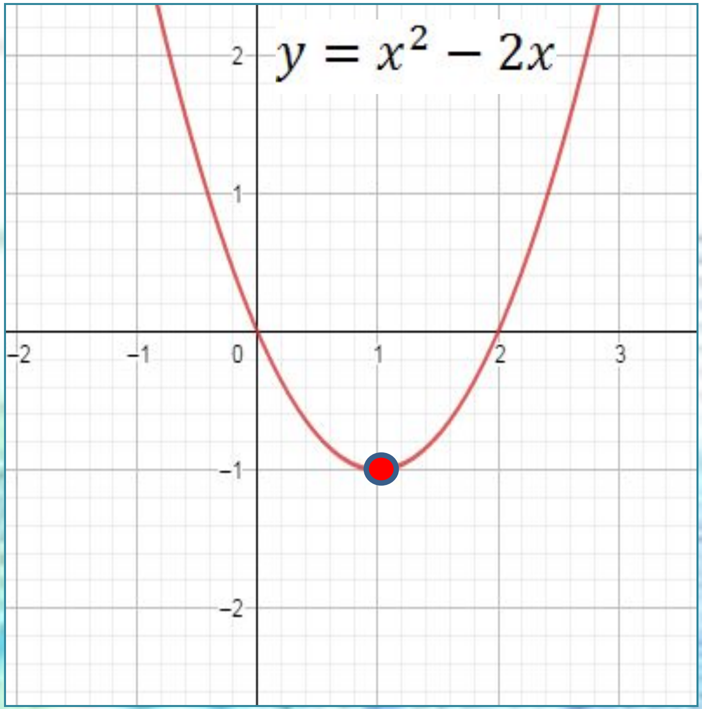
$y < 0$ при $x < 2, y > 0$ при $x > 2$



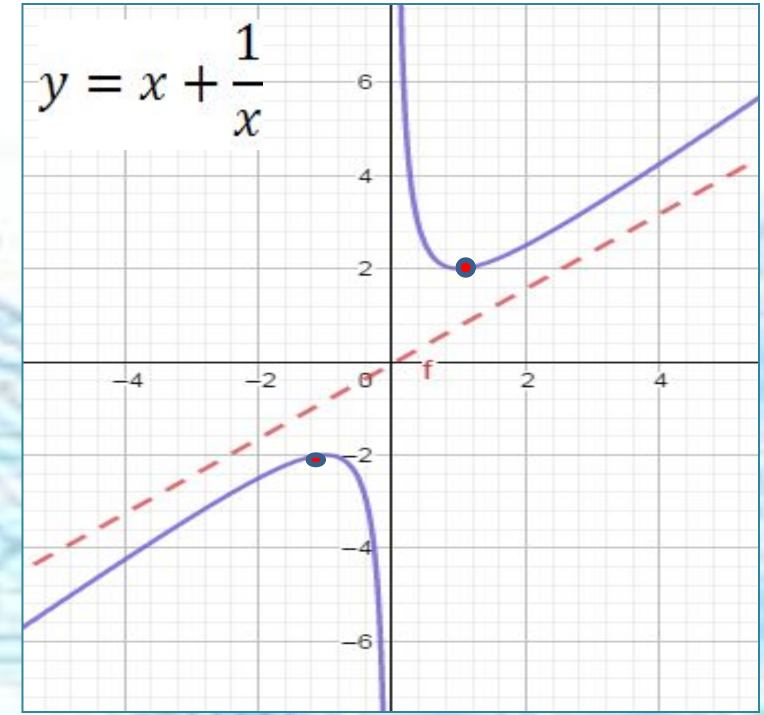
$y = |x|$
10
5
0
−5
−10
−5
5
10



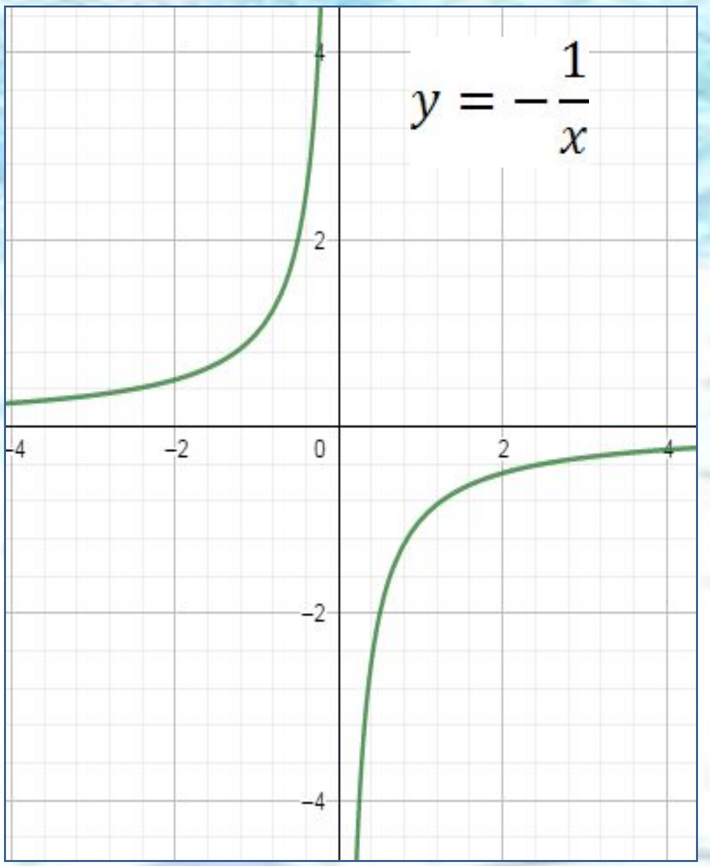
$y = \frac{1}{x}$
4
2
0
−2
−4
−4
−2
2
4

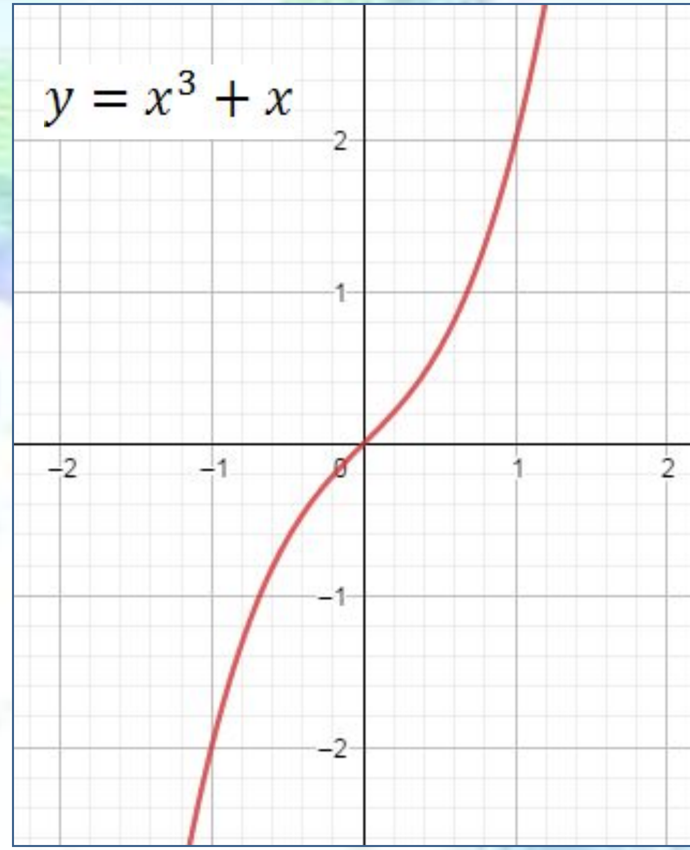


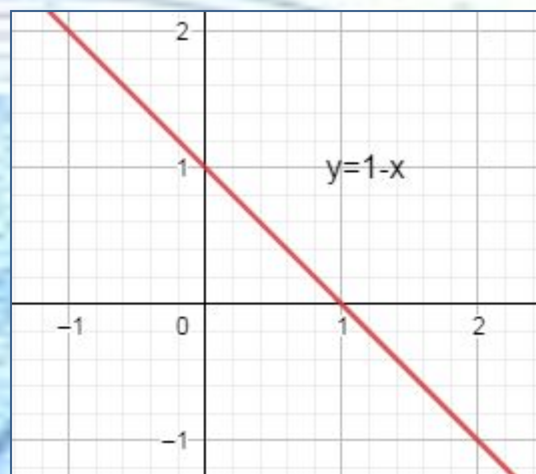
$y = x^2 - 2x$
2
1
0
−1
−2
−2
−1
1
2
3

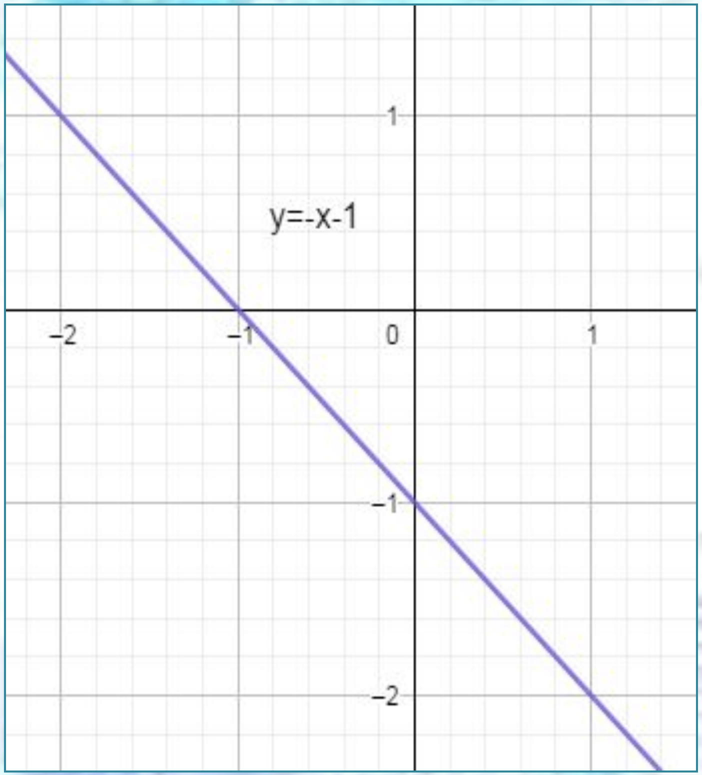


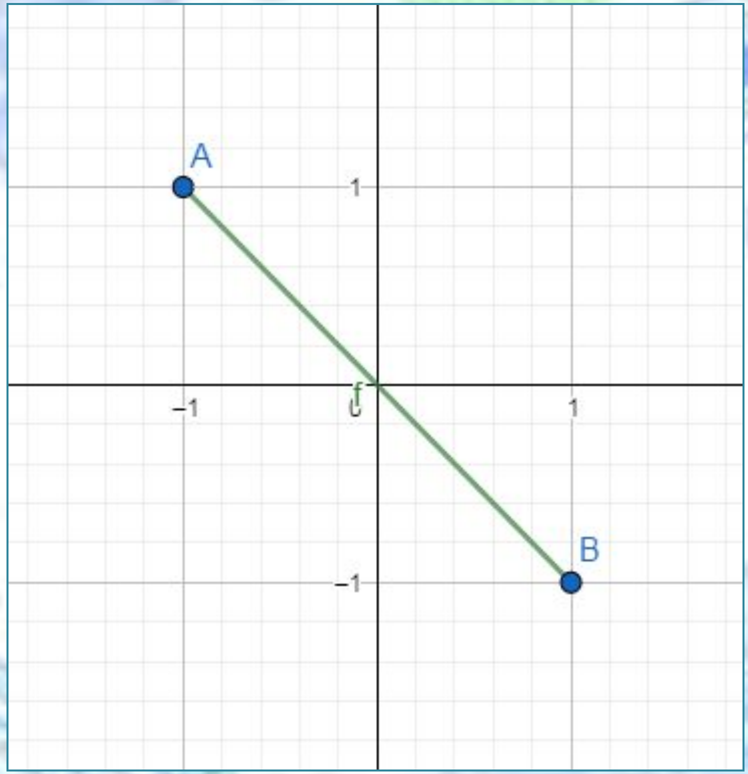
$y = x + \frac{1}{x}$
6
4
2
0
−2
−4
−6
−4
−2
2
4
f


$y = -\frac{1}{x}$
-4
-2
0
2
4
-2
-4


$y = x^3 + x$
2
1
-2
-1
0
1
2
-1
-2

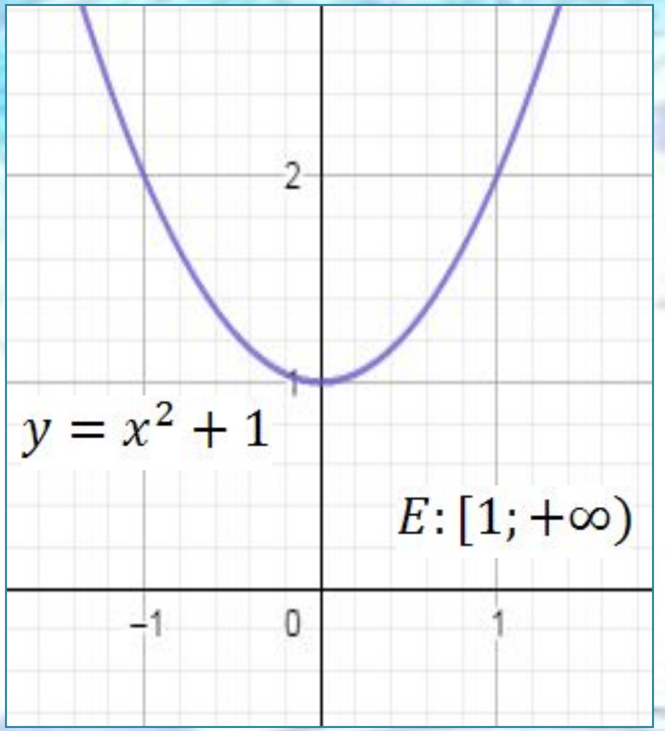

y=1-x
2
1
-1
0
1
2
-1



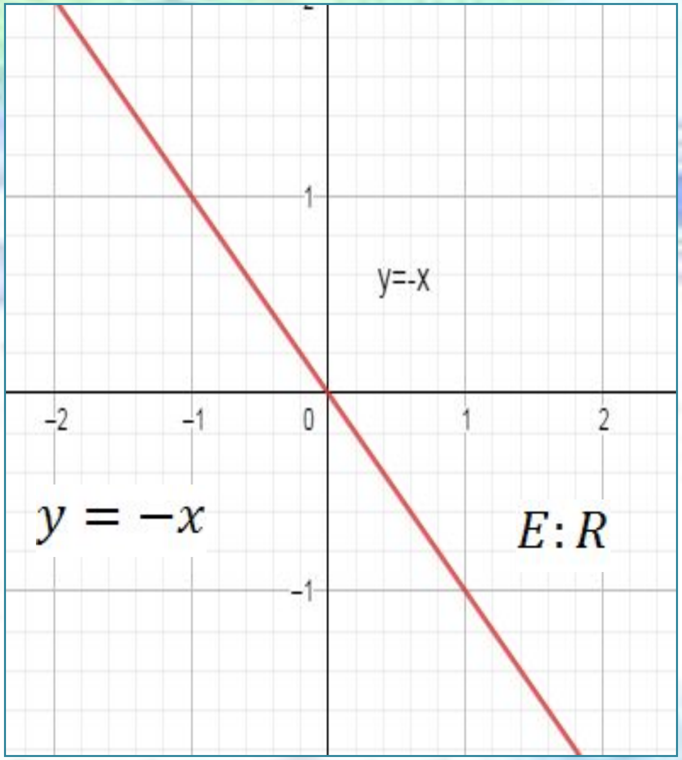


$y = -x - 1$, функция не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений

$y = -x, x \in [-1; 1]$



2
1
$y = x^2 + 1$
$E: [1; +\infty)$
−1
0
1



1
y=-x
−2
−1
0
1
2
$y = -x$
$E: R$
−1