Задания с развернутым ответом С2 и С4.
Критерии проверки и оценки решений.

Марина Геннадьевна Ким, учитель МАОУ СОШ №77,
эксперт региональной предметной комиссии

город Хабаровск

Задания с развернутым ответом С2. Критерии проверки и оценки решений

В заданиях С2 прежними остались уровень сложности, тематическая принадлежность (геометрия многогранников), структура постановки вопроса в задачах и общий характер оценивания выполнения решений.

Среди особенностей, связанных с непосредственной работой экспертов региональных предметных групп, выделим проблему обоснованности решений стереометрических заданий, приводимых в работах участников ЕГЭ.

Подход к оцениванию выполнения заданий С2 существенно мягче требований традиционных математических стандартов получения максимального балла. Достаточными являются верное описание конструкции и верное вычисление.

Отметим, что, в то же время, необходимым условием является отсутствие в тексте работы неверных утверждений о свойствах и расположении тех или иных геометрических объектов.

Подчеркнем, что при наличии развернутых и полных обоснований всех конструкций и построений, разумеется, следует выставлять 2 балла. Но те же 2 балла, по мнению разработчиков, следует выставлять и в тех случаях, когда в решении учащегося лишь описана и продемонстрирована верная конструкция.

Отметим часто задаваемый экспертами вопрос, связанный с проверкой решения задач на нахождение угла. Вид ответа может отличаться от приведенного в решениях, присланных федеральной предметной группой. Это отличие не может служить основанием для снижения оценки. Главное, чтобы ответ был правильным.

Например, если в образце решения стоит $\arcsin 0,6$, а у ученика $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{24}{7}$

ответе $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{24}{7}$, то справедливость равенства $\arcsin 0,6 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{24}{7}$

эксперту следует проверить самостоятельно

Приведем критерии оценивания выполнения заданий С2, которых следует придерживаться.

Критерии оценивания выполнения заданий С2

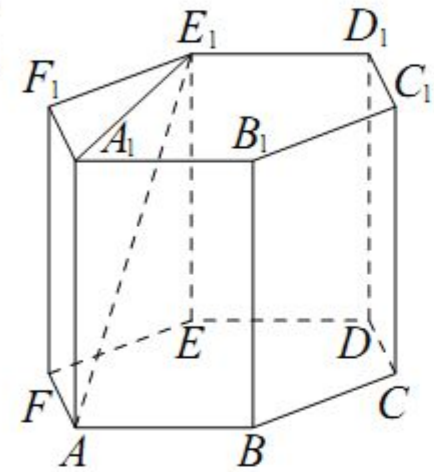
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, ИЛИ при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

По сравнению с ЕГЭ-2011 есть одно дополнение: в содержание критерия на 1 балл добавлены слова «…или при правильном ответе решение недостаточно обосновано». Формально, это положение противоречит вышеприведенному тезису о допустимой минимизации обоснований.

Позиция разработчиков КИМ здесь состоит в том, что эти слова относятся не к возможности понижения (за недостаточностью обоснований) оценки с 2 баллов на 1 балл, а к возможности повышения оценки с 0 баллов до 1 балла. Дело в том, что по результатам проверки работ ЕГЭ-2010-2012 устойчиво выделился массив работ, в которых изложение ограничивается лишь верным рисунком, указанием искомого объекта и верным ответом без приведения сколько-нибудь развернутых вычислений.

Приведем конкретный пример.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, стороны основания которой равны 5, а боковые рёбра равны 11, найдите расстояние от точки A до прямой E_1D_1.



Решение.

Искомое расстояние равно AE_1.

$A_1E_1 = 5\sqrt{3}$; из треугольника AA_1E_1 : $AE_1 = 14$.

Ответ: 14.

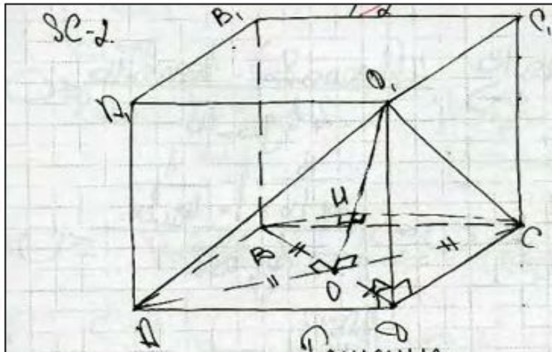
По действующим критериям решение заслуживает 1 балла в соответствии с дополнением «при правильном ответе решение недостаточно обосновано».

Еще раз повторим, дополнение «…или при правильном ответе решение недостаточно обосновано» введено не для того, чтобы «зарубить» верные решения за необоснованность, а, напротив, для того, чтобы иметь в некоторых случаях возможность повысить оценку с 0 до 1 балла.

Отметить обстоятельство, связанное с использованием векторов и координат. Верное использование расчетных формул подразумевает обоснованное сведение к планиметрической задаче. Тем самым, критерий на 1 балл работает и в применении случаям, когда правильно используется верная формула аналитической стереометрии, но в вычислениях содержится арифметическая ошибка.

Примеры оценивания выполнения заданий С2

Пример 1.
Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. Найдите расстояние от вершины B до плоскости ACD_1.



Дано: $ABCD\dots D_1$ - куб
$AB=1$.

$\rho(B; AD_1C)$ - ?

Решение:

1) $\rho(B; AD_1C) = \rho(B; D_1O) = BH$ т.к. $BH \perp AD_1C$

2) ΔAD_1C равносторонний; $AD_1 = AC = D_1C = \sqrt{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow D_1O \perp AC$ $AO = OC \Rightarrow D_1O = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

3) H - точка пересечения медиан; биссектрис в равностороннем $\Delta AD_1C \Rightarrow \frac{D_1H}{HO} = \frac{2}{1} \Rightarrow OH = \frac{1}{3}OD_1 = \frac{\sqrt{6}}{6}$

4) $BO = \frac{1}{2}BD = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (диагональ в квадрате

5) ΔBOH: $\angle H 90^\circ$ $OB = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $OH = \frac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow$
$\Rightarrow BH = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

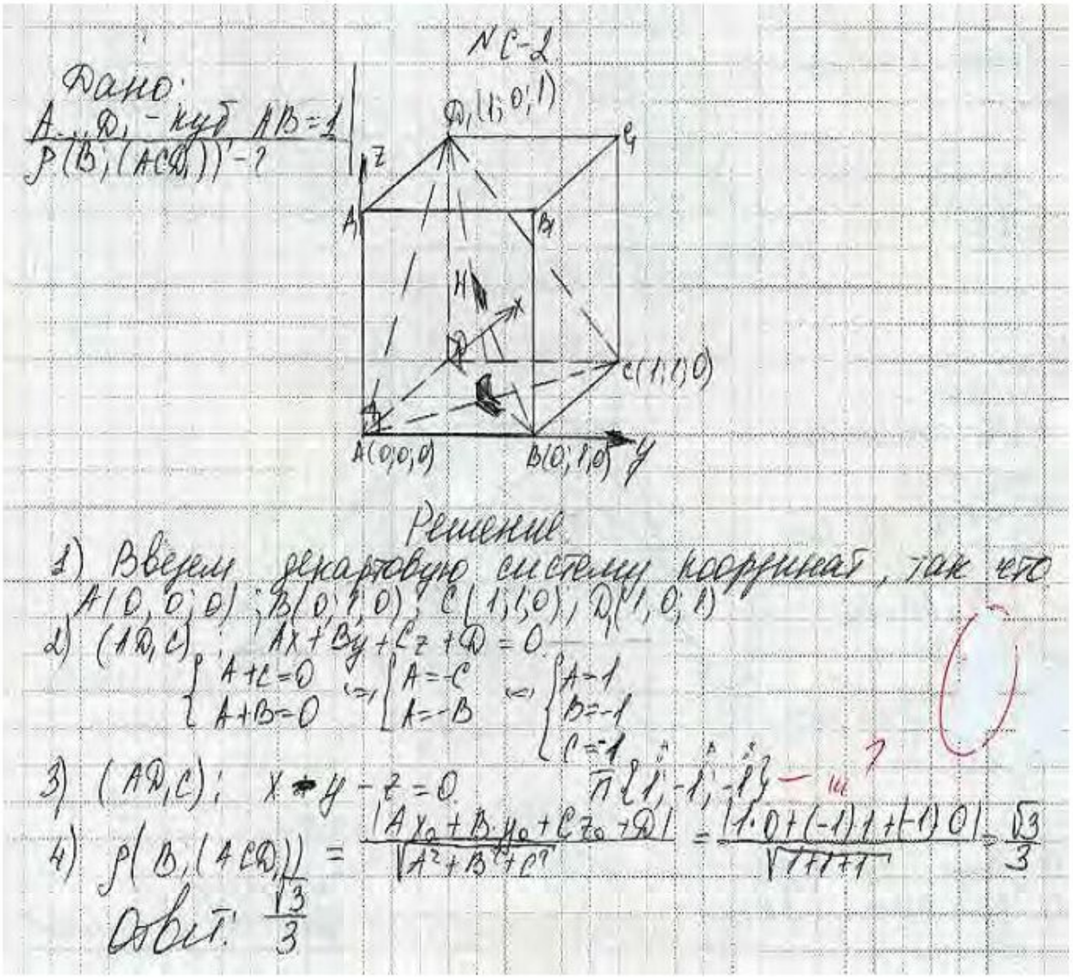
Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Комментарий. Ответ верен. Тем не менее, автор, скорее всего, не имел правильного геометрического представления о происходящем. На самом деле, основание перпендикуляра попадает не на сторону D_1O, а на ее продолжение. В тексте имеется явно неверное утверждение. А именно, если «H – точка пересечения медиан…..», то неверно, что $BH \perp AD_1C$.

Оценка эксперта: 0 баллов

Примеры оценивания выполнения заданий С2

Пример 2.
Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. Найдите расстояние от вершины B до плоскости ACD_1.



№ С-2

Дано:
$A \ldots D_1$ – куб $AB=1$
$\rho(B,(ACD_1))$ – ?

Решение

1) Введем декартовую систему координат, так что $A(0;0;0)$; $B(0;1;0)$; $C(1;1;0)$; $D_1(1;0;1)$

2) (AD_1C): $Ax+By+Cz+D=0$

$\begin{cases} A+C=0 \\ A+B=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-C \\ A=-B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=-1 \end{cases}$

3) (AD_1C): $x-y-z=0$ $\quad \vec{n}\{1;-1;-1\}$ – ?

4) $\rho(B,(ACD_1)) = \dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \dfrac{|1\cdot 0+(-1)\cdot 1+(-1)\cdot 0|}{\sqrt{1+1+1}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

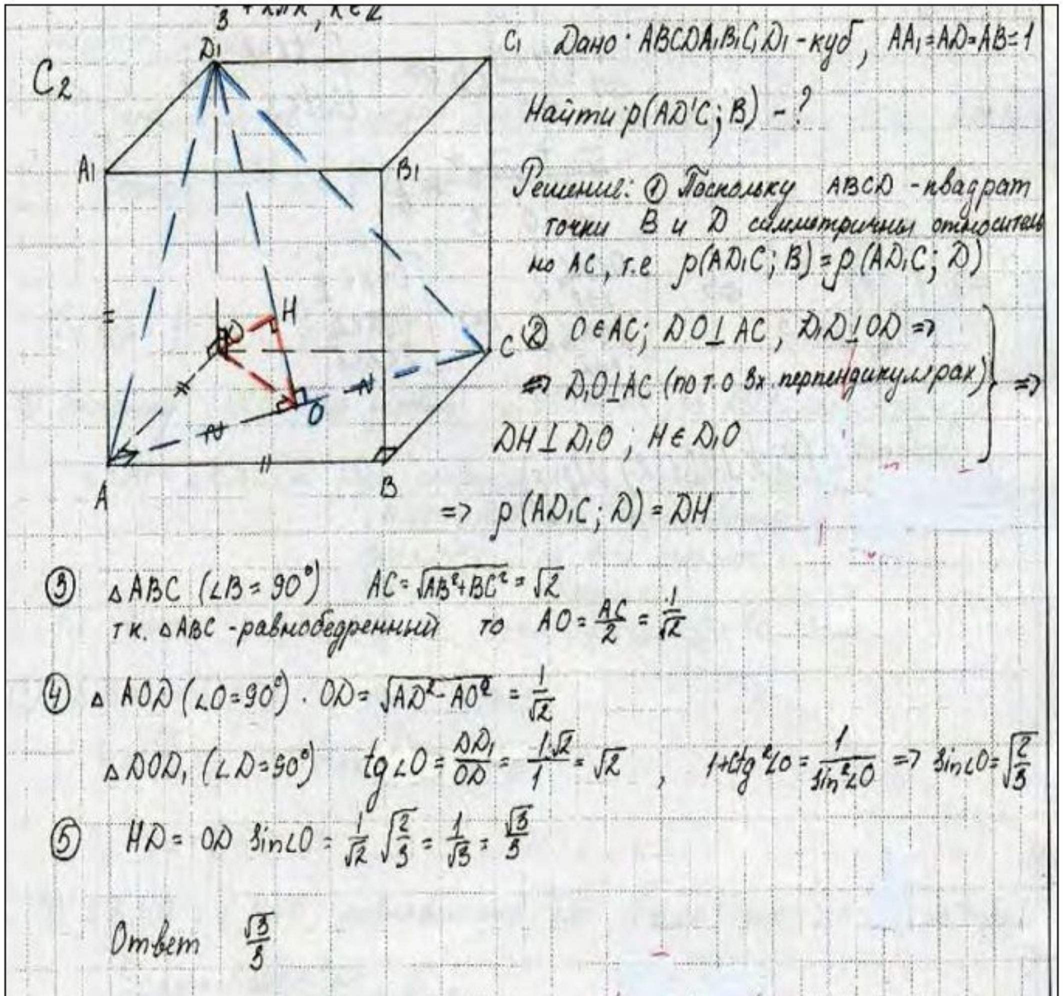
Комментарий. Рисунок неверный (указанный перпендикуляр к плоскости ACD на самом деле ей не перпендикулярен). Но в тексте решения отсутствуют неверные утверждения, а ссылок на неверный рисунок нет.

Оценка эксперта: 2 балла

Примеры оценивания выполнения заданий С2

Пример 3.

Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. Найдите расстояние от вершины B до плоскости ACD_1.



C2

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - куб, $AA_1 = AD = AB = 1$

Найти: $\rho(AD'C; B)$ - ?

Решение: ① Поскольку ABCD - квадрат точки B и D симметричны относительно AC, т.е. $\rho(AD_1C; B) = \rho(AD_1C; D)$

② $O \in AC$; $DO \perp AC$, $D_1D \perp OD \Rightarrow$
$\Rightarrow D_1O \perp AC$ (по т. о 3х перпендикулярах) $\Rightarrow$
$DH \perp D_1O$; $H \in D_1O$

$\Rightarrow \rho(AD_1C; D) = DH$

③ $\triangle ABC$ $(\angle B = 90°)$ $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2}$
т.к. $\triangle ABC$ - равнобедренный то $AO = \frac{AC}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

④ $\triangle AOD$ $(\angle O = 90°)$. $OD = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\triangle DOD_1$ $(\angle D = 90°)$ $tg\angle O = \frac{DD_1}{OD} = \frac{1/\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$, $1 + ctg^2\angle O = \frac{1}{sin^2\angle O} \Rightarrow sin\angle O = \sqrt{\frac{2}{3}}$

⑤ $HD = OD\ sin\angle O = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Ответ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

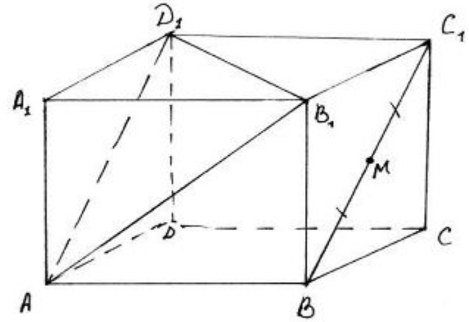
Комментарий. Странно, что автор всюду пишет не про расстояние от точки до плоскости, а про расстояние от плоскости до точки, но в остальном все верно.

Оценка эксперта: 2 балла

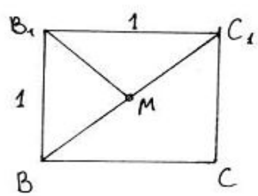
Примеры оценивания выполнения заданий С2

Пример 4.
Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Длина ребра куба равна 1. Найдите расстояние от середины отрезка BC_1 до плоскости AB_1D_1.

С2



$MB_1 \perp AB_1D_1$. Значит, MB_1 — искомое расстояние



$\triangle B_1MC_1 = \triangle B_1MB \Rightarrow$

$BM = MC_1 \Rightarrow B_1M = \frac{1}{2} BC_1$

$BC_1 = \sqrt{BC^2 + CC_1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$B_1M = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Комментарий. Утверждение $MB_1 \perp AB_1D_1$ неверно: $\angle AB_1M$ – не прямой угол.
Подсчеты верны, но вычисляется не то, что нужно.

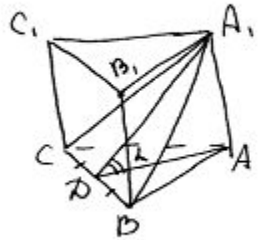
Оценка эксперта: 0 баллов

Примеры оценивания выполнения заданий С2

Пример 5.

Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью A_1BC и плоскостью основания призмы.

C2



Проведем $AD \perp BC$, $D \in BC$

$CD = DB = 1$

$A_1D = \sqrt{A_1B^2 - DB^2} = \sqrt{5-1} = 2$

$AA_1 = \sqrt{A_1B^2 - AB^2} = \sqrt{5-4} = 1$

$\sin\alpha = \frac{AA_1}{A_1D} = \frac{1}{2}$

$\alpha = \frac{\pi}{6}$

Комментарий. Типичный случай, когда нет «идеальной» проверки того, что

$\angle A_1DA$ - искомый линейный угол, но все построения и вычисления верны.

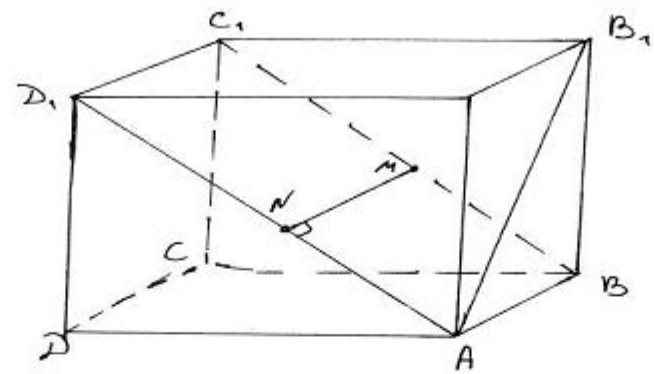
Оценка эксперта: 2 балла

Примеры оценивания выполнения заданий С2

Пример 6.

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Длина ребра куба равна 1. Найдите расстояние от середины отрезка BC_1 до плоскости AB_1D_1

С2



1) Искомое расстояние $= MN$,

где M – середина BC_1,

N – середина AD_1

но $MN \parallel AB$, $AD_1 \parallel BC_1 \Rightarrow$

$ABMN$ – квадрат и $MN = AB = 1$

Ответ. 1.

Комментарий. Неверно, что «искомое расстояние = MN».

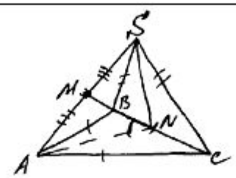
Оценка эксперта: 0 баллов

Примеры оценивания выполнения заданий С2

Пример 7.

Найти угол между прямой, проходящей через середины скрещивающихся ребер правильной треугольной пирамиды и плоскостью ее основания. *(Числовые данные – см. текст.)*

C2 Дано:



SABC – правильная тр-я пирамида

$AB = BC = AC = 20\sqrt{3}$

$SC = SB = SA = 29$

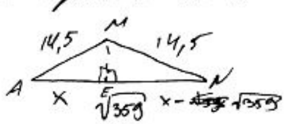
Найти: $\angle MNA = ?$

Решение:

Рассмотрим ΔANC: $AC = 20\sqrt{3}$; $NC = 14,5$; $AN = \sqrt{AC^2 - NC^2}$

$AN = \sqrt{1200 - 741} = \sqrt{359}$

Рассмотрим ΔAMN:



Проведём прямую SN, тогда:

ΔSNM – равнобедренный, тогда:

$MN = 14,5 = AM$, $\Rightarrow AE = \frac{AN}{2} = \frac{\sqrt{359}}{2} = EN \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{14,5}{\sin 90^\circ} = \frac{ME}{\sin \alpha}$

$MN^2 = EN^2 + ME^2$

$ME = \sqrt{210,25 - \frac{359}{2}} = \sqrt{30,75} \Rightarrow$

$\frac{14,5}{\sin 90^\circ} = \frac{\sqrt{30,75}}{\sin \alpha}$

$\sin \alpha = \frac{\sqrt{30,75}}{14,5}$

$\alpha = \arcsin \frac{\sqrt{30,75}}{14,5} + 2\pi n$

Ответ: $\arcsin \frac{\sqrt{30,75}}{14,5} + 2\pi n$

Комментарий. Прямо по критериям: «Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ…»

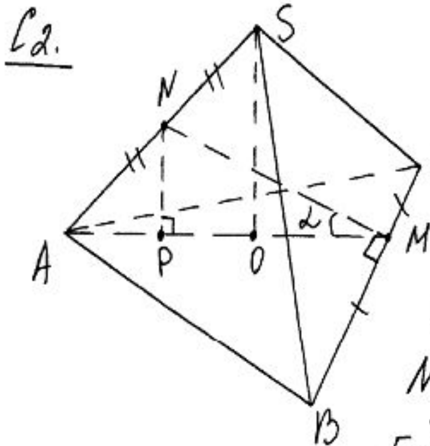
Оценка эксперта: 1 балл

Примеры оценивания выполнения заданий С2

Пример 8.

Найти угол между прямой, проходящей через середины скрещивающихся ребер правильной треугольной пирамиды и плоскостью ее основания. (Боковые ребра по 17, стороны основания по $15\sqrt{3}$.)

C2.



1.) $AM = AB\cdot\sin 60° = \frac{15\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} =$

$= \frac{15\cdot 3}{2} = 22,5$

2.) $OA = \frac{2}{3}AM = 15;\ OM = 7,5$

3.) $OS = \sqrt{17^2-15^2} = 8$

4.) $PO = AP = \frac{1}{2}OA = 7,5$

$NP = \frac{1}{2}OS = 4$

5.) $PM = 22,5 - 7,5 = 15$

6.) $tg\alpha = \frac{NP}{PM} = \frac{4}{15}$

$\alpha = arctg\frac{4}{15}$

Ответ: $arctg\frac{4}{15}$.

Комментарий. В целом – похоже на предыдущий пример. Но, в отличие от него, здесь вычисления логичны, выбран разумный способ подсчета и, самое главное, вычисления не содержат ошибок.

Оценка эксперта: 2 балла

Задания с развернутым ответом С4. Критерии проверки и оценки решений

В планиметрических заданиях С4 по сравнению с ЕГЭ-2010 – 2013 имеется важное структурное изменение. Пункт а) требует доказательства, пункт б) - нахождения геометрической величины.

По фактическим данным выполнения, задание С4 является границей, разделяющий высокий и повышенный уровень подготовки участников ЕГЭ.

Как и во всякой сложной геометрической задаче весьма деликатным является вопрос о степени и характере обоснованности построений и утверждений. Позиция разработчиков КИМ ЕГЭ–2012 состоит в том, что в задании С4 невозможно от выпускников школ на ЕГЭ требовать изложения, приближающегося к стилю учебников и методических статей. Достаточным является наличие ясного понимания геометрических конфигураций искомых объектов, верного описания (предъявления) этих конфигураций и грамотно проведенных рассуждений и вычислений.

Обратим также внимание на то, что часто при решении геометрических задач школьники ссылаются на весьма невразумительный чертёж, а иногда чертёж вообще отсутствует (если рисунок сделан на бланке карандашом, то эта область не сканируется). Снижать оценку только за это не рекомендуется.

Критерии оценивания выполнения заданий С4

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б), возможно с использованием утверждения а), при этом пункт а) не выполнен	2
Имеется верное доказательство утверждения а), пункт б) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Приведем примеры заданий, разработанных под новые критерии

Задача 1 (демоверсия).
Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.
а) Докажите, что треугольники AKB и DKC имеют равные площади (равновелики).
б) Найдите площадь треугольника AKB, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

Решение. 1 способ. а) Обозначим радиусы окружностей r_1 и r_2, а центры – O_1 и O_2 соответственно. Равнобедренные треугольники AO_1K и CO_2K подобны, поскольку углы при основании у них равны. Аналогично, подобны треугольники DKO_1 и BKO_2. При этом $KA = \frac{r_1}{r_2}KC$ и $KB = \frac{r_2}{r_1}KD$. Следовательно,

$$S_{AKB} = \frac{1}{2}KA \cdot KB \cdot \sin\angle AKB = \frac{1}{2} \cdot \frac{r_1}{r_2}KC \cdot \frac{r_2}{r_1}KD \cdot \sin\angle CKD =$$

$$= \frac{1}{2}KC \cdot KD \cdot \sin\angle CKD = S_{CKD}.$$

б) Для определенности будем считать, что $r_1 = 4$, а $r_2 = 1$. Углы BO_2O_1 и DO_1O_2 равны, следовательно, $BO_2 \parallel DO_1$. Значит, O_1D – продолжение AO_1, и O_1 – середина DA. Поэтому площади треугольников DKO_1 и AKO_1 равны. Пусть $S_{BKO_2} = S$. Тогда

$$S_{AKO_1} = S_{DKO_1} = 16S_{BKO_2} = 16S \quad \text{и} \quad S_{AKB} = \frac{1}{4}S_{AKD} = \frac{1}{2}S_{AKO_1} = 8S.$$

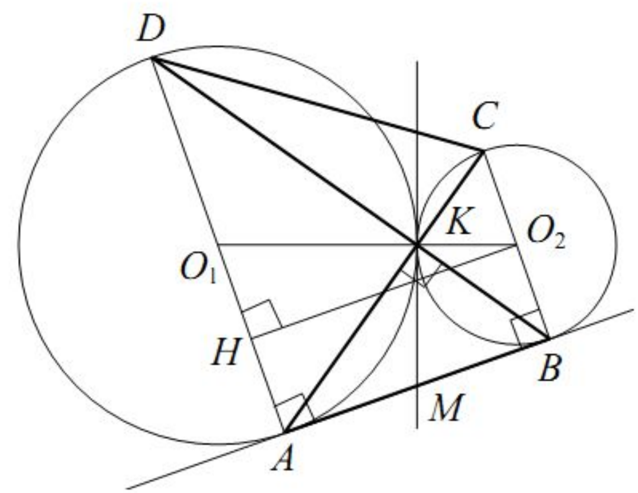
Значит, площадь трапеции ABO_2O_1 равна $25S$. Вычислим эту площадь. Проведём высоту трапеции O_2H и найдём её из треугольника

O_2HO_1: $O_2H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1H^2} = 4$.

Тогда

$$S_{ABO_2O_1} = \frac{AO_1 + BO_1}{2} \cdot O_2H = 10.$$

Следовательно, $25S = 10$, откуда $S = 0,4$ и $S_{AKB} = 8S = 3,2$.



2 способ. а) Обозначим центры окружностей O_1 и O_2 соответственно. Пусть общая касательная, проведенная к окружностям в точке K, пересекает AB в точке M. По свойству касательных, проведённых из одной точки, $MA = MK = MB$. Треугольники AMK и BMK равнобедренные. Тогда $\angle AKB = \angle KAM + \angle KBM$. Кроме того, $\angle AKB = 180° - \angle KAM - \angle KBM$. Следовательно, $2 \cdot \angle AKB = 180°$. Это означает, что $\angle AKB = 90°$, то есть $AC \perp BD$.

Вписанный угол AKD прямой, поэтому он опирается на диаметр, то есть прямая AD проходит через O_1. Значит, $AD \perp AB$. Аналогично получаем, что $BC \perp AB$. Значит, $AD \parallel BC$.

Треугольники BCD и BCA имеют общую сторону BC и их высоты, проведенные к общей стороне BC, равны друг другу и равны AB. Следовательно, $S_{BCD} = S_{BCA}$ равны. Вычитая из каждой из этих площадей площадь треугольника CKB, получаем, что $S_{CKD} = S_{AKB}$.

б) Пусть, для определенности, первая окружность имеет радиус 4, а радиус второй равен 1. Треугольники BKC и AKD подобны, и $\dfrac{AD}{BC} = 4$.

Пусть $S_{BKC} = S$. Тогда $S_{AKD} = 16S$, и $S_{AKB} = S_{CKD} = 4S$. Поэтому площадь трапеции $ABCD$ равна $25S$. Вычислим эту площадь. Проведем к AD перпендикуляр O_2H, равный высоте трапеции, и найдем его из прямоугольного треугольника O_2HO_1:

$$O_2H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1H^2} = 4.$$

Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot AB = 20.$$

Следовательно, $25S = 20$, откуда $S = 0{,}8$ и $S_{AKB} = 4S = 3{,}2$.

Ответ: 3,2.

Задача 2. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Известно, что $AC = 3MB$.

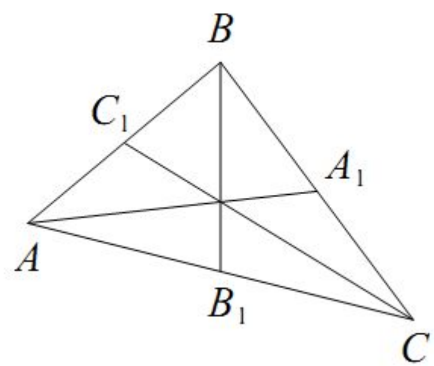
а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1, если известно, что $AC = 10$.

а) **Доказательство**. Известно, что медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении $2:1$, считая от вершины. Значит,

$$BB_1 = \frac{3}{2}BM = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}AC = \frac{1}{2}AC.$$

Поэтому треугольники AB_1B и CB_1B равнобедренные, причем $\angle B_1AB = \angle ABB_1$ и $\angle B_1CB = \angle CBB_1$. Сумма всех этих четырех углов равна $180°$. Тогда $\angle ABC = \angle ABB_1 + \angle CBB_1 = 90°$. Отсюда следует, что треугольник ABC прямоугольный.



б) Треугольник A_1BA прямоугольный. Поэтому

$$AA_1^2 = A_1B^2 + BA^2 = \frac{1}{4}CB^2 + BA^2.$$

Аналогично из прямоугольного треугольника C_1BC находим: $CC_1^2 = C_1B^2 + BC^2 = \frac{1}{4}AB^2 + BC^2$.

Сложим полученные равенства:

$$AA_1^2 + CC_1^2 = \frac{5}{4}AB^2 + \frac{5}{4}BC^2 = \frac{5}{4}\left(AB^2 + BC^2\right) = \frac{5}{4}AC^2 = 125$$

Ответ: 125.

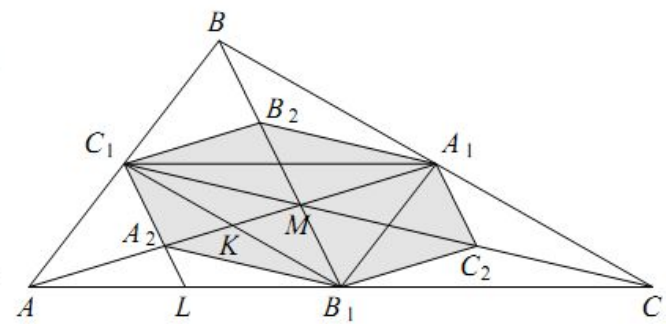
Задача 3. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Точки A_2, B_2 и C_2 – середины отрезков MA, MB и MC соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC.

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 5$, $BC = 8$ и $AC = 10$.

а) **Доказательство**. Обозначим площадь треугольника ABC через S; нужно доказать, что площадь шестиугольника равна $S/2$. Из рисунка видно, что она равна $S(A_1B_1C_1)+S(B_1C_1A_2)+(A_1C_1B_2)+S(A_1B_1C_2)$. Поскольку треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом $1/2$, его площадь равна $\frac{1}{4}S$.

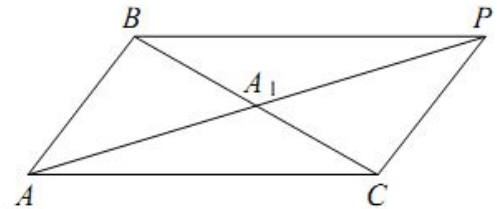
Докажем, что точка A_2 — точка пересечения медиан треугольника AB_1C_1. Обозначим через K точку пересечения медианы AA_1 и средней линии B_1C_1. Медиана и средняя линия делят друг друга пополам (это диагонали параллелограмма $AB_1A_1C_1$), поэтому $AK=\frac{1}{2}AA_1$, а AK — медиана треугольника AB_1C_1. Далее, $AA_1:AK=\frac{1}{2}AM:\frac{1}{2}AA_1=AM:AA_1=2:3$, то есть точка A_2 делит медиану AK треугольника AB_1C_1 в отношении $2:1$. Значит, это действительно точка пересечения медиан треугольника AB_1C_1.



Легко видеть, что площадь треугольника $B_1C_1A_2$ равна трети площади треугольника AB_1C_1, то есть равна $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}S=\frac{S}{12}$. Точно так же площади треугольников $A_1C_1B_2$ и $A_1B_1C_2$ равны $\frac{S}{12}$. Отсюда площадь шестиугольника

$A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ равна $\frac{1}{4}S+3\cdot\frac{1}{12}S=\frac{1}{2}S$, ч.т.д.

б) Обозначим длины сторон BC, AC, AB треугольника ABC через a, b, c.



Докажем, что квадрат медианы AA_1 равен $\frac{1}{4}\left(2b^2+2c^2-a^2\right)$. Для доказательства на продолжении отрезка AA_1 за точку A_1 отложим отрезок $A_1P=AA_1$. Получим параллелограмм $ACPB$ со сторонами $AC=PB=b$ и $AB=CP=c$ и диагоналями $BC=a$ и $AP=2AA_1$. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон:

$2b^2+2c^2=a^2+4AA_1^2$, откуда $AA_1^2=\frac{1}{4}\left(2b^2+2c^2-a^2\right)$. Аналогично доказывается, что

$BB_1^2=\frac{1}{4}\left(2a^2+2c^2-b^2\right)$, а $CC_1^2=\frac{1}{4}\left(2a^2+2b^2-c^2\right)$.

Обозначим через L середину отрезка AB_1. Поскольку A_2 — точка пересечения медиан треугольника AB_1C_1, она лежит на отрезке C_2L и делит его в отношении $2:1$, считая от точки C_1. Значит, $C_1A_2 = \frac{2}{3}C_1L$. Но треугольники AB_1C_1 и ABC подобны с коэфиициентом $1/2$, поэтому $C_1L = \frac{1}{2}BB_1$, и $C_1A_2 = \frac{1}{3}BB_1$. Повторяя те же рассуждения для треугольника A_1B_1C, получаем, что и отрезок A_1C_2 равен $\frac{1}{3}BB_1$. Рассуждая аналогично, мы получим, что стороны шестиугольника втрое меньше медиан треугольника ABC: $B_2C_1 = B_1C_2 = \frac{1}{3}AA_1$, $A_2B_1 = A_1B_2 = \frac{1}{3}CC_1$. Следовательно, сумма квадратов сторон шестиугольника равна

$$2\cdot\left(B_1C_2^2 + A_1C_2^2 + A_1B_2^2\right) = \frac{2}{9}\left(AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2\right) =$$

$$= \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2\right) =$$

$$\frac{1}{18}\cdot 3\cdot\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = \frac{1}{6}\cdot\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

Подставляя в эту формулу длины сторон треугольника ABC, получаем ответ: сумма квадратов сторон шестиугольника равна $\frac{63}{2}$.

Ответ: $\frac{63}{2}$.

Примеры оценивания выполнения заданий С4

Пример 1.

Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Точки A_2, B_2 и C_2 – середины отрезков MA, MB и MC соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC.

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 4$, $BC = 7$ и $AC = 8$.

Решение:

а) $AA_2 = A_2M$, поэтому $S_{AMB_1} = 2S_{A_2MB_1}$. Складывая это равенство с аналогичными, получим $S_{ABC} = 2S_{A_1C_2B_1A_2C_1B_2}$ ч.т.д.

б) $A_1B_2^2 + B_2C_1^2 + C_1A_2^2 + A_2B_1^2 + B_1C_2^2 + C_2A_1^2 = \frac{2}{9}(AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2) = \frac{1}{6}(AB^2 + BC^2 + AC^2)$ (по формуле медианы) $= 21{,}5$

Ответ: 21,5

Комментарий. Решение лаконичное, но полное и верное. Трудность состоит в отсутствии рисунка. В таком случае при необходимости эксперт, проверяющий работу, должен выполнить рисунок самостоятельно.

Оценка эксперта: 3 балла

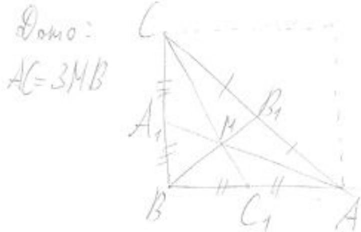
Примеры оценивания выполнения заданий С4

Пример 2. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Известно, что $AC = 3MB$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1, если известно, что $AC = 10$.

Дано:
$AC = 3MB$



Док-ть:
а) △ABC – прямоугольный

а) Док-во:

1) По теореме медианы делят друг друга в отношении 1:2

$\Downarrow$

$MB : MB_1 = 2:1$

$\Downarrow$

$BB_1 = \frac{3}{2} BM$

$\Downarrow$

$CA = 3BM = 2BB_1$

~~2) Т.к. CA = 2BB₁, то △ABC прямоуг... если достроить~~

2) Т.к. $BB_1 = \frac{1}{2} AC$ и BB_1 пересекает AC в середине $AC \Longrightarrow$ △ABC – прямоугольный. Т.к. если достроить такой же треугольник симметрично относительно CA, то получится четырёх-угольник с равными и делящими себя пополам диагоналями, а значит это прямоугольник!

Комментарий. Имеется верное доказательство в пункте а). Автор решения даёт, хоть и не очень аккуратное, но верное доказательство того, что угол B прямой. Решение пункта б) отсутствует.

Оценка эксперта: 1 балл

Спасибо за внимание!