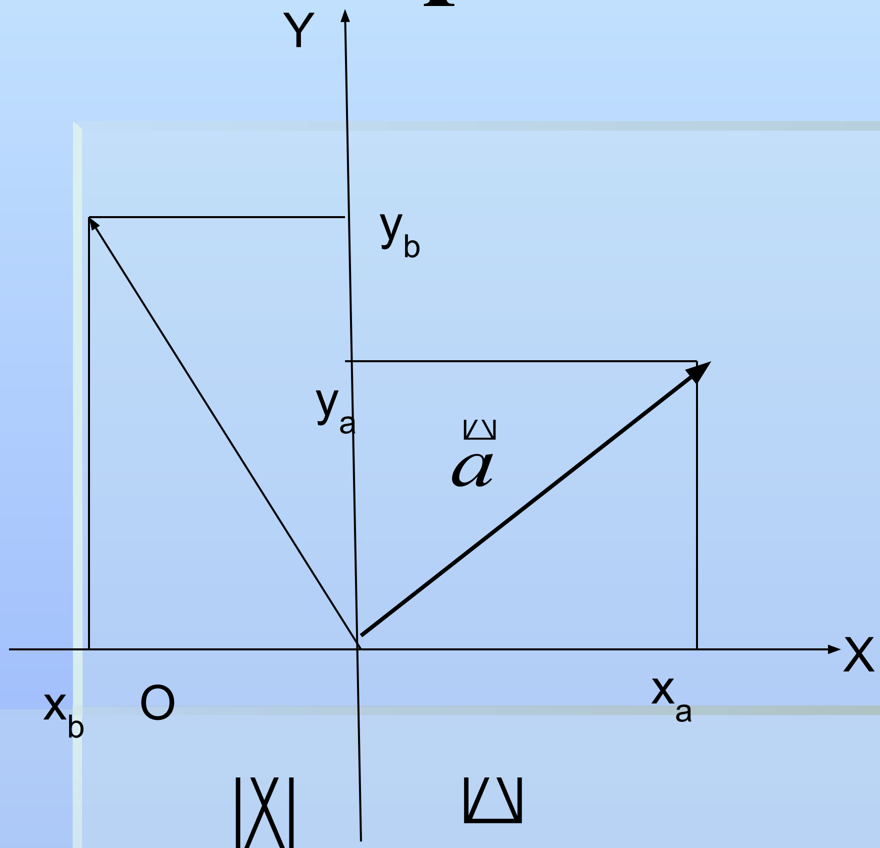
Векторларның скаляр тапкырчыгышы

Вектор – юнәлешле кисемтә



$$\vec{a}(x_a, y_a)$$

$$\vec{b}(x_b, y_b)$$

$\vec{a}$ и $\vec{b}$

- $A(x_A, y_A)$ ноктасында башлангычы булган һәм $B(x_B, y_B)$ ноктасында ахыры булган векторның координатасы:

$$\overrightarrow{AB} = \left(x_B - x_A, y_B - y_A\right)$$

- $a(x, y)$ векторының озынлыгы:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- $\mathbf{a}(x_A, y_A)$ и $\mathbf{b}(x_B, y_B)$ векторларының координаталары суммасы :

$$\vec{a} + \vec{b} = \left(x_B + x_A, y_B + y_A\right)$$

- $\mathbf{a}(x, y)$ векторын λ санына тапкырлау:

$$\lambda \cdot \vec{a} = \left(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y\right)$$

Диктант

Даны точки **A(2; -3), B(-1; 2), C(0; -4)**

1. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} = (-3, 5)$$

2. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{BC} = (1, -6)$$

3. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{34}$$

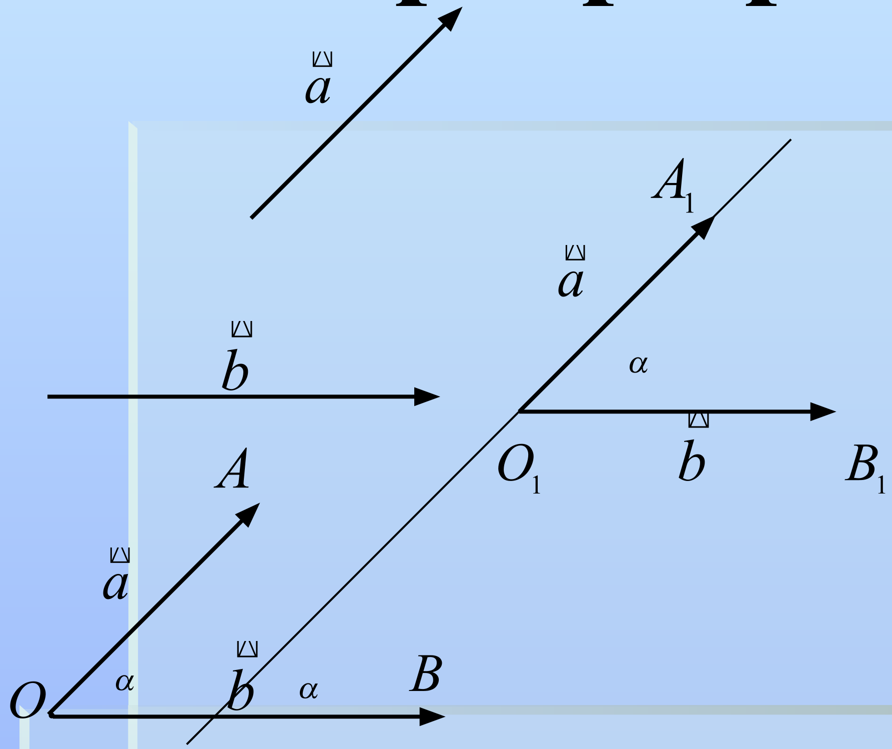
4. Найдите длину вектора $\overrightarrow{BC}$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{1^2 + (-6)^2} = \sqrt{37}$$

5. Произведение $5 \cdot \overrightarrow{AB}$:

$$5 \cdot \overrightarrow{AB} = (-15, 25)$$

Векторлар арасындагы почмак



$\vec a$ *и* $\vec b$

$O;\ \vec{OA} = \vec a;\ \vec{OB} = \vec b$

$\angle AOB = \alpha$

α – *Угол между векторами* $\vec a$ *и* $\vec b$

$\widehat{\vec a; \vec b} = \alpha$

Если $\vec a \uparrow\uparrow \vec b;\ \vec a = \vec 0$ *или* $\vec b = \vec 0;\ \vec a = \vec 0, \vec b = \vec 0$

то $\alpha = 0^0$

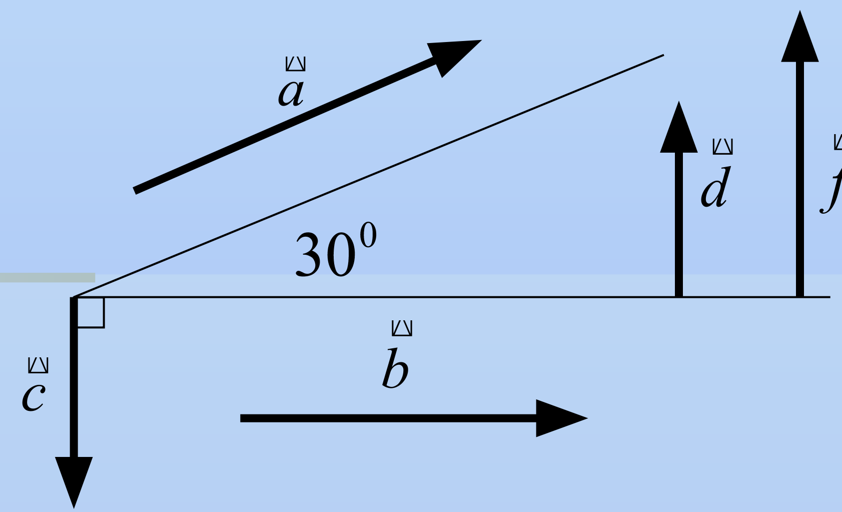
$0^0 \le \alpha \le 180^0$

Пример

$$\widehat{\vec{a};\vec{b}} = 30^0; \quad \widehat{\vec{a};\vec{c}} = 120^0$$

$$\vec{b};\vec{c} = 90^0; \quad \vec{d};\vec{f} = 0^0 \quad \vec{d};\vec{c} = 180^0$$

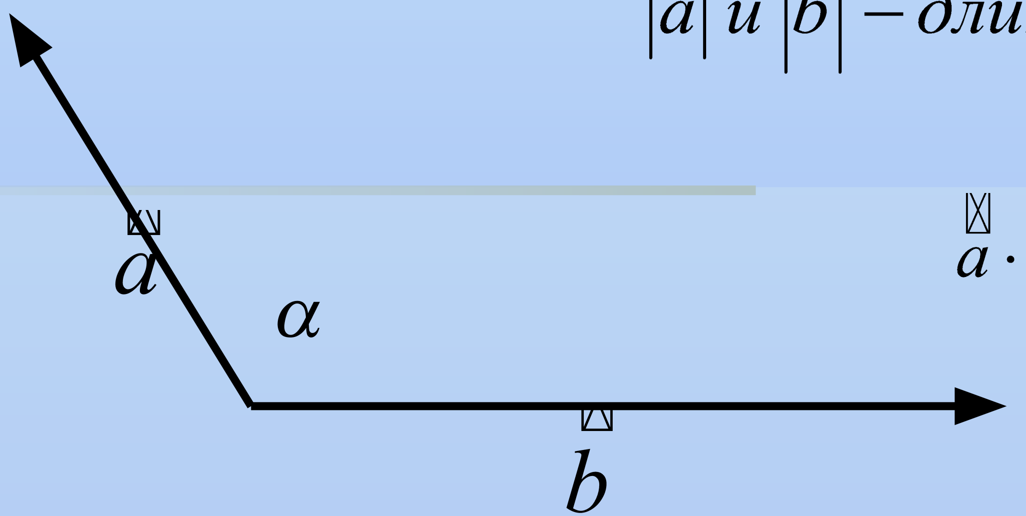
$$\vec{a} \perp \vec{b}, \ \text{если}\ \alpha = 90^0$$



Ике векторның скаляр тапкырчыгышы дип аларның озынлыклары белән алар арасындагы почмак косинусына тапкырчыгышы атала

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ – *скалярное произведение _ векторов*

$|\vec{a}|$ *и* $|\vec{b}|$ – *длины векторов*

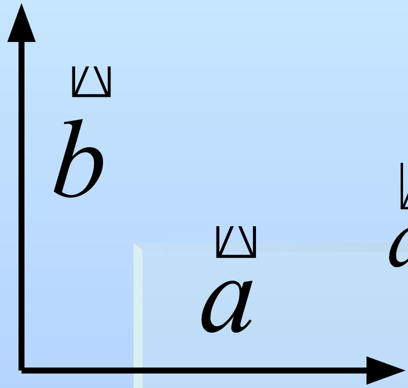


$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\alpha)$$

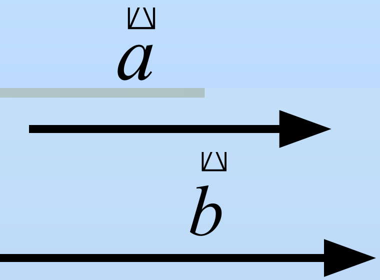
Примеры:

1. $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\alpha = 60^0$ $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 \cdot \cos(60^0) = 3$
2. $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 1$, $\alpha = 30^0$ $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot 1 \cdot \cos(30^0) = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{2}$
3. $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 4$, $\alpha = 45^0$ $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 7 \cdot 4 \cdot \cos(45^0) = 14 \cdot \sqrt{2}$
4. $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 1$, $\alpha = 120^0$ $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 \cdot \cos(120^0) = \frac{-1}{2}$
5. $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 5$, $\alpha = 90^0$ $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 7 \cdot 5 \cdot \cos(90^0) = 0$

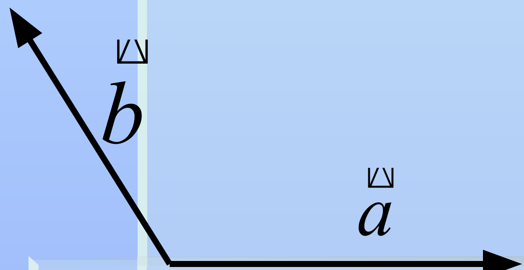
Скаляр тапкырчыгышның үзлекләре:



$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$$

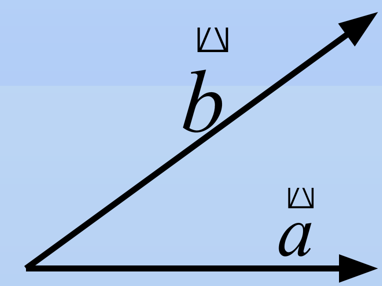


$$\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b} \quad \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 0^{0} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$$

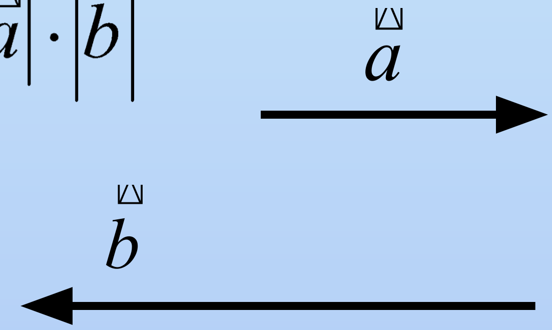


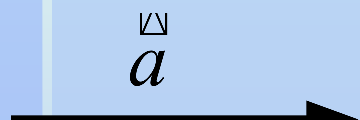
$$\overline{(\vec{a},\vec{b})} > 90^{0} \Longrightarrow \overline{\vec{a}\cdot\vec{b}<0}$$

$$\overline{(\vec{a},\vec{b})} < 90^{0} \Longrightarrow \overline{\vec{a}\cdot\vec{b}>0}$$



$$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b} \qquad \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 180^0 = -|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$$



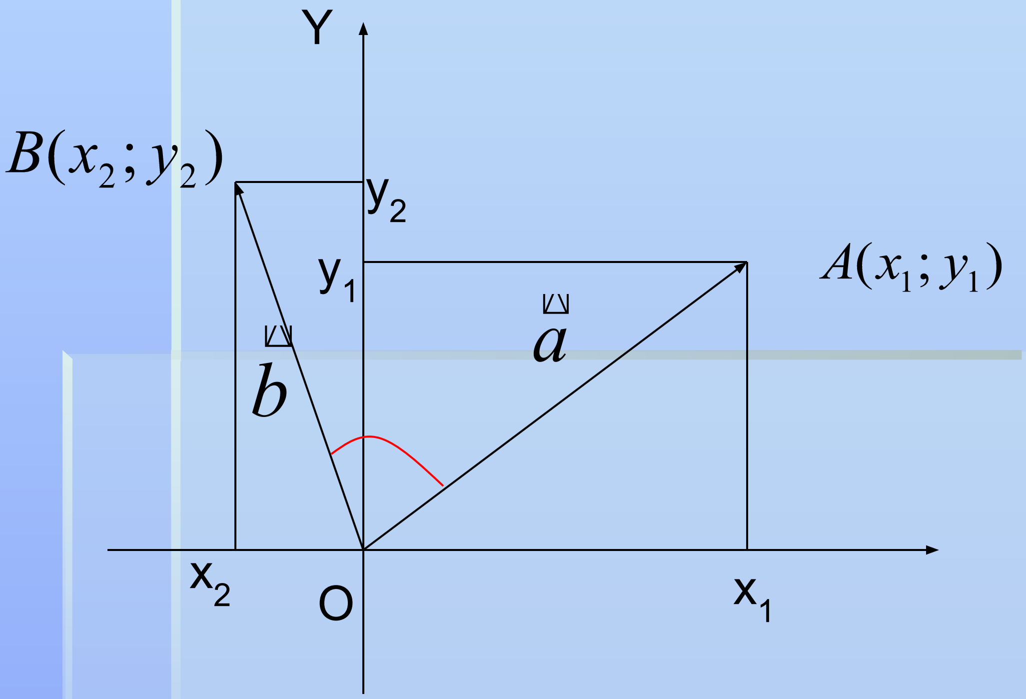


$\vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{a}^2$ – *скалярный квадрат вектора*

$$\vec{a}^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0^0 = |\vec{a}|^2$$

Скалярным произведением векторов $\vec{a}(x_1, y_1)$ **и** $\vec{b}(x_2, y_2)$ **называется** <u>**число**</u>

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$



Примеры: скалярное произведение векторов

1. $\vec{a}(5,-4)$ и $\vec{b}(2,1)$ $\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 5\cdot 2 + (-4)\cdot 1 = 6$
2. $\vec{a}(0,3)$ и $\vec{b}(7,-1)$ $\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 0\cdot 7 + 3\cdot(-1) = 4$
3. $\vec{a}(5,2)$ и $\vec{b}(4,-1)$ $\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 5\cdot 4 + 2\cdot(-1) = 18$

Вычислите скалярное произведение векторов:

1. a(1,1); b(1,2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot 1 + 1\cdot 2 = 3$
2. a(-2,5); b(-9,-2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = -2\cdot(-9) + 5\cdot(-2) = 8$
3. a(-3,4); b(4,5) $\vec{a}\cdot\vec{b} = -3\cdot 4 + 4\cdot 5 = 8$
4. a(5,2); b(-9,4) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 5\cdot(-9) + 2\cdot 4 = -37$
5. a(-1,1); b(1,1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = -1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 0$

Следствия

$$\text{Следствие 1: } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ и } \vec{b} \neq \vec{0}, \text{ то } \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$$

$$\text{Следствие 2: } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos\alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Пример. Даны **2** вектора: $\vec{a}(1,3)$ $\vec{b}(5,2)$

1. Вычислите скалярное произведение векторов: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot 5 + 3\cdot 2 = 11$
2. Вычислите длину вектора *a:* $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$
3. Вычислите длину вектора *b:* $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$
4. Вычислите косинус угла между векторами: $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{11}{\left(\sqrt{10}\cdot\sqrt{29}\right)} = \frac{11}{\sqrt{290}}$
5. Сделайте вывод: тупой, прямой или острый угол мы получили

$\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) > 0 \Rightarrow$ угол острый

Вычисление угла между векторами с координатами: $a\ (a_1, a_2), b\ (b_1, b_2)$

1. Вычислить скалярное произведение векторов: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$
2. Вычислить длину вектора *a:* $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}$
3. Вычислить длину вектора *b:* $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{(b_1)^2 + (b_2)^2}$
4. Найти произведение длин векторов: $\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|$
5. Разделить скалярное произведение векторов на произведение их длин: $\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)}{\left(\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|\right)}$

Домашнее задание:

- §§101 – 103,
- вопросы №№ 13 - 18,
- задачи №№ 1044 (в), 1047 (в), 1048 (для углов В и С), 1066.

Спасибо за внимание