# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

**Определение**: Дифференциальным уравнением (n)-ого порядка называется функция, связывающ независимую переменную x, функцию y, и её производные до (n)-ого порядка включительно.

**Определение:** Наивысший порядок производной, входящий в уравнение называется порядком уравнения.

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

**Определение**: Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение .

$$F(x; y; y') = 0$$

# УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$F(x; y; y') = 0$$

Его можно переписать в виде $y' = f(x, y)$, и т.к.

$y' = \dfrac{dy}{dx}$ , то уравнение примет вид:

$$dy = f(x, y)dx.$$

**Определение**: Дифференциальное уравнение называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными, если его можно представить в виде :

$$M(x,y)dy + N(x,y)dx = 0$$

Причем,

$$M(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$$

$$N(x,y) = X_1(x) \cdot Y_1(y)$$

# МЕТОД РЕШЕНИЯ ДУ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ:

$$X(x)\cdot Y(y)dy + X_1(x)\cdot Y_1(y)dx = 0$$

| :X(x)≠0
| :Y(y)≠0

$$\frac{Y(y)}{Y_1(y)}dy + \frac{X_1(x)}{X(x)}dx = 0$$

Интегрируем обе части по x: y=y(x)

$$\int \frac{Y(y)}{Y_1(y)}\,dy + \int \frac{X_1(x)}{X(x)}\,dx = 0$$

Далее необходимо вычислить интегралы, явно выразить функцию **y**.
Полученное решение является ***<u>общим решением уравнения.</u>***

***Пример***. Решить уравнение $y' = \frac{2y}{x}$

Уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Разделим переменные:

$$\frac{dy}{y} = \frac{2}{x}dx$$

Интегрируя обе части полученного уравнения, имеем

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2}{x}dx$$ или $$\ln|y| = 2\ln|x| + c_1,$$

где $c_1$ - постоянная интегрирования.

Для удобства потенцирования запишем $c_1 = \ln c$, и выразив у через независимую переменную х и произвольную постоянную с, получим решение дифференциального уравнения $\boldsymbol{y = cx^2}$

При решении дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными *возможна потеря решений при разделении переменных*.

В данном случае, предполагалось, что $y \neq 0$, т.е. функцию $y = 0$ исключили из рассмотрения.

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что $y = 0$ является решением данного уравнения.

Это решение может быть получено из множества решений $y = cx^2$ при $c$=0.

Поэтому в данном случае потери решений не произошло.

**Задание.**

1. Найти частное решение ДУ при следующем начальном условии.

$$xy' + y = 0, y(1) = 2.$$

$$yy' + x = 0, y(2) = 4.$$

$$xy' - y = 0, y(1) = 1.$$

**2**. Найти общее решение следующих ДУ.

$$x^2y' + y = 0.$$

$$x + xy + y'(y + xy) = 0.$$

$$(1 + y^2)dx = (1 + x^2)dy.$$