

Теоремы Чебы и Менелая и их применение при решении задач

ΠΡΟΣΕΧΕΟΥΡΑ
ΚΑΙ ΑΚΟΥΕΤΟΥ
ΠΡΟΣΔΟΚΕΙΣΘΩ
ΚΑΚΑΤΑΒΗΤΩ
ΔΥΣΕΣΩΜΕΡΟΣ
ΚΟΣΙΝΦΙ
ΤΟΝΟΜΑ
ΤΕΜΕΓΑΛΩ
ΣΑΛΛΗΝΑΤ
ΙΓ ΑΡΑΙΟΔΟ
ΣΠΙΝΤΟΣΚΑ
ΑΙΟΣΚΥ ΑΝ
ΥΤΟΣΑΠΟ
ΕΑΣΚΟΛΑΡ
ΤΑ ΑΝ

Handwritten text in a cursive script, likely a historical manuscript or a transcription of a classical text, located in the bottom left corner of the page.

1710

GEOM

проект учащихся 9 класса

VESTIGARE GEOMETRIAE INTERVALLA LOCORVM EST,
QVAMQVE ALTA, LONGA, ET LATA RERVM CORPORA.

Теоремы Чебы и Менелая и их применение при решении задач

ΠΡΟΣΕΧΕΘΥΡΑ
ΚΑΙ ΑΚΟΥΕΤΟΥ
ΤΡΟΣΔΟΚΕΙΣΘΩ
ΚΑΚΑΤΑΒΗΤΗ
ΔΙΣΕΣΜΕΡΟΣΕ
ΚΟΣΕΝΙΦΙ
ΤΟΝΟΜΑ
ΤΕΜΕΓΑΚΩ
ΣΑΛΜΩΝΑΤ
ΙΤΑΔΑΙΑΙΟΔΟ
ΣΤΙΝΤΡΟΣΚΑ
ΠΙΟΣΚΥΛΟΣ
ΙΤΟΣΑΙΩ
ΕΑΣΚΟΛΑΙΑ
ΤΑ ΑΝ

Руководитель: учитель математики
КАЦЕВИЧ Алла Геннадьевна



Подготовили: Герчук Кристина



Handwritten text in a cursive script, likely a historical manuscript or a student's work related to the project.



Кириченко Анастасия

Теоремы Чева и Менелая и их применение при решении задач

ΠΡΟΣΕΧΕΘΥΡΑ
ΚΑΙ ΑΚΟΥΕΤΟΥ
ΠΡΟΣΔΟΚΕΙΣΘΩ
ΚΑΚΑΤΑΒΗΤΗ
ΔΥΣΕΣΜΕΡΟΣ
ΚΟΣΙΝΙΦΙ
ΤΟΝΟΜΑ
ΤΕ ΜΕΓΑΛΩ
ΣΑΛΗΘΝΑΤ
ΙΤ ΑΔΑΙΟΔΟ
ΣΤΙΝ ΤΟΣΚΑ
ΤΟΣΚΥ ΑΒ
ΤΟΣΑΤΟ
ΕΑΣΚΟΛΑΤ
ΤΑ ΑΝ

Цель проекта: изучить теоремы Чева и Менелая и рассмотреть применение этих теорем к решению геометрических задач.

Handwritten text in a cursive script, likely a historical manuscript or a student's notes, located in the bottom left corner of the slide.



GEOMETRIA

ДЖОВАННИ ЧЕВА



1648-1734 гг.

Итальянский математик. Родился в 1648 г. и умер в 1734 г. Главными предметами его занятий были геометрия и механика. Старался возродить греческую геометрию. Основной заслугой является построение учения о секущих, которое положило начало новой синтетической геометрии. Оно изложено в сочинении "О взаимопересекающихся прямых". В первой его части автор доказывает теорему Менелая и ряд сходных с нею теорем при помощи статического метода, основанного на свойствах центра тяжести системы точек. Теорема, названная его именем — это классическая теорема геометрии треугольника.

Handwritten text in a cursive script, likely a transcription of Ceva's work or a related manuscript.

Handwritten text in a cursive script, likely a transcription of Ceva's work or a related manuscript.

GEOMETRIAE INTERVALLA LOCORVM
QUAMQVE ALTA, LONGA, ET LATA RERVVM CORP

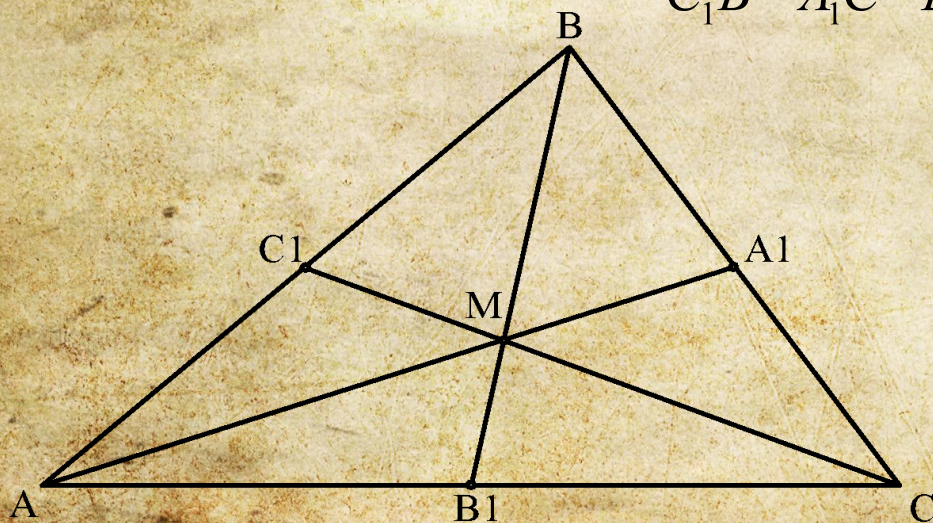
ДЖОВАННИ ЧЕВА



1648-1734 гг.

Теорема Чевы. Пусть A_1, B_1, C_1 – три точки, лежащие соответственно на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC или на их продолжениях. Для того, чтобы прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекались в одной точке или были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$



Handwritten text in a cursive script, likely a manuscript or letter, partially visible on the left side of the page.

Handwritten text in a cursive script, likely a manuscript or letter, partially visible on the right side of the page.

ДЖОВАННИ ЧЕВА

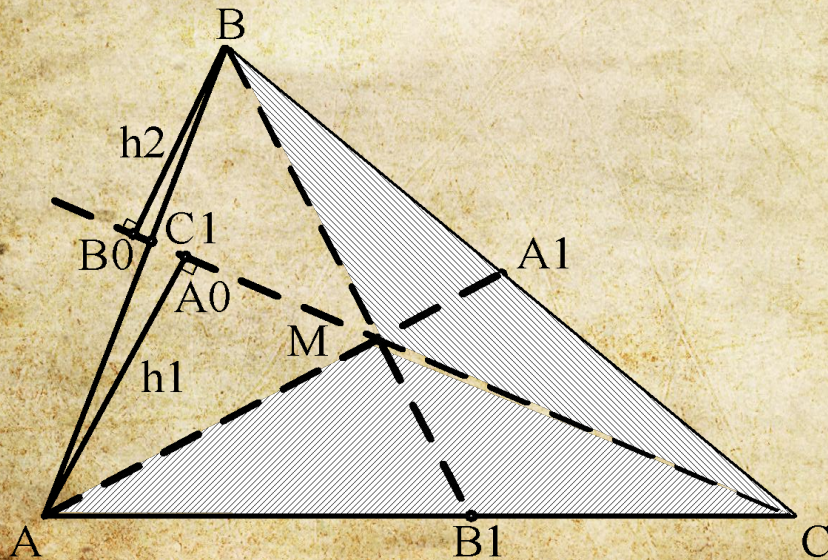


1648-1734 гг.

Handwritten text in Italian, likely a transcription of Ceva's work on the theorem.

Доказательство. Необходимость:

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{S_1}{S_2}; \quad \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{S_3}{S_1}; \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{S_2}{S_3}.$$



Handwritten text in Italian, likely a transcription of Ceva's work on the theorem.

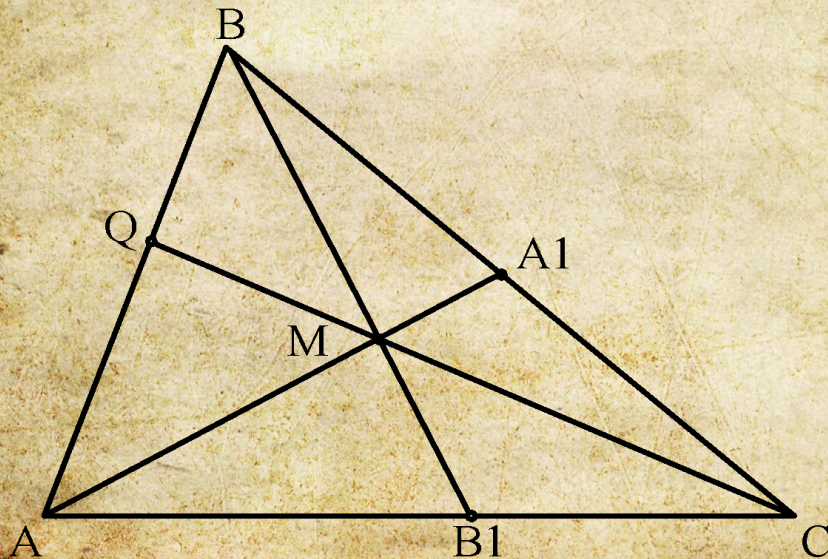
ДЖОВАННИ ЧЕВА



1648-1734 гг.

Доказательство. Достаточность:

$$\frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1; \quad \frac{AQ}{QB} = \frac{AC_1}{C_1B}; \quad Q = C_1.$$



Handwritten text in Italian script, likely a manuscript or letter related to Ceva's work.

Handwritten text in Italian script, likely a manuscript or letter related to Ceva's work.

МЕНЕЛАЙ АЛЕКСАНДРИЙСКИЙ



НЕТ ФОТО

Handwritten text in a cursive script, likely representing a fragment of an ancient manuscript or a list of works.

Математик и астроном. Время его жизни и деятельности определяется приведенными в "Альмагесте" Птолемея двумя астрономическими наблюдениями, которые Менелай Александрийский произвел в Риме в первом году царствования Траяна, т. е. в 98 г. после Рождества Христова. Менелаем были написаны два сочинения: "О вычислении хорд", в 6 книгах, и "Сферика", в 3 книгах. Главным предметом "Сферики" Менелая Александрийского служит сферическая тригонометрия. Из числа многих предложений, для нас впервые встречающихся в этом сочинении, самым замечательным считается обыкновенная теорема Менелая Александрийского, которая прежде называлась правилом шести количеств (*regula sex quantitatum*). Теорема Менелая красива и проста. В школьном курсе эта теорема затерялась где-то среди задач. Между тем она входит в золотой фонд древнегреческой математики.

GEOMETRIAE INTERVALLA LOCORVM
ALTA, LONGA, ET LATA RERVM CORP

Handwritten text in a cursive script, likely representing a fragment of an ancient manuscript or a list of works.

МЕНЕЛАЙ АЛЕКСАНДРИЙСКИЙ

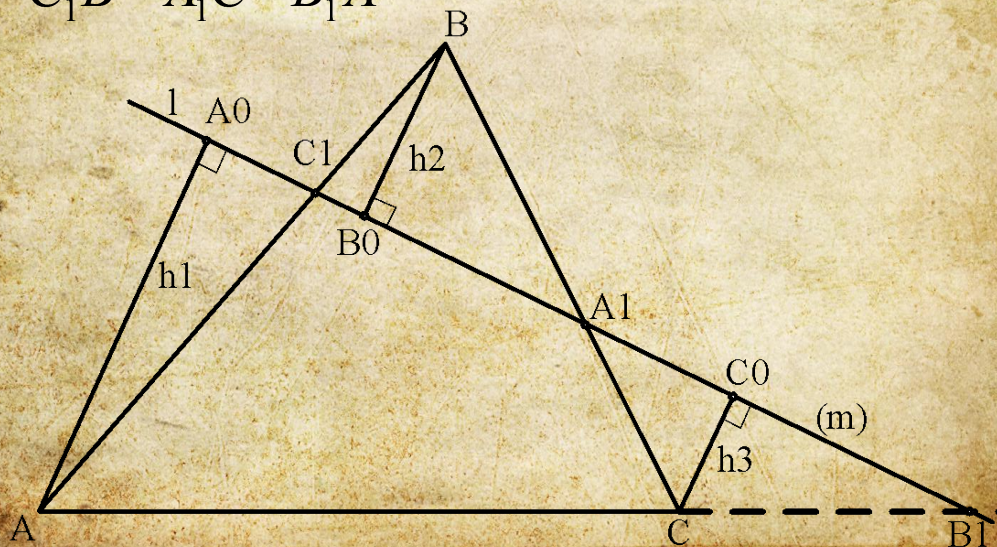


НЕТ ФОТО

Handwritten text in a cursive script, likely a transcription of a Greek text, located on the left side of the page.

Теорема Менелая. Пусть точки A_1 и C_1 лежат на сторонах BC и AB треугольника ABC , а точка B_1 — на продолжении стороны AC этого треугольника. Точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$



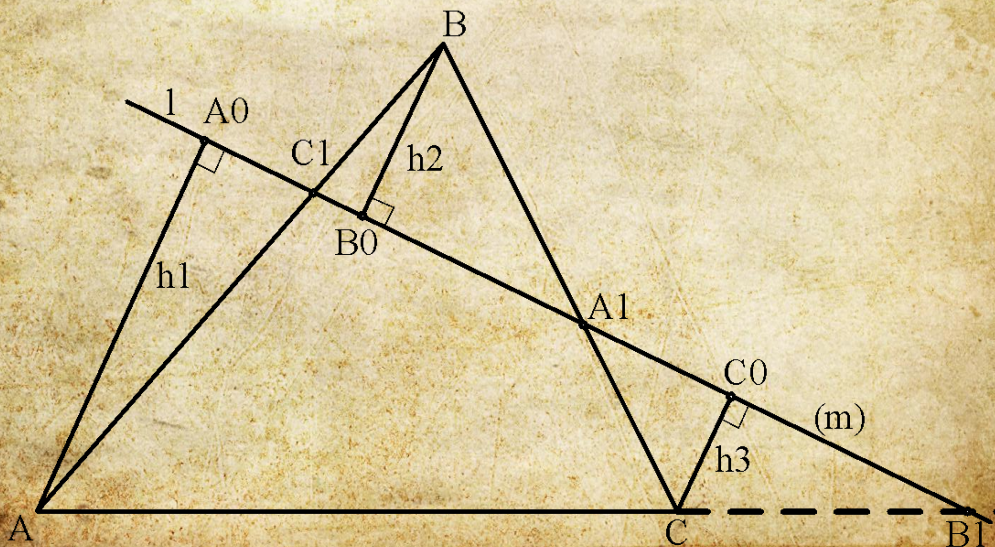
Handwritten text in a cursive script, likely a transcription of a Greek text, located at the bottom of the page. The word "GEOMETRIA" is visible in the background.

МЕНЕЛАЙ АЛЕКСАНДРИЙСКИЙ

Доказательство. Необходимость:

$$AA_0 = h_1, \quad BB_0 = h_2, \quad CC_0 = h_3.$$

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{h_1}{h_2}; \quad \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{h_2}{h_3}; \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{h_3}{h_1}.$$



Нет фото

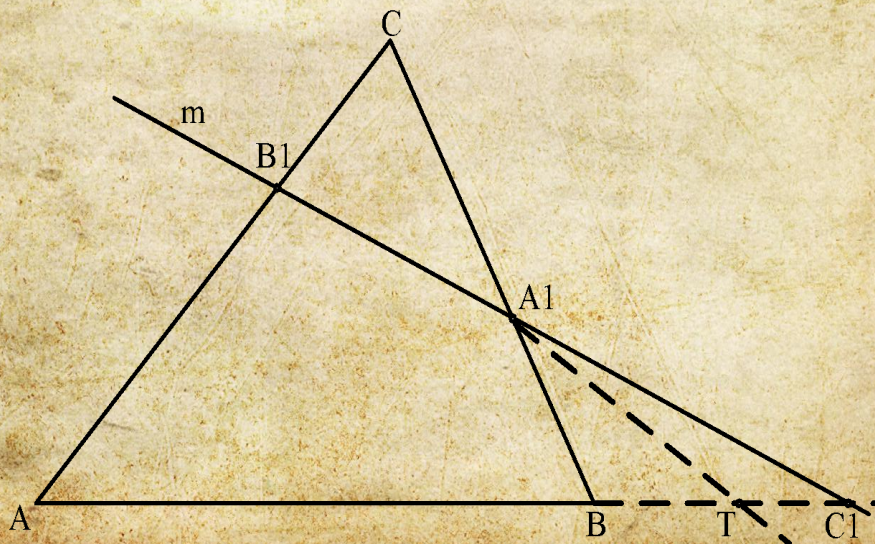
Handwritten text in Greek script, likely a transcription of the original text.

МЕНЕЛАЙ АЛЕКСАНДРИЙСКИЙ

Доказательство. Достаточность:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

$$\frac{BT}{TA} = \frac{BC_1}{C_1A}.$$



Нет фото

Handwritten text in Cyrillic script, likely a transcription or commentary on the theorem.

Задача 1. Докажите: если в треугольнике вписана окружность, то отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных сторон, пересекаются в одной точке.

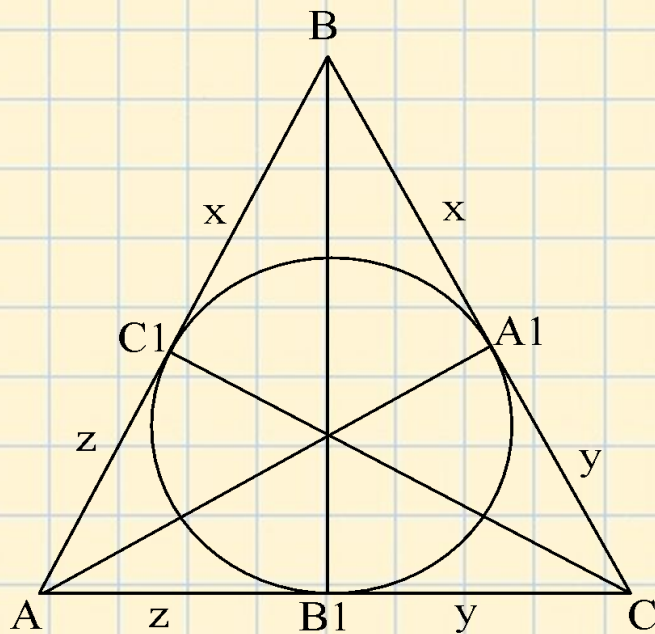
Доказательство.

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

$$BC_1 = BA_1 = x, \quad CA_1 = CB_1 = y,$$

$$AB_1 = AC_1 = z.$$

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{z}{x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} = 1.$$



Задача 2. Докажите теорему: высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке.

Доказательство.

$$AH_2 = x, \quad CH_2 = b - x.$$

$$(BH_2)^2 = c^2 - x^2, \quad (BH_2)^2 = a^2 - (b - x)^2.$$

$$c^2 - x^2 = a^2 - (b - x)^2, \quad x = \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2b}.$$

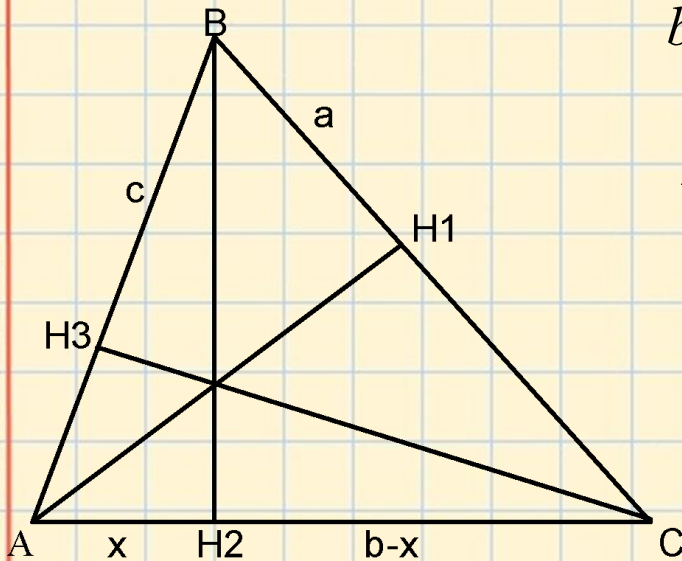
$$b - x = b - \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2b} = \frac{b^2 - c^2 + a^2}{2b}.$$

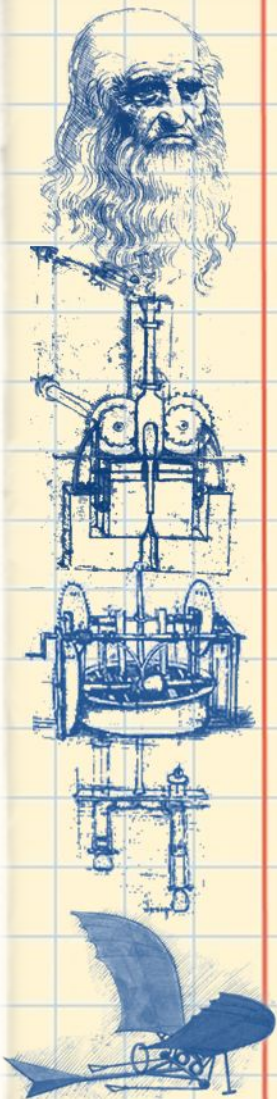
$$AH_2 = \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2b}, \quad CH_2 = \frac{a^2 - c^2 + b^2}{2b},$$

$$AH_3 = \frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c}, \quad BH_3 = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c},$$

$$BH_1 = \frac{c^2 - b^2 + a^2}{2a}, \quad CH_1 = \frac{b^2 - c^2 + a^2}{2a}.$$

$$\frac{AH_3}{H_3B} \cdot \frac{BH_1}{H_1C} \cdot \frac{CH_2}{H_2A} = 1.$$



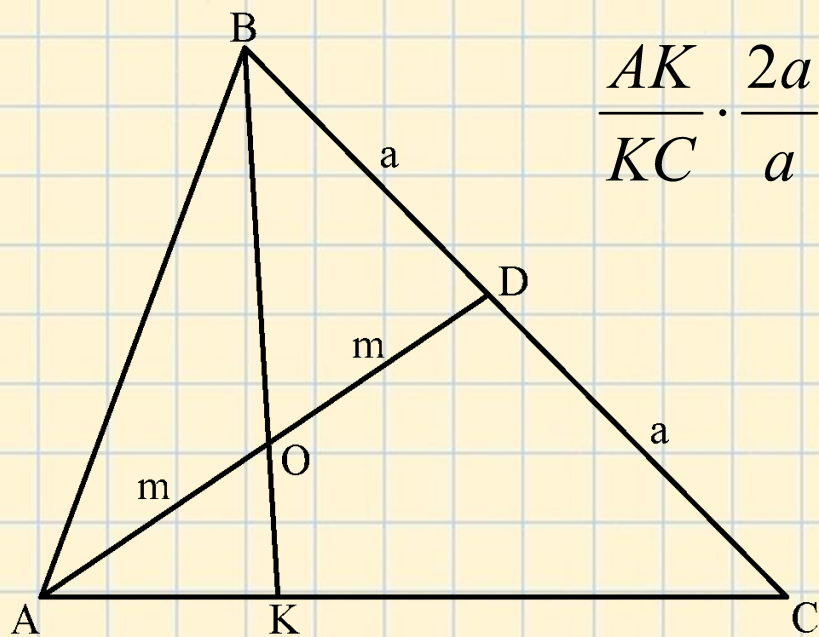


Задача 3. В треугольнике ABC AD — медиана, точка O — середина медианы. Прямая BO пересекает сторону AC в точке K . В каком отношении точка K делит AC , считая от точки A .

Решение.

$$BD = DC = a, \quad AO = OD = m,$$

$$\frac{AK}{KC} \cdot \frac{2a}{a} \cdot \frac{m}{m} = 1, \quad \frac{AK}{KC} = \frac{1}{2}.$$



Ответ: 1:2.

Задача 4. Стороны треугольника 5, 6 и 7. Найдите отношение отрезков, на которые биссектриса большого угла этого треугольника разделена центром окружности, вписанной в треугольник.

Решение.

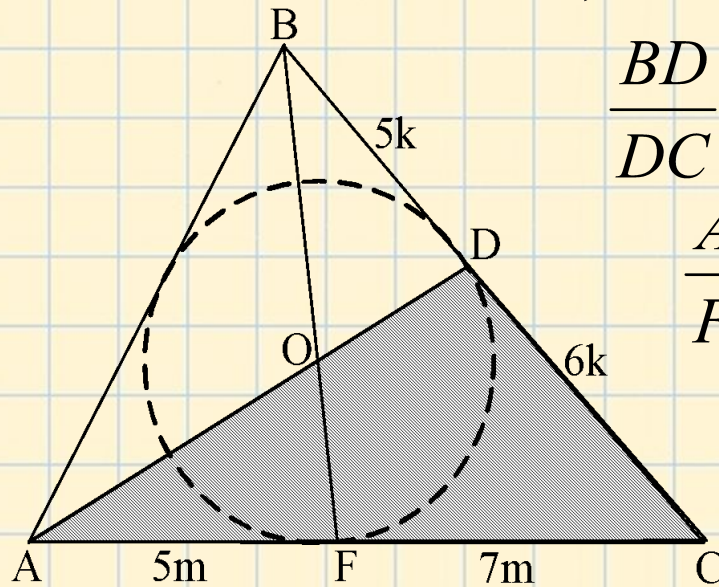
$$AB = 5, BC = 7, AC = 6 \quad AO : OD$$

$$\frac{BD}{DC} = \frac{5}{6}, \quad BD = 5k, \quad DC = 6k.$$

$$\frac{AF}{FC} = \frac{5}{7}, \quad AE = 5m, \quad FC = 7m.$$

$$\frac{AO}{OD} \cdot \frac{DB}{BC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1,$$

$$\frac{AO}{OD} = \frac{BC \cdot FA}{DB \cdot CF} = \frac{11k \cdot 5k}{5k \cdot 7k} = \frac{11}{7}.$$



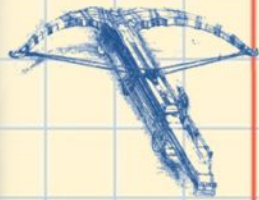
Ответ: 11:7

Заключение.

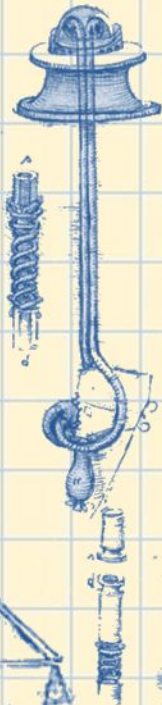
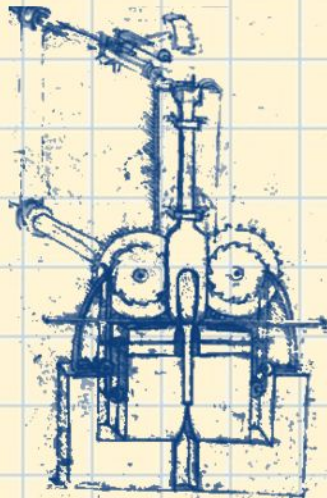
Теоремы Чебы и Менелая просты в понимании. Но трудности, связанные с освоением этих теорем, оправданы их применением при решении задач.

Решение задач с помощью теорем Чебы и Менелая более рационально, чем их решение другими способами, например векторным, которое требует дополнительных действий.

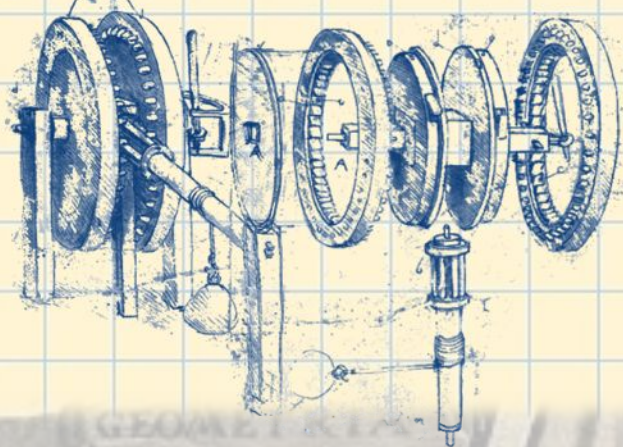
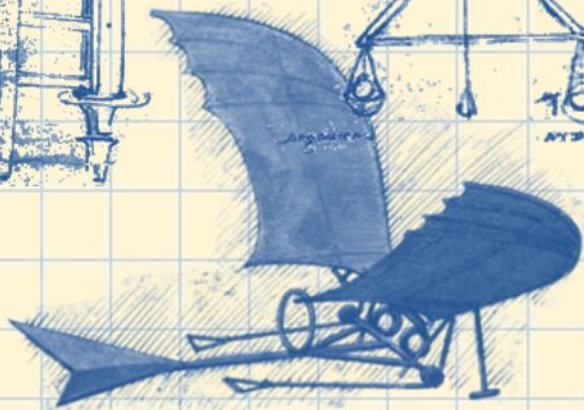
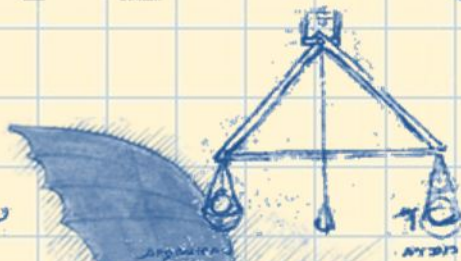
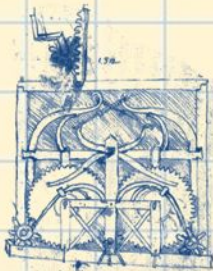
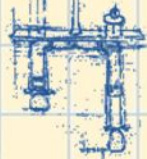
Решение задач с помощью этих теорем развивает мышление и логику, помогают быстро и оригинально решить задачи повышенной сложности, в том числе и задачи уровня C_4 единого государственного экзамена.



1511
 1512
 1513
 1514
 1515
 1516
 1517
 1518
 1519
 1520
 1521
 1522
 1523
 1524
 1525
 1526
 1527
 1528
 1529
 1530
 1531
 1532
 1533
 1534
 1535
 1536
 1537
 1538
 1539
 1540
 1541
 1542
 1543
 1544
 1545
 1546
 1547
 1548
 1549
 1550
 1551
 1552
 1553
 1554
 1555
 1556
 1557
 1558
 1559
 1560
 1561
 1562
 1563
 1564
 1565
 1566
 1567
 1568
 1569
 1570
 1571
 1572
 1573
 1574
 1575
 1576
 1577
 1578
 1579
 1580
 1581
 1582
 1583
 1584
 1585
 1586
 1587
 1588
 1589
 1590
 1591
 1592
 1593
 1594
 1595
 1596
 1597
 1598
 1599
 1600



1601
 1602
 1603
 1604
 1605
 1606
 1607
 1608
 1609
 1610
 1611
 1612
 1613
 1614
 1615
 1616
 1617
 1618
 1619
 1620
 1621
 1622
 1623
 1624
 1625
 1626
 1627
 1628
 1629
 1630
 1631
 1632
 1633
 1634
 1635
 1636
 1637
 1638
 1639
 1640
 1641
 1642
 1643
 1644
 1645
 1646
 1647
 1648
 1649
 1650
 1651
 1652
 1653
 1654
 1655
 1656
 1657
 1658
 1659
 1660
 1661
 1662
 1663
 1664
 1665
 1666
 1667
 1668
 1669
 1670
 1671
 1672
 1673
 1674
 1675
 1676
 1677
 1678
 1679
 1680
 1681
 1682
 1683
 1684
 1685
 1686
 1687
 1688
 1689
 1690
 1691
 1692
 1693
 1694
 1695
 1696
 1697
 1698
 1699
 1700



VESTIGARE GEOMETRIAE INTERVALLA LOCORVM EST,
 QVAMQVE ALTA, LONGA, ET LATA RERVM CORPORA.