ОГОШИ "Лицей-интернат пос. им. Маршала Жукова"

Теоремы Чевы и Менелая и их применение при решении задач

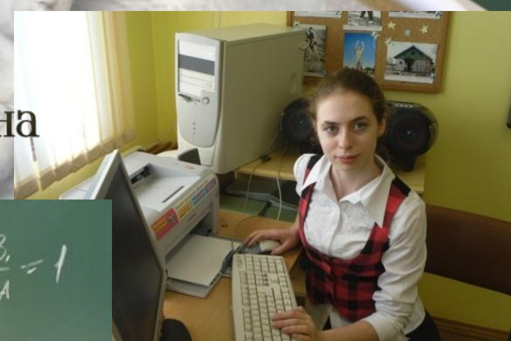
проект учащихся 9 класса

VESTIGARE GEOMETRIAE INTERVALLA LOCORVM EST,
QVAMQVE ALTA, LONGA, ET LATA RERVM CORPORA

Теоремы Чевы и Менелая и их применение при решении задач

Руководитель: учитель математики
КАЦЕВИЧ Алла Геннадьевна

Подготовили: Герчук Кристина



Кириченко Анастасия

GEOMETRIA

VESTIGARE GEOMETRIAE INTERVALLA LOCORVM EST, QVAMQVE ALTA, LONGA, ET LATA RERVM CORPORA. 6.

Теоремы Чевы и Менелая и их применение при решении задач

Цель проекта: изучить теоремы Чевы и Менелая и рассмотреть применение этих теорем к решению геометрических задач.

Джованни Чева

1648-1734 гг.

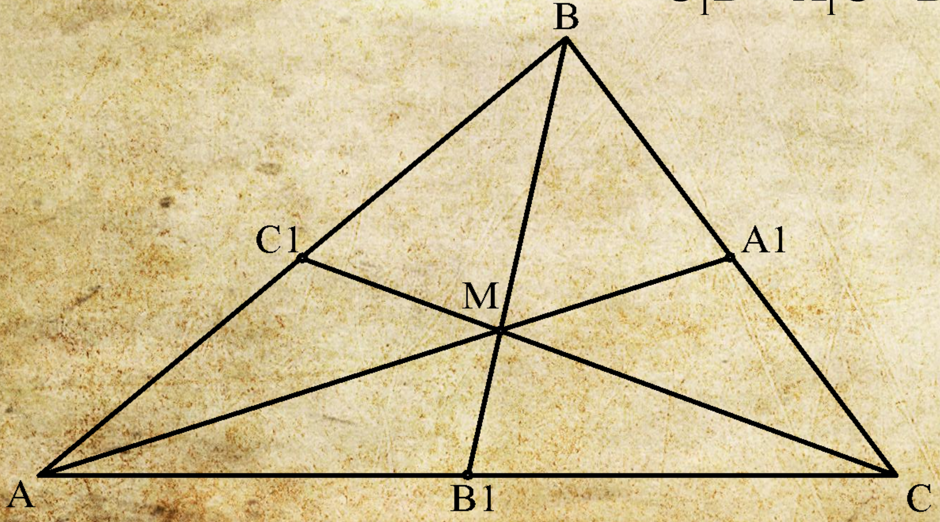
Итальянский математик. Родился в 1648 г. и умер в 1734 г. Главными предметами его занятий были геометрия и механика. Старался возродить греческую геометрию. Основной заслугой является построение учения о секущих, которое положило начало новой синтетической геометрии. Оно изложено в сочинении “О взаимопересекающихся прямых”. В первой его части автор доказывает теорему Менелая и ряд сходных с нею теорем при помощи статического метода, основанного на свойствах центра тяжести системы точек. Теорема, названная его именем – это классическая теорема геометрии треугольника.

Джованни Чева

1648-1734 гг.

Теорема Чевы. Пусть A_1, B_1, C_1 – три точки, лежащие соответственно на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC или на их продолжениях. Для того, чтобы прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекались в одной точке или были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

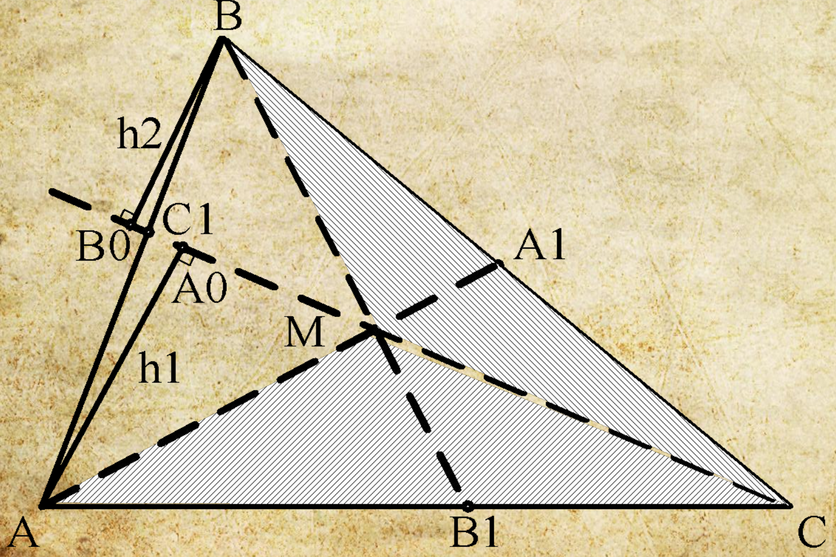


Джованни Чева

1648-1734 гг.

Доказательство. Необходимость:

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{h_1}{h_2}=\frac{S_1}{S_2};\quad \frac{BA_1}{A_1C}=\frac{S_3}{S_1};\quad \frac{CB_1}{B_1A}=\frac{S_2}{S_3}.$$

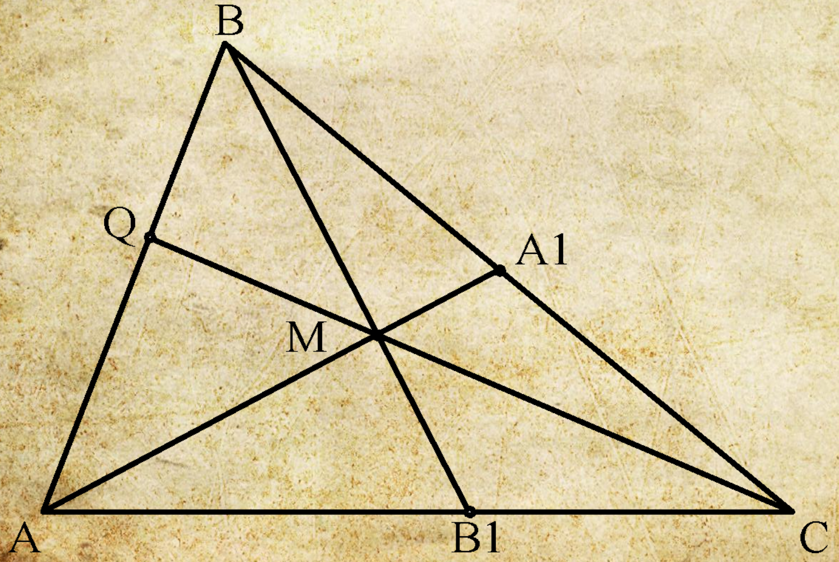


Джованни Чева

1648-1734 гг.

Доказательство. Достаточность:

$$\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1; \qquad \frac{AQ}{QB}=\frac{AC_1}{C_1B}; \qquad Q=C_1.$$



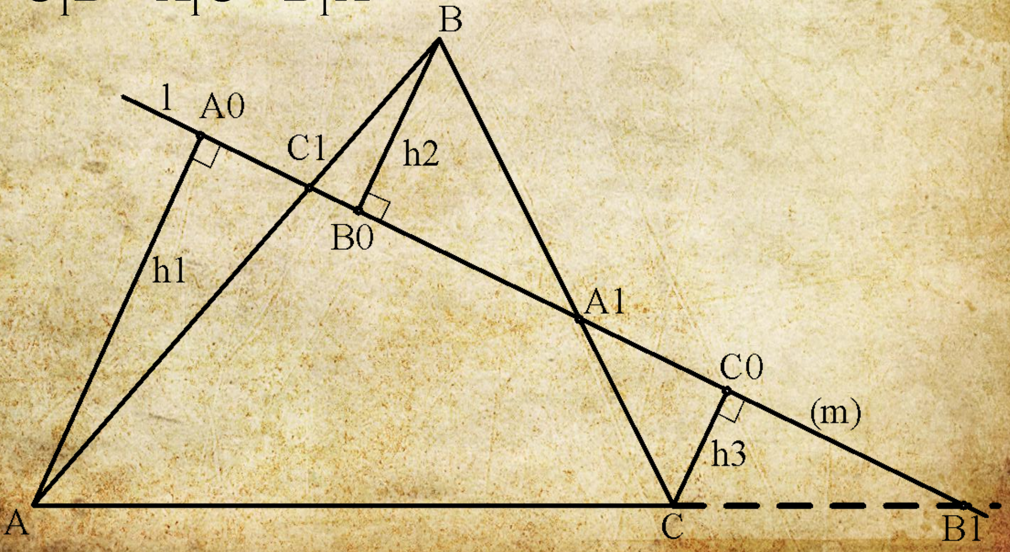
Менелай Александрийский

Математик и астроном. Время его жизни и деятельности определяется приведенными в "Альмагесте" Птолемея двумя астрономическими наблюдениями, которые Менелай Александрийский произвел в Риме в первом году царствования Траяна, т. е. в 98 г. после Рождества Христова. Менелаем были написаны два сочинения: "О вычислении хорд", в 6 книгах, и "Сферика", в 3 книгах. Главным предметом "Сферики" Менелая Александрийского служит сферическая тригонометрия. Из числа многих предложений, для нас впервые встречающихся в этом сочинении, самым замечательным считается обыкновенная теорема Менелая Александрийского, которая прежде называлась правилом шести количеств (regulasexquantitatum). Теорема Менелая красива и проста. В школьном курсе эта теорема затерялась где-то среди задач. Между тем она входит в золотой фонд древнегреческой математики.

Менелай Александрийский

Теорема Менелая. Пусть точки A_1 и C_1 лежат на сторонах BC и AB треугольника ABC, а точка B_1 — на продолжении стороны AC этого треугольника. Точки A_1, B_1, и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

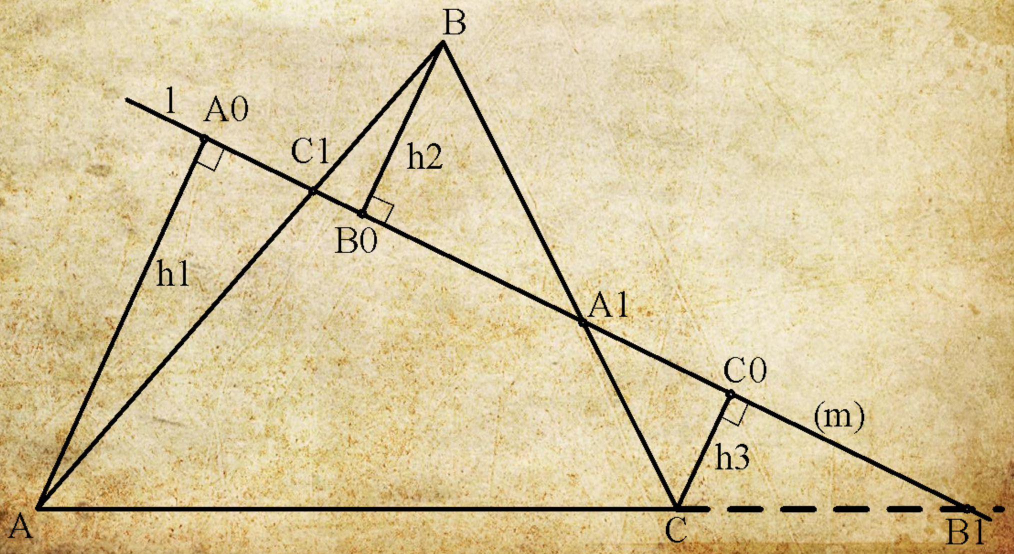


Менелай Александрийский

Доказательство. Необходимость:

$$AA_0 = h_1, \quad BB_0 = h_2, \quad CC_0 = h_3.$$

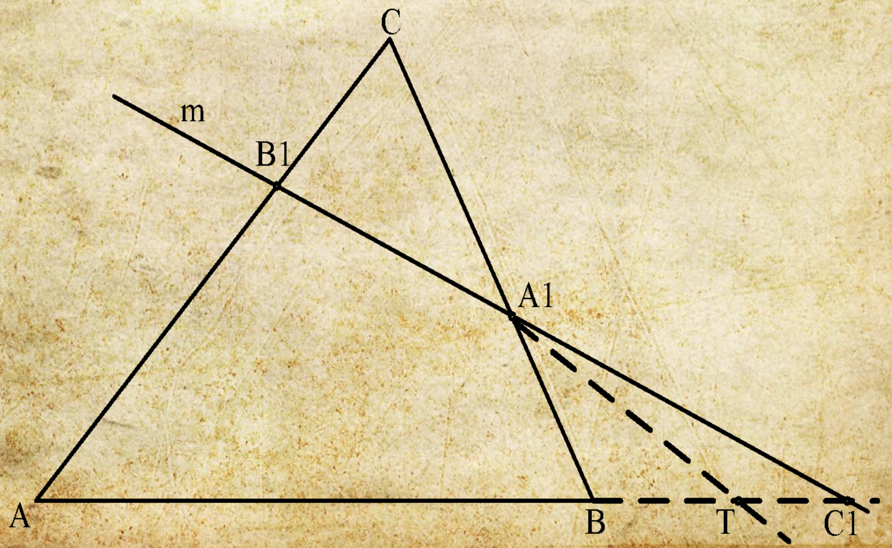
$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{h_1}{h_2}; \quad \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{h_2}{h_3}; \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{h_3}{h_1}.$$



Менелай Александрийский

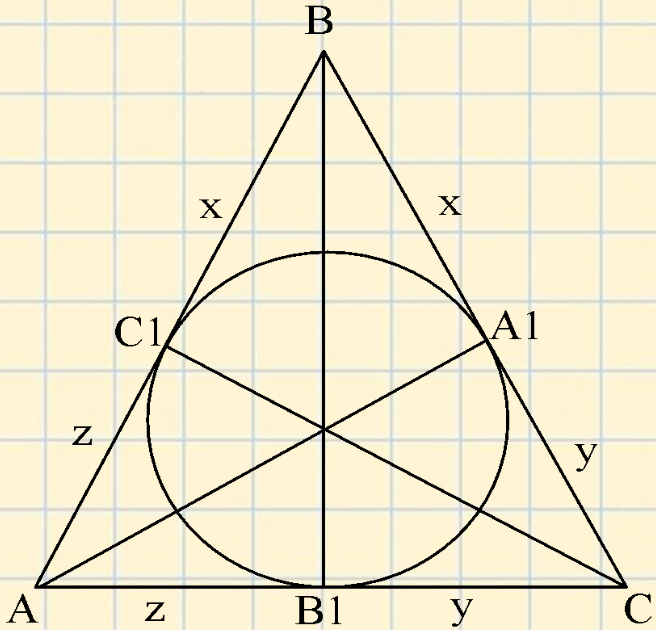
Доказательство. Достаточность:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1. \qquad \frac{BT}{TA}=\frac{BC_1}{C_1A}.$$



Задача 1. Докажите: если в треугольник вписана окружность, то отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных сторон, пересекаются в одной точке.

Доказательство.



$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

$$BC_1=BA_1=x,\quad CA_1=CB_1=y,$$

$$AB_1=AC_1=z.$$

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{z}{x}\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}=1.$$

Задача 2. Докажите теорему: высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке.

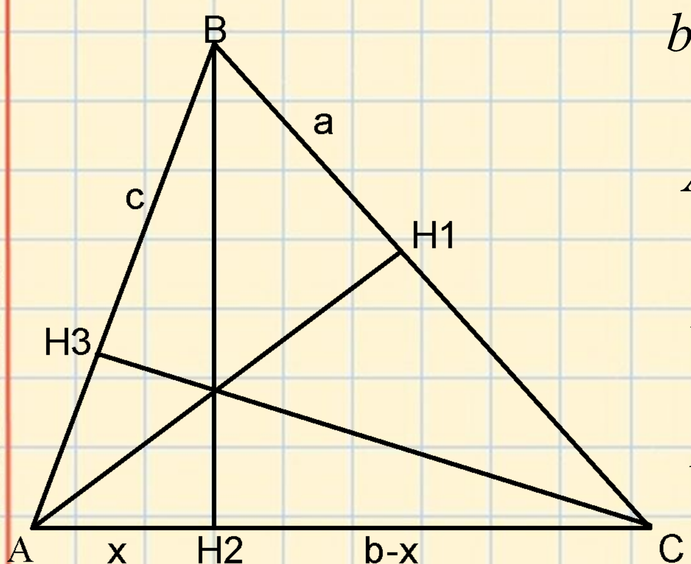
Доказательство.

$$AH_2 = x, \qquad CH_2 = b - x.$$

$$(BH_2)^2 = c^2 - x^2, \quad (BH_2)^2 = a^2 - (b-x)^2.$$

$$c^2 - x^2 = a^2 - (b-x)^2, \qquad x = \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2b}.$$

$$b - x = b - \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2b} = \frac{b^2 - c^2 + a^2}{2b}.$$



$$AH_2 = \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2b}, CH_2 = \frac{a^2 - c^2 + b^2}{2b},$$

$$AH_3 = \frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c}, BH_3 = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c},$$

$$BH_1 = \frac{c^2 - b^2 + a^2}{2a}, CH_1 = \frac{b^2 - c^2 + a^2}{2a}.$$

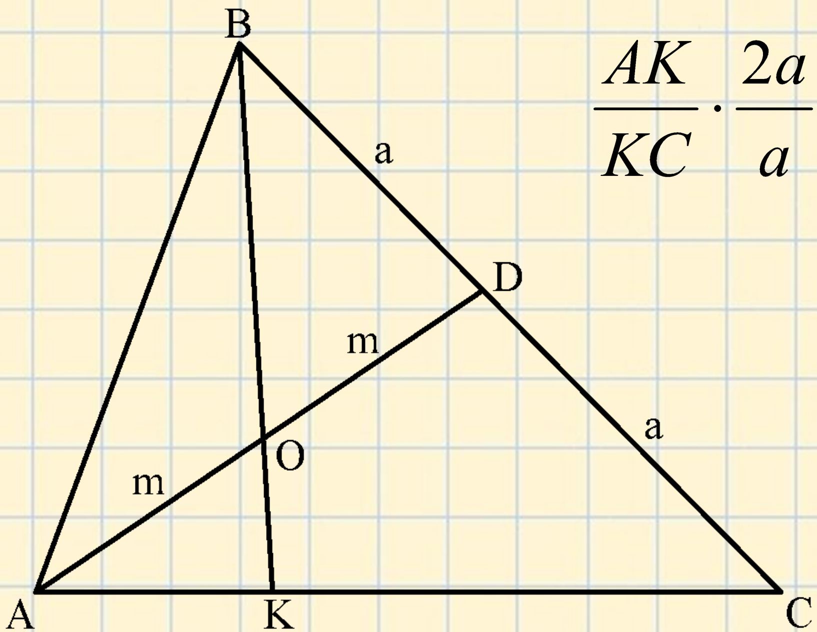
$$\frac{AH_3}{H_3B} \cdot \frac{BH_1}{H_1C} \cdot \frac{CH_2}{H_2A} = 1.$$

VESTIGARE GEOMETRIAE INTERVALLA LOCORVM EST, .6.
QVAMQVE ALTA, LONGA, ET LATA RERVM CORPORA.

Задача 3. В треугольнике ABC AD — медиана, точка O — середина медианы. Прямая BO пересекает сторону AC в точке K. В каком отношении точка K делит AC, считая от точки A.

Решение.

$$BD = DC = a, \quad AO = OD = m,$$



$$\frac{AK}{KC} \cdot \frac{2a}{a} \cdot \frac{m}{m} = 1, \quad \frac{AK}{KC} = \frac{1}{2}.$$

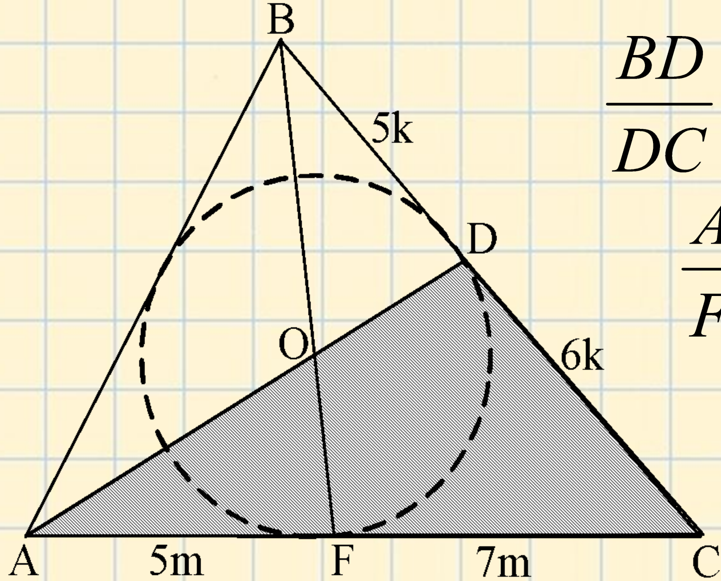
Ответ: 1 : 2.

VESTIGARE GEOMETRIAE INTERVALLA LOCORVM EST, QVAMQVE ALTA, LONGA, ET LATA RERVM CORPORA.

Задача 4. Стороны треугольни-ка 5, 6 и 7. Найдите отношение отрезков, на которые биссектриса большего угла этого треугольника разделена центром окружности, вписанной в треугольник.

Решение.

$$AB = 5,\ BC = 7,\ AC = 6 \qquad AO : OD$$



$$\frac{BD}{DC} = \frac{5}{6}, \quad BD = 5k, \ \ DC = 6k.$$

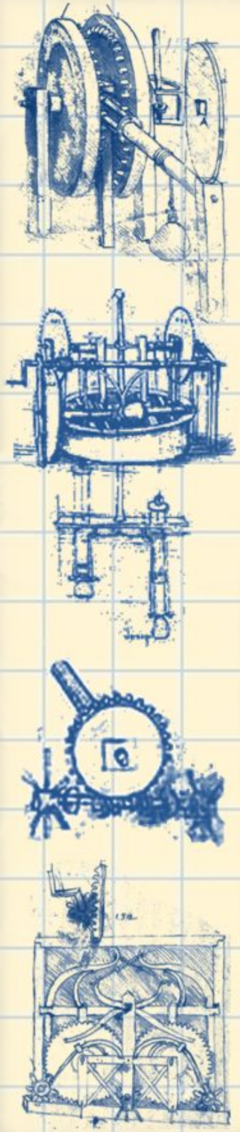
$$\frac{AF}{FC} = \frac{5}{7}, \quad AE = 5m, \ \ FC = 7m.$$

$$\frac{AO}{OD} \cdot \frac{DB}{BC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1,$$

$$\frac{AO}{OD} = \frac{BC \cdot FA}{DB \cdot CF} = \frac{11k \cdot 5k}{5k \cdot 7k} = \frac{11}{7}.$$

Ответ: $11:7$

VESTIGARE GEOMETRIAE INTERVALLA LOCORVM EST, QVAMQVE ALTA, LONGA, ET LATA RERVM CORPORA.



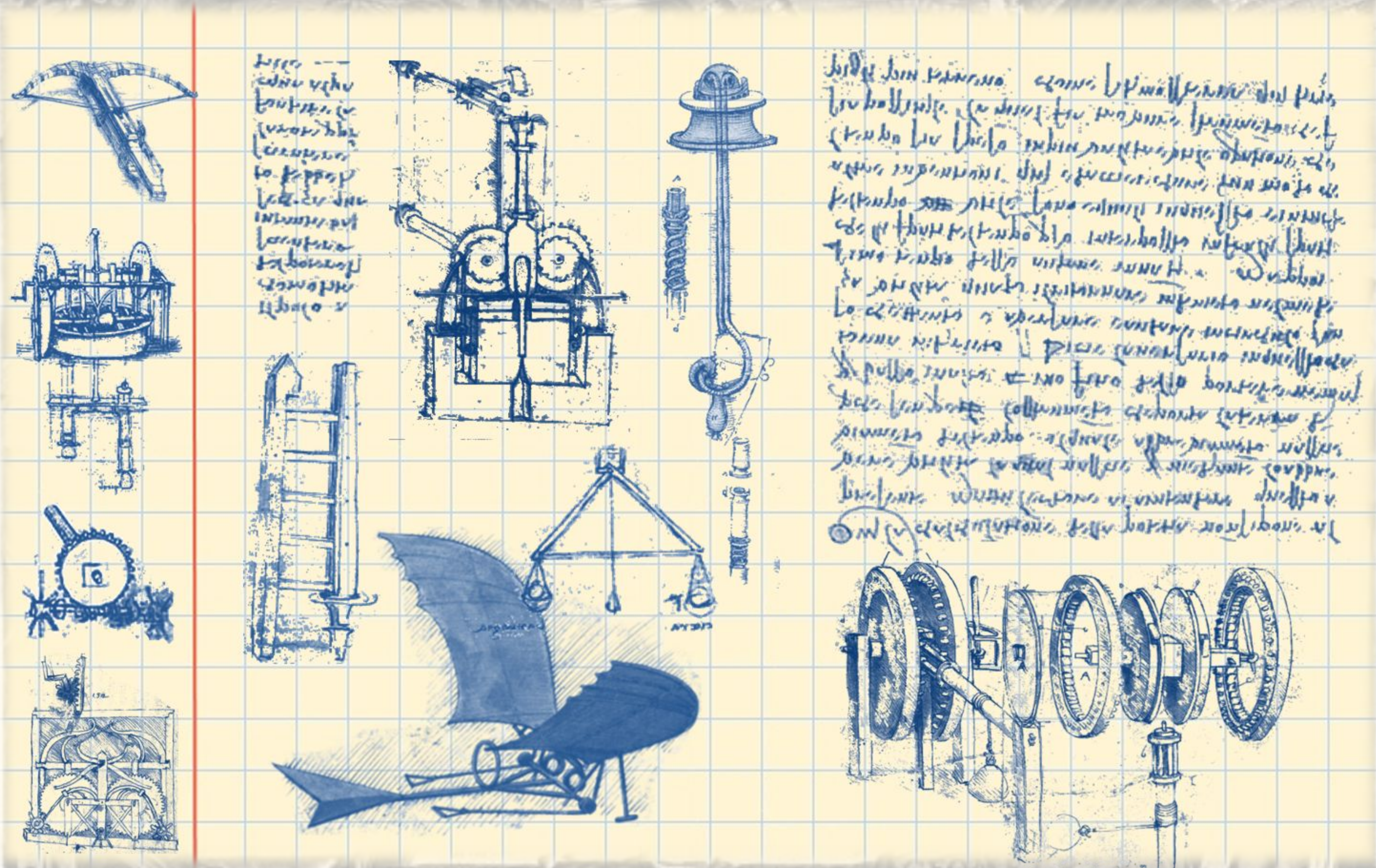
Заключение.

Теоремы Чевы и Менелая просты в понимании. Но трудности, связанные с освоением этих теорем, оправданы их применением при решении задач.

Решение задач с помощью теорем Чевы и Менелая более рационально, чем их решение другими способами, например векторным, которое требует допочнительных действий.

Решение задач с помощью этих теорем развивает мышление и логику, помогают быстро и оригинально решить задачи повышенной сложности, в том числе и задачи уровня C_4 единого государственного экзамена.

VESTIGARE GEOMETRIAE INTERVALLA LOCORVM EST, .6.
QVAMQVE ALTA, LONGA, ET LATA RERVM CORPORA.



GEOMETRIA

VESTIGARE GEOMETRIAE INTERVALLA LOCORVM EST, QVAMQVE ALTA, LONGA, ET LATA RERVM CORPORA.