

# Теоремы Чебы и Менелая и их применение при решении задач

ΠΡΟΣΕΧΕΘΥΡΑ  
ΚΑΙ ΑΚΟΥΕΤΟΥ  
ΤΡΟΣΔΟΚΕΙΣΘΩ  
ΚΑΚΑΤΑΒΗΤΩ  
ΔΥΣΕΣΩΜΕΡΟΣ  
ΚΟΣΕΙΝΦΙ  
ΤΟΝΟΜΑ  
ΤΕΜΕΓΑΚΩ  
ΣΑΛΛΗΝΑΤ  
ΙΓ ΑΡΑΙΟΔΟ  
ΣΠΙΝΤΟΣΚΑ  
ΙΟΣΚΥ ΑΒ  
ΙΤΟΣΑΙΟ  
ΕΑΣΚΟΛΑΡ  
ΤΑ ΑΝ

Handwritten text in a cursive script, likely a manuscript or a page from a book, partially obscured by the central figure.



проект учащихся 9 класса

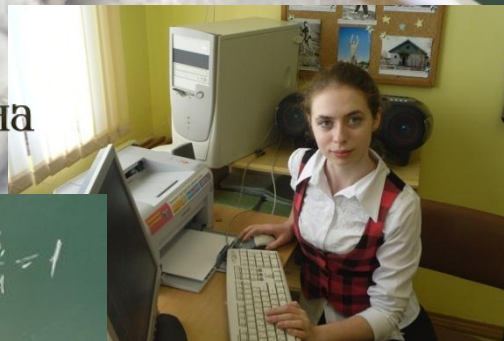
VESTIGARE GEOMETRIAE INTERVALLA LOCORVM EST,  
QVAMQVE ALTA, LONGA, ET LATA RERVM CORPORA.

# Теоремы Чебы и Менелая и их применение при решении задач

Руководитель: учитель математики  
КАЦЕВИЧ Алла Геннадьевна



Подготовили: Герчук Кристина



Кириченко Анастасия

# Теоремы Чева и Менелая и их применение при решении задач

ΠΡΟΣΕΧΕΘΥΡΑ  
ΚΑΙ ΑΚΟΥΕΤΟΥ  
ΠΡΟΣΔΟΚΕΙΣΘΩ  
ΚΑΚΑΤΑΒΗΤΗ  
ΔΥΣΕΣΜΕΡΟΣ  
ΚΟΣΙΝΙΦΙ  
ΤΟΝΟΜΑ  
ΤΕ ΜΕΓΑΛΩ  
ΣΑΛΗΘΝΑΤ  
ΙΤ ΑΡΑΙΑΙΟΔΟ  
ΣΤΙΝ ΤΟΣΚΑ  
ΤΟΣΚΥ ΑΒΕ  
ΤΟΣΑΝΤΟ  
ΕΑΣΚΟΛΑΝ  
ΤΑ ΑΝ

Цель проекта: изучить теоремы Чева и Менелая и рассмотреть применение этих теорем к решению геометрических задач.

Handwritten text in a cursive script, likely a historical manuscript or a student's notes, located in the bottom left corner of the slide.



GEOMETRIA

# ДЖОВАННИ ЧЕВА



1648-1734 гг.

Итальянский математик. Родился в 1648 г. и умер в 1734 г. Главными предметами его занятий были геометрия и механика. Старался возродить греческую геометрию. Основной заслугой является построение учения о секущих, которое положило начало новой синтетической геометрии. Оно изложено в сочинении "О взаимопересекающихся прямых". В первой его части автор доказывает теорему Менелая и ряд сходных с нею теорем при помощи статического метода, основанного на свойствах центра тяжести системы точек. Теорема, названная его именем — это классическая теорема геометрии треугольника.

*Handwritten text in a cursive script, likely a transcription of Ceva's work or a related manuscript.*

*Handwritten text in a cursive script, likely a transcription of Ceva's work or a related manuscript.*

GEOMETRIAE INTERVALLA LOCORVM  
QUAMQVE ALTA, LONGA, ET LATA RERVVM CORP

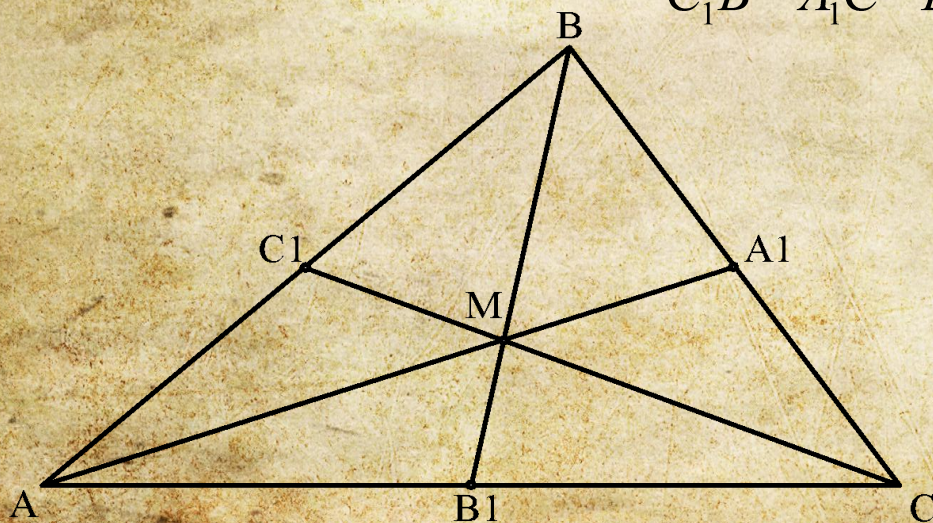
# ДЖОВАННИ ЧЕВА



1648-1734 гг.

Теорема Чевы. Пусть  $A_1, B_1, C_1$  – три точки, лежащие соответственно на сторонах  $BC, CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  или на их продолжениях. Для того, чтобы прямые  $AA_1, BB_1, CC_1$  пересекались в одной точке или были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$



*Handwritten text in a cursive script, likely a Latin manuscript related to geometry.*

*Handwritten text in a cursive script, likely a Latin manuscript related to geometry.*

# ДЖОВАННИ ЧЕВА

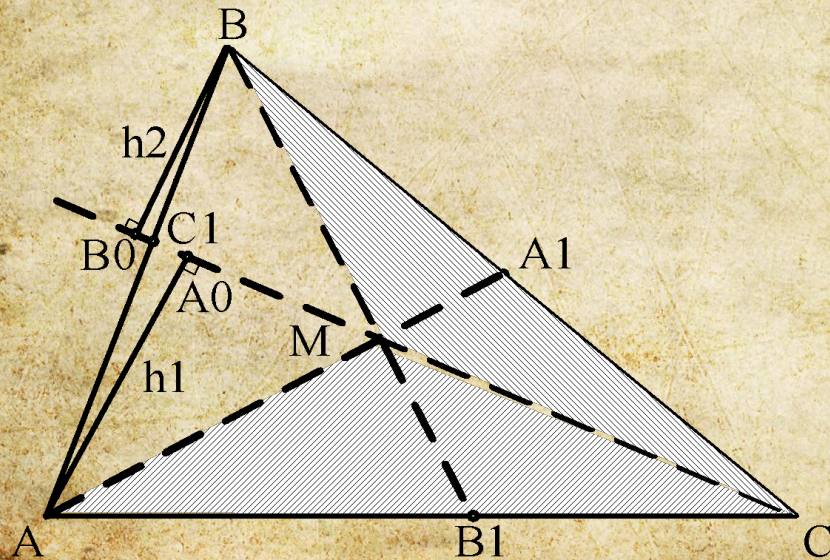


1648-1734 гг.

*Handwritten text in Italian script, likely a transcription of Ceva's work on the theorem.*

Доказательство. Необходимость:

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{S_1}{S_2}; \quad \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{S_3}{S_1}; \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{S_2}{S_3}.$$



*Handwritten text in Italian script, likely a transcription of Ceva's work on the theorem.*

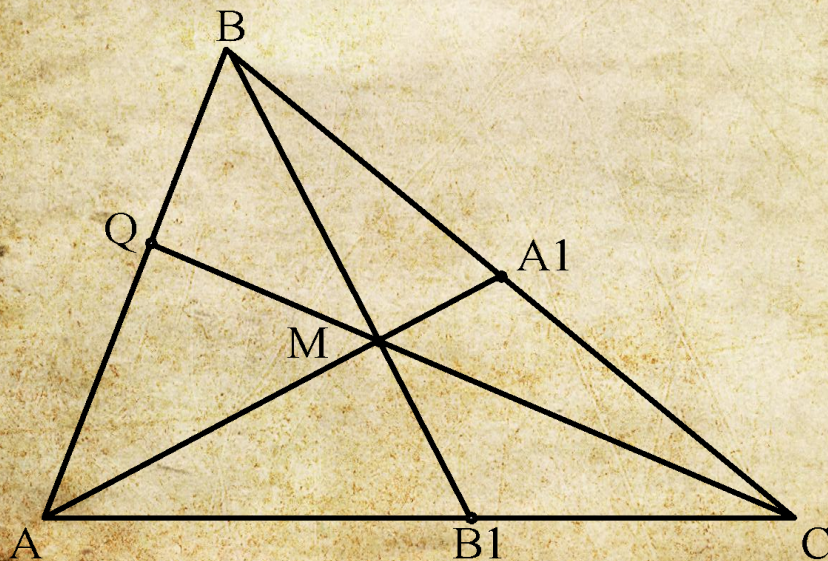
# ДЖОВАННИ ЧЕВА



1648-1734 гг.

Доказательство. Достаточность:

$$\frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1; \quad \frac{AQ}{QB} = \frac{AC_1}{C_1B}; \quad Q = C_1.$$



*Handwritten text in Italian script, likely a manuscript or letter related to Ceva's work.*

*Handwritten text in Italian script, likely a manuscript or letter related to Ceva's work.*

# МЕНЕЛАЙ АЛЕКСАНДРИЙСКИЙ



НЕТ ФОТО

Handwritten text in a cursive script, likely representing a fragment of Menelaus's work or a related manuscript.

Математик и астроном. Время его жизни и деятельности определяется приведенными в "Альмагесте" Птолемея двумя астрономическими наблюдениями, которые Менелай Александрийский произвел в Риме в первом году царствования Траяна, т. е. в 98 г. после Рождества Христова. Менелаем были написаны два сочинения: "О вычислении хорд", в 6 книгах, и "Сферика", в 3 книгах. Главным предметом "Сферики" Менелая Александрийского служит сферическая тригонометрия. Из числа многих предложений, для нас впервые встречающихся в этом сочинении, самым замечательным считается обыкновенная теорема Менелая Александрийского, которая прежде называлась правилом шести количеств (*regula sex quantitatum*). Теорема Менелая красива и проста. В школьном курсе эта теорема затерялась где-то среди задач. Между тем она входит в золотой фонд древнегреческой математики.

GEOMETRIAE INTERVALLA LOCORVM  
ALTA, LONGA, ET LATA RERVM CORP

Handwritten text in a cursive script, likely representing a fragment of Menelaus's work or a related manuscript.



# МЕНЕЛАЙ АЛЕКСАНДРИЙСКИЙ

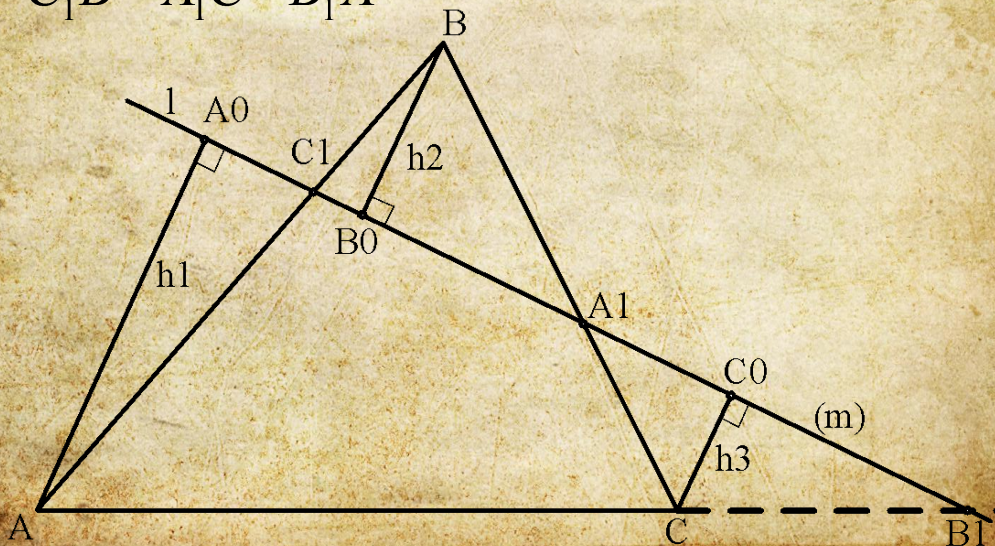


НЕТ ФОТО

Handwritten text in a cursive script, likely a transcription of a mathematical proof or commentary, located on the left side of the parchment background.

Теорема Менелая. Пусть точки  $A_1$  и  $C_1$  лежат на сторонах  $BC$  и  $AB$  треугольника  $ABC$ , а точка  $B_1$  — на продолжении стороны  $AC$  этого треугольника. Точки  $A_1, B_1$  и  $C_1$  лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$



Handwritten text in a cursive script, likely a transcription of a mathematical proof or commentary, located at the bottom of the parchment background.

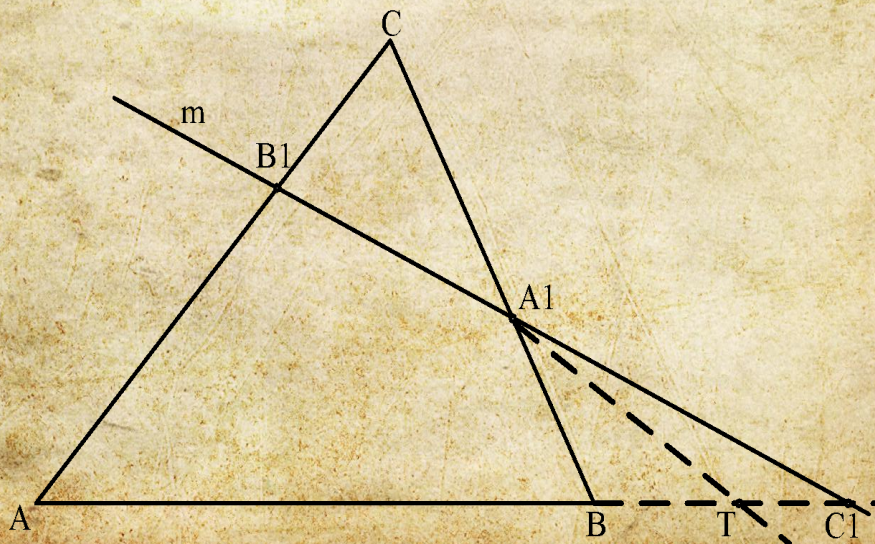
GEOMETRIAE INTERVALLA LOCORVM  
QUAMQVE ALTA, LONGA, ET LATA RERVVM CORP



# МЕНЕЛАЙ АЛЕКСАНДРИЙСКИЙ

Доказательство. Достаточность:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1. \quad \frac{BT}{TA} = \frac{BC_1}{C_1A}.$$



Нет фото

Handwritten text in Cyrillic script, likely a transcription or commentary related to the geometric proof.

GEOMETRIAE INTERVALLA LOCORVM  
ALTA, LONGA, ET LATA RERVV CORP

Задача 1. Докажите: если в треугольнике вписана окружность, то отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных сторон, пересекаются в одной точке.

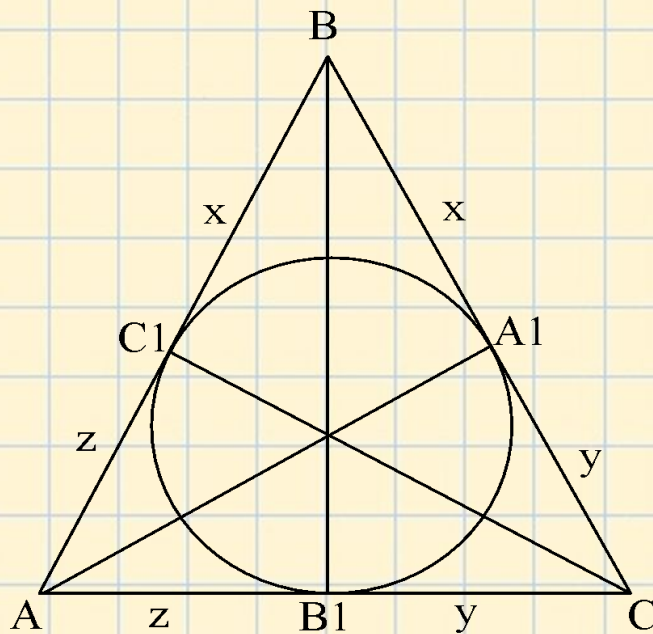
Доказательство.

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

$$BC_1 = BA_1 = x, \quad CA_1 = CB_1 = y,$$

$$AB_1 = AC_1 = z.$$

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{z}{x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} = 1.$$



Задача 2. Докажите теорему: высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке.

Доказательство.

$$AH_2 = x, \quad CH_2 = b - x.$$

$$(BH_2)^2 = c^2 - x^2, \quad (BH_2)^2 = a^2 - (b - x)^2.$$

$$c^2 - x^2 = a^2 - (b - x)^2, \quad x = \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2b}.$$

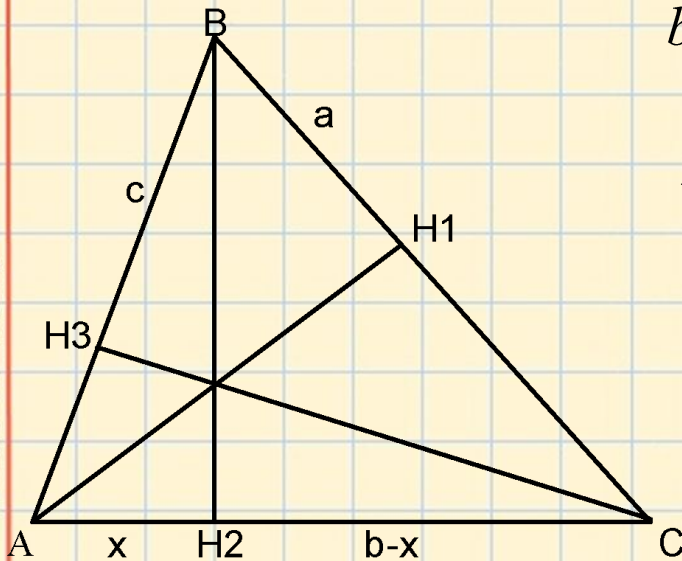
$$b - x = b - \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2b} = \frac{b^2 - c^2 + a^2}{2b}.$$

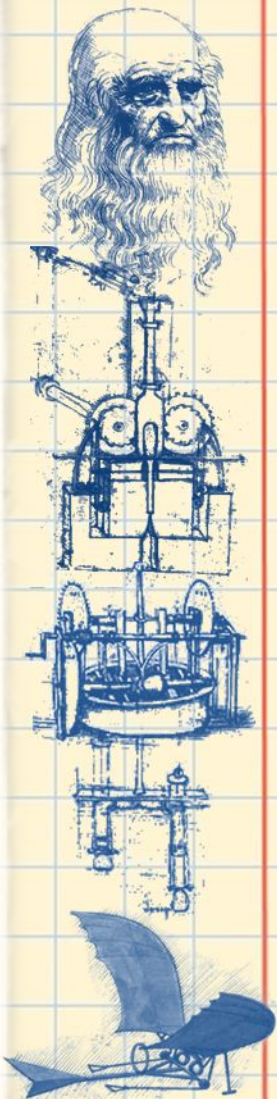
$$AH_2 = \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2b}, \quad CH_2 = \frac{a^2 - c^2 + b^2}{2b},$$

$$AH_3 = \frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c}, \quad BH_3 = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c},$$

$$BH_1 = \frac{c^2 - b^2 + a^2}{2a}, \quad CH_1 = \frac{b^2 - c^2 + a^2}{2a}.$$

$$\frac{AH_3}{H_3B} \cdot \frac{BH_1}{H_1C} \cdot \frac{CH_2}{H_2A} = 1.$$



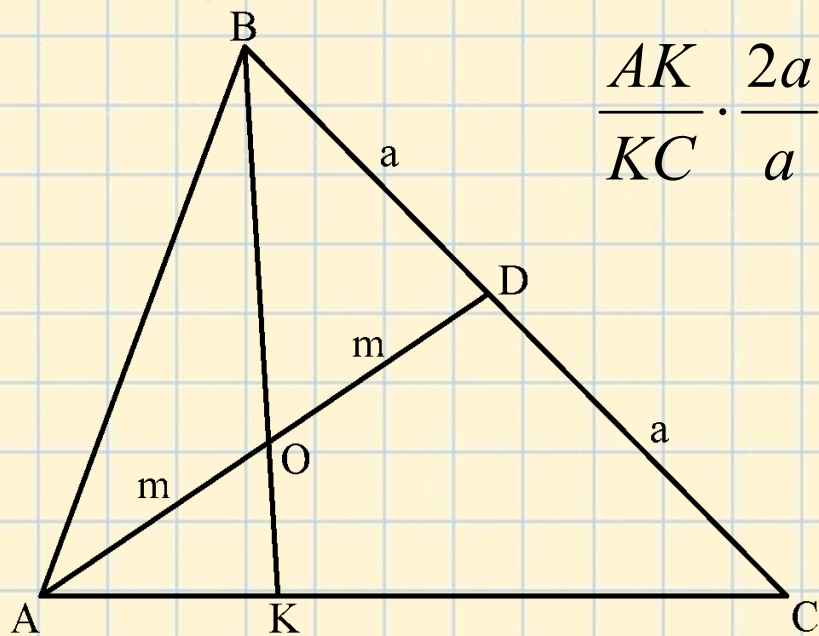


Задача 3. В треугольнике  $ABC$   $AD$  — медиана, точка  $O$  — середина медианы. Прямая  $BO$  пересекает сторону  $AC$  в точке  $K$ . В каком отношении точка  $K$  делит  $AC$ , считая от точки  $A$ .

Решение.

$$BD = DC = a, \quad AO = OD = m,$$

$$\frac{AK}{KC} \cdot \frac{2a}{a} \cdot \frac{m}{m} = 1, \quad \frac{AK}{KC} = \frac{1}{2}.$$



Ответ: 1:2.

Задача 4. Стороны треугольника 5, 6 и 7. Найдите отношение отрезков, на которые биссектриса большого угла этого треугольника разделена центром окружности, вписанной в треугольник.

Решение.

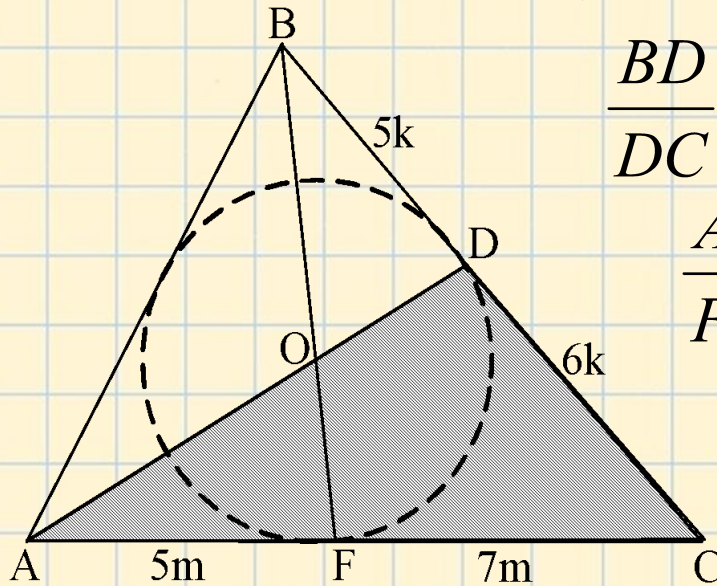
$$AB = 5, BC = 7, AC = 6 \quad AO : OD$$

$$\frac{BD}{DC} = \frac{5}{6}, \quad BD = 5k, \quad DC = 6k.$$

$$\frac{AF}{FC} = \frac{5}{7}, \quad AE = 5m, \quad FC = 7m.$$

$$\frac{AO}{OD} \cdot \frac{DB}{BC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1,$$

$$\frac{AO}{OD} = \frac{BC \cdot FA}{DB \cdot CF} = \frac{11k \cdot 5k}{5k \cdot 7k} = \frac{11}{7}.$$



Ответ: 11:7

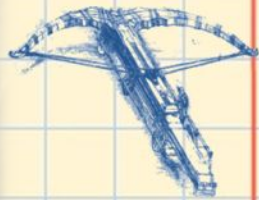
## Заключение.

Теоремы Чебы и Менелая просты в понимании. Но трудности, связанные с освоением этих теорем, оправданы их применением при решении задач.

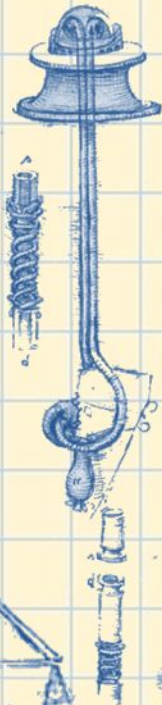
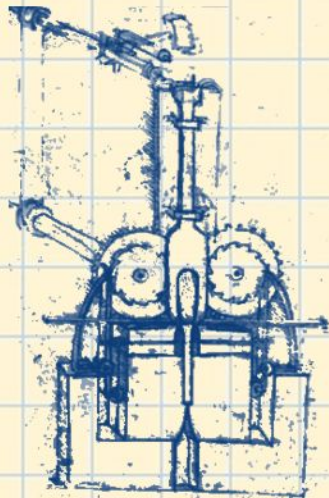
Решение задач с помощью теорем Чебы и Менелая более рационально, чем их решение другими способами, например векторным, которое требует дополнительных действий.

Решение задач с помощью этих теорем развивает мышление и логику, помогают быстро и оригинально решить задачи повышенной сложности, в том числе и задачи уровня  $C_4$  единого государственного экзамена.

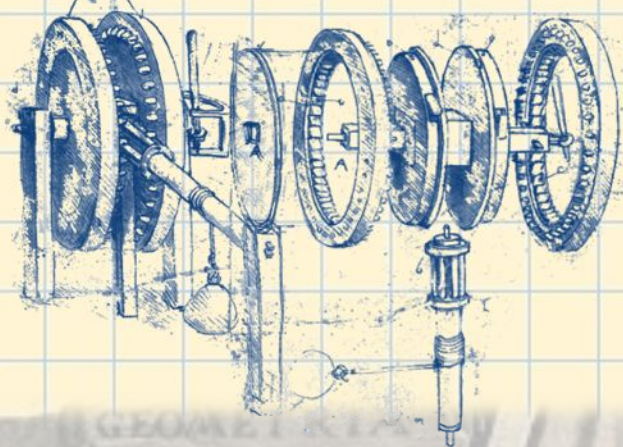
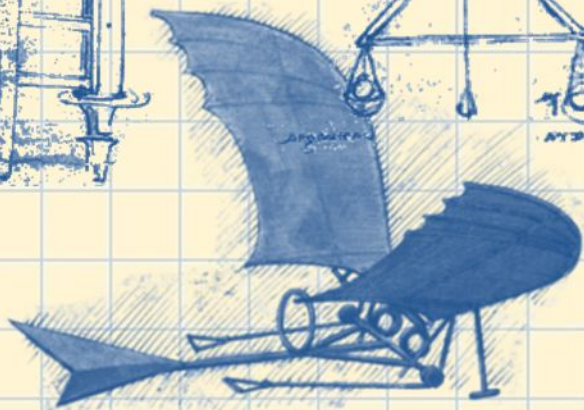
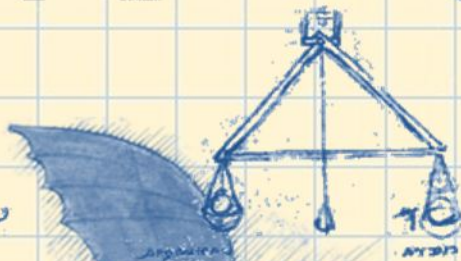
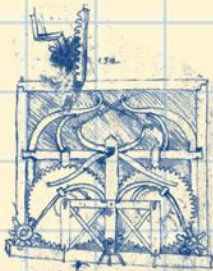
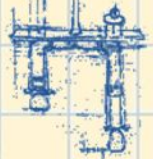




1511  
 1512  
 1513  
 1514  
 1515  
 1516  
 1517  
 1518  
 1519  
 1520  
 1521  
 1522  
 1523  
 1524  
 1525  
 1526  
 1527  
 1528  
 1529  
 1530  
 1531  
 1532  
 1533  
 1534  
 1535  
 1536  
 1537  
 1538  
 1539  
 1540  
 1541  
 1542  
 1543  
 1544  
 1545  
 1546  
 1547  
 1548  
 1549  
 1550  
 1551  
 1552  
 1553  
 1554  
 1555  
 1556  
 1557  
 1558  
 1559  
 1560  
 1561  
 1562  
 1563  
 1564  
 1565  
 1566  
 1567  
 1568  
 1569  
 1570  
 1571  
 1572  
 1573  
 1574  
 1575  
 1576  
 1577  
 1578  
 1579  
 1580  
 1581  
 1582  
 1583  
 1584  
 1585  
 1586  
 1587  
 1588  
 1589  
 1590  
 1591  
 1592  
 1593  
 1594  
 1595  
 1596  
 1597  
 1598  
 1599  
 1600



1601  
 1602  
 1603  
 1604  
 1605  
 1606  
 1607  
 1608  
 1609  
 1610  
 1611  
 1612  
 1613  
 1614  
 1615  
 1616  
 1617  
 1618  
 1619  
 1620  
 1621  
 1622  
 1623  
 1624  
 1625  
 1626  
 1627  
 1628  
 1629  
 1630  
 1631  
 1632  
 1633  
 1634  
 1635  
 1636  
 1637  
 1638  
 1639  
 1640  
 1641  
 1642  
 1643  
 1644  
 1645  
 1646  
 1647  
 1648  
 1649  
 1650  
 1651  
 1652  
 1653  
 1654  
 1655  
 1656  
 1657  
 1658  
 1659  
 1660  
 1661  
 1662  
 1663  
 1664  
 1665  
 1666  
 1667  
 1668  
 1669  
 1670  
 1671  
 1672  
 1673  
 1674  
 1675  
 1676  
 1677  
 1678  
 1679  
 1680  
 1681  
 1682  
 1683  
 1684  
 1685  
 1686  
 1687  
 1688  
 1689  
 1690  
 1691  
 1692  
 1693  
 1694  
 1695  
 1696  
 1697  
 1698  
 1699  
 1700



VESTIGARE GEOMETRIAE INTERVALLA LOCORVM EST,  
 QVAMQVE ALTA, LONGA, ET LATA RERVVM CORPORA.