ИГРОВЫЕ И СТРАТЕГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

* **Учитель математики**
* **МБОУ «Школа-лицей им. Героя Советского Союза Ф.Ф.Степанова»**
* **г.Саки Республика Крым**
* **Загоря Т.М.**

Известный русский математик В. П. Ермаков говорил:

«В математике следует помнить не формулы, а процесс мышления».

Это демонстрируют задачи с играми.

Игра — тип олимпиадных задач по математике, в которых требуется проанализировать стратегию игры и/или назвать победителя этой игры. Обычно заканчивается традиционным вопросом: «Кто выиграет при правильной игре?»

«Правильной игрой» в задачах этого класса называется выигрышная стратегия из теории игр — стратегия, придерживаясь которой игрок выиграет при любых ответных действиях соперника. Правильная игра - игра, в которой оба соперника действуют разумно, пытаясь выиграть (не поддаются друг другу).

Теория игр – раздел математики:

- исследующий вопросы поведения участников игры;	- разрабатывающий оптимальные стратегии поведения каждого из участников игры.

Что такое игровая, стратегическая задача?

Это не совсем обычная математическая задача, так как,

во-первых, в ней часто нет ничего числового, то есть непо нятно, а что, собственно говоря, нужно решать или точнее, что писать в решении таких задач?

Во-вторых, иногда в играх нельзя придумать алгоритм победы или, как говорят, стратегию победы, то есть иметь возможность действовать определенным алгоритмическим образом в ответ на каждый ход противника, иными словами, в игре возможна победа и без стратегии, а также ничья.

В-третьих, для решения игровой задачи нужно уметь правильно записать его. И эта запись зависит, например, от того, кто выигрывает в данной игре.

Так как же правильно записать решение игровой задачи?

В решении игровой задачи нужно записать:

- I) ход первого игрока;
- II) алгоритм ходов в ответ на каждый ход соперника, т. е. стратегию победы;
- III) показать, что найдется независимо от хода соперника возможность сделать ход, т. е. его последний ход будет победным.

Математические игры – частые гости олимпиад! Я хочу рассмотреть вопрос о том, кто выигрывает при правильной игре, узнать что такое стратегия и как действовать, чтобы выиграть. Ознакомимся с играми-шутками. Узнаем, как использовать симметрию или делимость чисел в игровых задачах, разберем выигрышные позиции.

Цели работы:

- изучить новые методы решения нестандартных задач, классификацию данных методов;
- расширить свои знания по математике;
- провести исследование решения некоторых типовых задач в общем виде, в измененных ситуациях, попробовать вывести «правила» решения некоторых игровых задач.

Виды игр

- **Игра-шутка.**

В данном типе игр победа не зависит от действий игроков и заранее известна.

- **Игры на симметрию.**

Для решений задач данного типа применяется идея симметрии - после какого-то момента один игрок играет симметрично другому.

- **Игры на выигрышные и проигрышные позиции.**

В процессе решения задач этого типа находятся позиции, попадая в которые игрок может обеспечить себе победу - выигрышные, и из которых он не может победить при любых своих действиях – проигрышные.

1. Игры-шутки.

Игры – шутки – это такие игры, где для построения вы игрышного алгоритма можно ничего и не знать, так как в них результат будет зависеть не от игры партнеров, а от начальных условий. Однако для этого в решении нужно заметить, что это игра-шутка, а не какая-то другая, в которой нужно искать выигрышную стратегию. На самом деле, нет никакой стратегии Просто… как бы кто ни ходил, либо всегда выиграет первый игрок (тот, кто начинает игру), либо всегда второй. Задача в том, чтобы математически доказать такую закономерность.

Часто для нахождения идеи решения задачи можно использовать **«метод маленьких чисел»,** т. е. начинать поиск решения с небольших чисел.

Часто для нахождения идеи решения задачи можно использовать **«метод маленьких чисел»,** т. е. начинать поиск решения с небольших чисел.

Задача. Двое по очереди ломают шоколадку 5x8. За ход можно разломать любой кусок по прямой линии между дольками. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Решение: Долек всегда будет 5x8=40 штук, а шоколадка в начале была одна. Заметим, что на каждом ходу один кусок шоколадки всегда разламывается на 2, т.е. количество различных кусков шоколадки увеличивается на 1. В начале это кол-во было равно 1, а в конце, как мы заметили, 40. Значит, игра продолжалась ровно 39 ходов. Поэтому последний (39-й) ход был обязательно ходом первого (его ходы - первый, третий и все с нечетными номерами) - и первый выиграл.
Вот такая получилась шутка - как ни ходи, первый всегда выигрывает.

Если число кусочков шоколадки четно, тогда побеждает первый, если число нечетно, тогда второй.

2.Симметрия.

Очень простой и красивый метод решения игровых задач - симметричная стратегия. Суть его - делать каждый раз ход, симметричный ходу противника или дополняющий его до чего-либо. Доказательство правильности нашей стратегии будет пользоваться тем, что после каждого нашего хода позиция симметрична: раз так, то если противник сумел сделать свой ход, то и мы сможем сделать ход, симметричный ему.

<u>Задача 1.</u> На окружности взято 20 точек. Можно за один ход соединить две точки отрезком , который не пересекает другие отрезки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет?

Первым ходом провести отрезок, соединяющий 2 точки, разделив количество точек пополам, а далее отвечать симметричным ходом на каждый ход соперника.

Задача 2. Имеется две кучки камней — по 7 в каждой. За ход можно взять любое количество камней, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет?

Несложно понять, как действовать игроку, делающему второй ход, чтобы победить в данной игре: он должен делать точно такие же ходы, как и первый, но только убирать камни он должен из той кучки, которую не тронул последним ходом его противник.

То есть, у победителя всегда есть ход после хода противника.

Понятна и общая стратегия выигрывающего, когда в кучках произвольное число камней:

- если число камней в кучках равное, то необходимо уравнивать число камней в кучках после хода начинающего, выполняя симметричные ходы. Выигрывает второй игрок;
- если же число камней в кучках неравное, тогда начинающий своим ходом уравнивает число камней в кучках и далее действует так же как, как и в первом случае. Здесь побеждает игрок, делающий первый ход.

В данной игре симметрия несколько необычная — вроде бы и не симметрия вовсе, однако, равенство камней в кучках, и «одинаковые» ходы, проводимые игроками очень ее напоминают.

На самом деле, нередкое явление: в зависимости от исходных данных одна и та же стратегия приносит успех то первому, то второму игроку.

3. Дополнение до фиксированного числа.

Другая идея выигрышной стратегии в играх — дополнение хода соперника до некоторого фиксированного числа, уменьшая каждым «совместным» ходом (т. е. ход первого и второго игрока) общее число элементов на некоторое постоянное число, что сводит игру к игре с меньшим числом элементов, т. е. более простой. Понятно, что победа в данной стратегии зависит от общего количества данных по условию элементов.

Рассмотрим пример такой стратегии на конкретной задаче

Задача. Двое играют в игру. Ходы, которые делаются по очереди, заключаются в том, что из кучки в 45 камней убирается любое число камней от 1 до 5. Выигрывает тот, кто возьмет последний камень. Кто выиграет в данной игре?

Решение: И опять выработку стратегии лучше начинать с **небольшого числа камешков.** Понятно, что если в нашей кучке меньше шести камней, тогда выиграет первый игрок: он первым своим ходом заберет все камни.
Если бы в нашей кучке было 6 камешков, тогда понятно, что второй выиграет, так как он забрал бы все оставшиеся камни после первого хода начинающего.
Если камней семь? Что делать тогда первому? Ему нужно забрать один камень и свести задачу к предыдущему случаю. Аналогично надо выработать стратегию игры и для 7, 8, 9,10,11 камней.
Когда камней 12, то понятно, что выиграет второй: как бы первый не ходил, он своим ходом может взять такое количество камней, чтобы осталось ровно 6. А в этом случае он выигрывает, как мы уже разобрали.
Итак, если число камней делится на 6, то выигрывает второй, если не делится, то первый.
В нашей задаче 45 камней. Поэтому выигрывает первый, беря из кучки три камня и оставляя 42 камня. Далее после его последующих ходов в кучке будет оставаться соответственно 36, 30, 24, 18, 12, 6, 0, таким образом,
последний камень забирает первый игрок.

4. Метод выигрышных позиций.

Этот метод основан на рассмотрении каждой позиции с точки зрения пользы для игрока, которому предстоит ход. Начинаем рассматривать с конца – с последнего хода, затем предпоследний и т.д.

Задача. Имеются две кучки конфет: в одной — 20, в другой — 21. За ход нужно съесть все конфеты в одной из кучек, а вторую разделить на две необязательно равные кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет?

Решение: Если мы решили использовать метод выигрышных позиций, то нам нужно найти эти выигрышные позиции. Чтобы их найти, рассмотрим простейшие случаи.
Простейшая выигрышная позиция для того игрока, кто ее создал: это 1 и 1.
Понятно, что в этом случае побеждает тот, кто ходит вторым, так как у первого игрока нет хода.
Очевидно, что позиция 2 и 1 выигрышная для первого и проигрышная для второго.
Если 3 и 1, тогда второй вновь с победой, как несложно убедиться простой проверкой, так как есть ровно два хода.
Когда в кучках 3 и 2, победа у первого (убираем 3, делим 2).
Если же 3 и 3, тогда победа вновь возвращается ко второму, что можно показать простым перебором и т. д.
Замечаем закономерность: **если в каждой из кучек по нечетному числу конфет, тогда позиция выигрышная для второго.**
Если же хотя бы в одной из кучек четное число конфет, то такая позиция выигрышная для первого.
Своим первым ходом он может съест кучку из 21 конфеты, а кучу с 20 конфетами разделить на две, в которых нечетное количество конфет в обеих кучках (например, 19 и 1). Заметим, что последняя позиция, когда две кучки, по одной конфете в каждой, выигрышная, т. е. последний ход сделает первый.

Выводы:

игровые задачи являются одним из самых мощных инструментов развития человеческого интеллекта.

Эти задачи проверяют не знания, а умение логически рассуждать, ориентироваться в необычных ситуациях, предвидеть и действовать.

Чтобы успешно решать задачи такого вида, надо уметь выделять их общие признаки, подмечать закономерности, выдвигать гипотезы, проверять их, строить цепочки рассуждений, делать выводы