

10 декабря 2014 года

Приуральскому району 84 года

День рождения нашей школы

Логарифмы и их свойства

«Развитие и образование ни одному человеку не могут быть даны или сообщены.

Всякий, кто желает к ним приобщиться, должен достигнуть этого собственной деятельностью, собственными силами, собственным напряжением»

(А. Дистервег)

Проверочные листы «Лови ошибку»:

$$1. \log_a 1 = a$$

$$2. \log_a 0 = 1$$

$$3. \log_a x y = \log_a x - \log_a y$$

$$4. \log_a \frac{x}{y} = \log_a x + \log_a y$$

$$5. \log_a x^p = \frac{1}{p} \log_a x$$

$$6. \log_{a^p} x = p \log_a x$$

$$7. a^{\log_x a} = x$$

Проверочные листы «Лови ошибку»:

№2

1) $\log_6 36 = 6$, так как $6 \cdot 6 = 36$;

2) $\log_4 \frac{1}{16} = 2$, так как $4^2 = \frac{1}{16}$;

3) $\log_{49} 7 = 7$, так как $49 = 7 \cdot 7$;

4) $0,3^{2\log_{0,3} 0,3} = 0,3^{\log_{0,3} 0,6} = 0,6$;

5) $\log_2 11 + \log_2 3 = \log_2 (11 + 3) = \log_2 14$;

6) $\frac{\ln 8}{\ln 4} = \frac{8}{4} = 2$;

7) $2\lg 2 + 3\lg 3 = \lg 4 + \lg 9 = \lg 36$.

ОТВЕТЫ К-1

$$1. \log_a a = 1$$

$$2. \log_a 1 = 0$$

$$3. \log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$4. \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$5. \log_a x^p = \frac{1}{p} \log_a x$$

$$6. \log_{a^p} x = \frac{1}{p} \log_a x$$

$$7. a^{\log_a x} = x$$

ОТВЕТЫ К-2

- - 1) $\log_6 36 = 2$, так как $6^2 = 36$;
 - 2) $\log_4 \frac{1}{16} = -2$, так как $4^{-2} = \frac{1}{16}$;
 - 3) $\log_{49} 7 = 0,5$, так как $49^{0,5} = 7$;
 - 4) $0,3^{2 \log_{0,3} 0,3} = 0,3^{\log_{0,3} 0,09} = 0,09$;
 - 5) $\log_2 11 + \log_2 3 = \log_2(11 \cdot 3) = \log_2 33$;
 - 6) $\frac{\ln 8}{\ln 4} = \frac{\ln 2^3}{\ln 2^2} = \frac{3 \ln 2}{2 \ln 2} = \frac{3}{2} = 1,5$;
 - 7) $2 \lg 2 + 3 \lg 3 = \lg 4 + \lg 27 = \lg 108$.

•

«Сегодня на уроке мы...»

- Будем решать показательные уравнения и неравенства.
- Будем решать иррациональные уравнения и неравенства.
- Познакомимся с понятием логарифма.
- Применять свойства логарифма при решении упражнений.
- Решать задания ЕГЭ, используя свойства и определение логарифма.

Доказательство свойств логарифмов:

1. Формула перехода к новому основанию и следствие из нее.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \Rightarrow \log_a a = \frac{1}{\log_c a} \quad \text{Доказательство:}$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{1}{\log_c a} \Rightarrow \log_a b \cdot \log_c a = 1 \Rightarrow \log_a a^{\log_c b} = \log_c b = 1.$$

Доказательство свойств логарифмов:

- $$2. \log_a a^{\alpha} b^{\beta} = \frac{\beta}{\alpha} \log_a b$$

Доказательство:

$$\log_a a^{\alpha} b^{\beta} = \frac{\log_a b^{\beta}}{\log_a a^{\alpha}} = \frac{\beta \log_a b}{\alpha \log_a a} = \frac{\beta}{\alpha} \log_a b. \text{ ч.т.д}$$

Дополнительные формулы:

1. $\log_a \log_b c = \log_b \log_a c$ Доказательство:

Если равны два числа, то равны и их функции (в т. ч. логарифмы)

$$\log_a \log_b c = \log_b \log_a c; \log_a c \cdot \log_b a = \log_b c \cdot \log_a b \quad \text{ч.т.д.}$$

2. $\log_a \overline{\log_b c} = \overline{\log_b c} \log_a a$ Доказательство:

$$\log_a \overline{\log_b c} = \overline{\log_b c} \log_a a \Rightarrow \overline{\log_b c} \log_a a = \overline{\log_b c} \log_a a \quad (: \overline{\log_b c})$$

$$\Rightarrow 1 = \overline{\log_b c} \log_a a \cdot \log_a a \quad 1 = 1. \text{ ч.т.д.}$$

Дополнительные формулы:

$$\text{З. } \log_x a \cdot \log_y b = \log_y a \cdot \log_x b.$$

Доказательство: $\left\{ \begin{array}{l} \log_b a = \frac{\log_x a}{\log_x b} \\ \log_b a = \frac{\log_y a}{\log_y b} \end{array} \right. \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \frac{\log_x a}{\log_x b} &= \frac{\log_y a}{\log_y b} \\ &= \log_x a \cdot \log_y b = \log_x b \cdot \log_y a. \end{aligned}$$

Решим уравнение:

$$\lg x^2 = 2 \Rightarrow 2\lg x = 2 \Rightarrow \lg x = 1 \Rightarrow x = 10, \text{ но при } x = -10$$

равенство верно, значит, потерян корень. Почему?

Найдем ОДЗ: $x^2 > 0$, т.е. $x \in (-\infty; 0); (0; \infty)$.

Допущена ошибка. Какая? Сужена область допустимых значений.

Правильное решение: $\lg x^2 = 2 \Rightarrow 2\lg|x| = 2 \Rightarrow \lg|x| = 1$
 $\Rightarrow |x| = 10; x = \pm 10$

Особенности:

● Рассмотрим формулу $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$. Найдем ОДЗ: а) левой и

б) правой частей: а) $xy > 0, a > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases} \Rightarrow$ 1-я и 3-я четверти;

б) $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow$ 1-я четверть. ОДЗ сужена, значит, формула должна быть такой:

$$\log_a(xy) = \log_a|x| + \log_a|y| \Rightarrow$$

ОДЗ правой части – вся координатная плоскость с выколотыми осями координат.

Аналогично: 2. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a|x| - \log_a|y|$ 3. $\log_{a^{2k}} b^{2n}$

Задание С1

• Найдите значение функции $f(x) = 10^{\lg \frac{x^3-3x}{x+5} - \log_{0,1}(x+5)}$ в точке максимума.

Решение.

$$\lg \frac{x^3-3x}{x+5} - \log_{10^{-1}}(x+5) = \lg \frac{x^3-3x}{x+5} + \lg(x+5) = \lg(x^3-3x) - \lg(x+5) + \lg(x+5) = \lg(x^3-3x).$$

$$f(x) = 10^{\lg(x^3-3x)} = x^3 - 3x \quad \text{ОДЗ: } \begin{cases} \frac{x^3-3x}{x+5} > 0 \\ x+5 > 0 \end{cases} \Rightarrow x^3 - 3x > 0$$

Точки экстремума: $f'(x) = 3x^2 - 3$; $x_1 = 0$ - не входит в ОДЗ; $x_2 = 1$ - не входит в ОДЗ; $x_3 = -1 \in \text{ОДЗ}$, $f(-1) = 2$

- Ответ: 2.

Задание 2 С1.

- Сравнить: $2^{\log_5 3} + \sqrt{2}$ и $3^{\log_5 2} + \sqrt[3]{3}$.

Решение:

Т.к. $2^{\log_5 3} = 3^{\log_5 2}$, сравним $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{3}$.

Возведем обе части в шестую степень.

Получим: $(\sqrt{2})^6$ и $(\sqrt[3]{3})^6$; 2^3 и 3^2 ; $8 < 9 \Rightarrow$
 $2^{\log_5 3} + \sqrt{2} < 3^{\log_5 2} + \sqrt[3]{3}$.

СЗ 2015 г И.В. Яценко

● *Решить неравенство*

$$\log_{|x-1|}(x-2)^2 \leq 2.$$

Решение. Рассмотрим два случая: $|x-1| > 1$ и $|x-1| < 1$.

Первый случай. $\begin{cases} |x-1| > 1, \\ 0 < (x-2)^2 \leq (x-1)^2; \end{cases} \begin{cases} \begin{cases} x < 0 \\ x > 2 \end{cases}; x > 2 \\ 2x-3 \geq 0 \end{cases}$

Второй случай.

$$\begin{cases} 0 < |x-1| < 1, \\ (x-2)^2 \geq (x-1)^2 > 0; \end{cases} \begin{cases} \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 1 < x < 2, \\ 2x-3 \leq 0; \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 1 \text{ или } 1 < x \leq \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Решение неравенства: $0 < x < 1$, $1 < x \leq \frac{3}{2}$ или $x > 2$.

Ответ: $(0; 1)$; $(1; \frac{3}{2}]$; $(2; \infty)$

С 5

- Найдите все значения a при которых область определения функции

$y = \left(\sqrt[3]{x} \cdot x^{5 \log_x a} + (\sqrt[3]{a})^{3x+1} \cdot \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} \cdot (\sqrt[3]{a})^{16} - x^{\frac{1}{3}+x \log_x a} \right)^{\frac{1}{4}}$ содержит ровно два целых числа.

Решение. $y = \left(\sqrt[3]{x} \cdot x^{5 \log_x a} + (\sqrt[3]{a})^{3x+1} \cdot \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} \cdot (\sqrt[3]{a})^{16} - x^{\frac{1}{3}+x \log_x a} \right)^{\frac{1}{4}} =$

$$\sqrt[4]{x^{\frac{1}{3}+x \log_x a^5} + a^x \cdot \sqrt[3]{2a} - \sqrt[3]{2a} \cdot a^5 - x^{\frac{1}{3}+x \log_x a}} = \sqrt[4]{x^{\frac{1}{3}}(x^{\log_x a^5} - x^{\log_x a^x}) + \sqrt[3]{2a}(a^x - a^5)}$$

$$= \sqrt[4]{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2a}) \cdot (a^5 - a^x)} \cdot \text{ОДЗ:} \begin{cases} a > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \\ (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2a}) \cdot (a^5 - a^x) \geq 0 \end{cases}$$

При $a \in (0; 1)$ последнее неравенство системы эквивалентно неравенству $(x - 2a)(x - 5) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 2]$

При $a = 1$ это неравенство верно для $x \in (0; 1) \cup (1; \infty)$ - тоже не подходит.

При $a > 1$ $a \in [2; 5]$ или $[5; 2a]$, если $2a > 5$.

Область определения будет содержать ровно два целых числа, если $\begin{cases} 2 \in [3; 4] \\ 2 \in [6; 7] \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [1,5; 2] \\ [3; 3,5) \end{cases}$$

Ответ: $[2; 5] \cup [5; 2a]$