10 декабря 2014 года

Приуральскому району 84 года

День рождения нашей школы

Логарифмы
и их свойства

«Развитие и образование ни одному человеку не могут быть даны или сообщены.
Всякий, кто желает к ним приобщиться, должен достигнуть этого собственной деятельностью, собственными силами, собственным напряжением»

(А. Дистервег)

№1

Проверочные листы «Лови ошибку»:

1. $\log_a 1 = a$
2. $\log_a 0 = 1$
3. $\log_a x\,y = \log_a x - \log_a y$
4. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x + \log_a y$
5. $\log_a x^p = \frac{1}{p} \log_a x$
6. $\log_{a^p} x = p \log_a x$
7. $a^{\log_x a} = \mathrm{x}$

Проверочные листы «Лови ошибку»:

№2

1) $\log_6 36 = 6$, так как $6 \cdot 6 = 36$;

2) $\log_4 \frac{1}{16} = 2$, так как $4^{2} = \frac{1}{16}$;

3) $\log_{49} 7 = 7$, так как $49 = 7 \cdot 7$;

4) $0{,}3^{2\log_{0,3} 0,3} = 0{,}3^{\log_{0,3} 0,6} = 0{,}6$;

5) $\log_2 11 + \log_2 3 = \log_2 (11+3) = \log_2 14$;

6) $\frac{\ln 8}{\ln 4} = \frac{8}{4} = 2$;

7) $2\lg 2 + 3\lg 3 = \lg 4 + \lg 9 = \lg 36$.

Ответы К-1

$$1.\ \log_a a = 1$$

$$2.\ \log_a 1 = 0$$

$$3.\ \log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$4.\ \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$5.\ \log_a x^p = \frac{1}{p} \log_a x$$

$$6.\ \log_{a^p} x = \mathrm{p} \log_a x$$

$$7.\ a^{\log_a x} = x$$

Ответы К-2

- 1) $\log_6 36 = 2$, так как $6^2 = 36$;
- 2) $\log_4 \frac{1}{16} = -2$, так как $4^{-2} = \frac{1}{16}$;
- 3) $\log_{49} 7 = 0{,}5$, так как $49^{0{,}5} = 7$;
- 4) $0,3^{2\log_{0,3} 0.3} = 0,3^{\log_{0,3} 0,09} = 0,\ 09$;
- 5) $\log_2 11 + \log_2 3 = \log_2(11 \cdot 3) = \log_2 33$;
- 6) $\frac{\ln 8}{\ln 4} = \frac{ln2^3}{ln2^2} = \frac{3ln2}{2ln2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$;
- 7) $2\lg 2 + 3\lg 3 = \lg 4 + \lg 27 = \lg 108$.

«Сегодня на уроке мы…»

- Будем решать показательные уравнения и неравенства.
- Будем решать иррациональные уравнения и неравенства.
- Познакомимся с понятием логарифма.
- Применять свойства логарифма при решении упражнений.
- Решать задания ЕГЭ, используя свойства и определение логарифма.

Доказательство свойств логарифмов:

1. Формула перехода к новому основанию и следствие из нее.

$$\square_{\square} b = \frac{\square_{\square}\square}{\square_{\square}\square} \Rightarrow \square_{\square}\square = \frac{1}{\square_{\square}\square}.$$

Доказательство:

$$\square_{\square} b = \frac{\square_{\square}\square}{\square_{\square}\square} = \frac{1}{\square_{\square}\square} \Rightarrow \square_{\square} b \cdot \square_{\square}\square = 1 \Rightarrow log_b a^{logab} = \square_{\square}\square = 1.$$

Доказательство свойств логарифмов:

- $$2.\ log_{a^{\alpha}} b^{\beta} = \frac{\beta}{\alpha} log_a b$$

Доказательство:

$$log_{a^{\alpha}} b^{\beta} = \frac{log_a b^{\beta}}{log_a a^{\alpha}} = \frac{\beta\ log_a b}{\alpha\ log_a a} = \frac{\beta}{\alpha} log_a b.$$ ч.т.д

Дополнительные формулы:

1. *Доказательство:*

Если равны два числа, то равны и их функции (в т. ч. логарифмы)

ч.т.д.

2. *Доказательство:*

=> 1 = log · log ; 1 = 1. ч.т.д.

Дополнительные формулы:

3. $log_x a \cdot log_y b = log_y a \cdot log_x b.$

Доказательство: $\begin{cases} log_b a = \dfrac{log_x a}{log_x b} \\ log_b a = \dfrac{log_y a}{log_y b} \end{cases} =>$

$$\frac{log_x a}{log_x b} = \frac{log_y a}{log_y b}$$

$= log_x a \cdot log_y b = \ log_x b \cdot log_y a.$

Решим уравнение:

- $\lg x^2 = 2 \Rightarrow 2\lg x = 2 \Rightarrow \lg x = 1 \Rightarrow x = 10$, но при $x = -10$

равенство верно, значит, потерян корень. Почему? Найдем ОДЗ: $x^2 > 0$, т.е. $x \in (-\infty; 0); (0; \infty)$. Допущена ошибка. Какая? Сужена область допустимых значений.

Правильное решение: $\lg x^2 = 2 \Rightarrow 2\lg|x| = 2 \Rightarrow \lg|x| = 1 \Rightarrow |x| = 10$; $x = \pm 10$

Особенности:

- Рассмотрим формулу $\log_a(xy)$=$\log_a x + \log_a y$. Найдем ОДЗ: а) левой и

б)правой частей: а) xy >0, a >0 => $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$ U $\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$=> 1- я и 3-я четверти ;

б) $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$=> 1-я четверть. ОДЗ сужена, значит, формула должна быть такой:

$\log_a(xy)= \log_a|x| + \log_a|y|$=>

ОДЗ правой части – вся координатная плоскость с выколотыми осями координат.

Аналогично: 2. $log_a\frac{x}{y} = log_a|x|$ -$log_a|y|$ 3.$log_{a^{2k}} b^{2n}$

Задание С1

. ***Найти значение функции*** ***f(x)=*** $\mathbf{10^{lg\frac{x^3-3x}{x+5}-log_{0,1}(x+5)}}$ ***в точке максимума.***

Решение.

$$lg\,\frac{x^3-3x}{x+5}-\log_{10^{-1}}(x+5)=lg\,\frac{x^3-3x}{x+5}+\lg(x+5)=lg(x^3-3x)-\lg(x+5)+\lg(x+5)=$$

$$lg(x^3-3x).$$

$f(x)=10^{\lg(x^3-3x)}=x^3-3x$ ОДЗ: $\begin{cases}\frac{x^3-3x}{x+5}>0\\ x+5>0\end{cases}$ $=>$ $x^3-3x>0$

Точки экстремума: *f'(x) = 3x²-3; x₁= 0 - не входит в ОДЗ; x₂=1-не входит в ОДЗ; x₃=-1* ϵ *ОДЗ, f(-1)=2*

- Ответ: 2.

Задание 2 С1.

- ***Сравнить:*** $\mathbf{2^{log_5 3} + \sqrt{2}}$ ***и*** $\mathbf{3^{log_5 2} + \sqrt[3]{3}.}$

Решение:

Т.к. $2^{\log_5 3} = 3^{\log_5 2}$, сравним $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{3}$.

Возведем обе части в шестую степень.

Получим: $\left(\sqrt{2}\right)^6$ v $\left(\sqrt[3]{3}\right)^6$; 2^3 v 3^2; $8 < 9 \Rightarrow$

$2^{\log_5 3} + \sqrt{2} < 3^{\log_5 2} + \sqrt[3]{3}.$

С3 2015 г И.В. Ященко

- **_Решить неравенство_**

$$log_{|x-1|}(x-2)^2 \le 2.$$

Решение. Рассмотрим два случая: $|x-1| > 1$ и $|x-1| < 1$.

Первый случай. $\begin{cases} |x-1| > 1, \\ 0 < (x-2)^2 \le (x-1)^2 \end{cases}$; $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 2 \end{array}\right. \\ 2x-3 \ge 0 \end{cases}$ $; x > 2$

Второй случай.

$\begin{cases} 0 < |x-1| < 1, \\ (x-2)^2 \ge (x-1)^2 > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 0 < x < 1, \\ 1 < x < 2, \end{array}\right. \\ 2x-3 \le 0; \end{cases}$ $=> 0 < x < 1$ или $1 < x \le \frac{3}{2}$.

Решение неравенства: $0 < x < 1$, $1 < x \le \frac{3}{2}$ или $x > 2$.

Ответ: $(0; 1); (1; \frac{3}{2}]; (2; \infty)$

С 5

- ***Найдите все значения а при которых область определения функции***

$y = \left(\sqrt[3]{x}\ \cdot x^{5\log_x a} + (\sqrt[3]{a})^{3x+1}\cdot\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2}\cdot(\sqrt[3]{a})^{16} - x^{\frac{1}{3}+x\log_x a}\right)^{\frac{1}{4}}$ содержит ровно два целых числа.

Решение. $y = \left(\sqrt[3]{x}\ \cdot x^{5\log_x a} + (\sqrt[3]{a})^{3x+1}\cdot\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2}\cdot(\sqrt[3]{a})^{16} - x^{\frac{1}{3}+x\log_x a}\right)^{\frac{1}{4}} =$

$\sqrt[4]{x^{\frac{1}{3}+x\log_x a^5} + a^x\cdot\sqrt[3]{2a} - \sqrt[3]{2a}\cdot a^5 - x^{\frac{1}{3}+x\log_x a}} = \sqrt[4]{x^{\frac{1}{3}}\left(x^{\log_x a^5} - x^{\log_x a^x}\right) + \sqrt[3]{2a}(a^x - a^5)}$

$= \sqrt[4]{\left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2a}\right)\cdot(a^5 - a^x)}$. *ОДЗ:* $\begin{cases} a > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \\ \left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2a}\right)\cdot(a^5 - a^x) \geq 0 \end{cases}$

При $a \in (0; 1)$ последнее неравенство системы эквивалентно неравенству $(x - 2a)(x - 5) \geq 0 <=> x \in ($ -∞; 2

При $a = 1$ это неравенство верно для $x \in (0; 1) \cup (1; \infty)$- тоже не подходит.

При $a > 1$ $x \in [2a; 5]$ или $[5; 2a]$, если $2a > 5$).

Область определения будет содержать ровно два целых числа, если $\left[\begin{array}{l} 2a \in (3; 4] \\ 2a \in [6; 7) \end{array}\right.$

$<=> \left[\begin{array}{l} a \in (1,5; 2] \\ a \in [3; 3,5) \end{array}\right.$ **Ответ:** [illegible]