ГЕРЦЕНОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

1797

Выпускная квалификационная работа на тему:

# «Влияние Работ Диофанта Александрийского на дальнейшее развитие математики»

# Диофант Александрийский

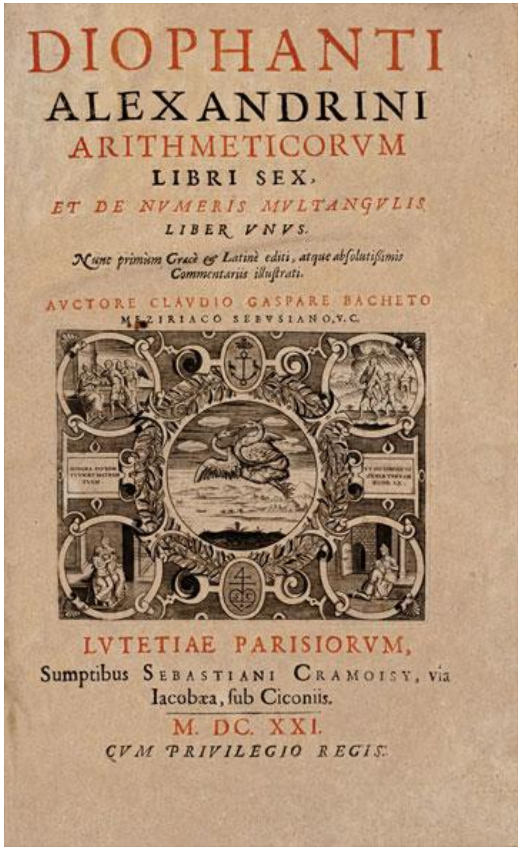
# Задачи данной работы:

- Эволюция задач Диофанта, их новые решения и новые способы трактовки;
- Анализ его влияния на дальнейшее развитие математики;
- Проверка объективности и точности сведений;

# Письмо Иоганна Мюллера (по прозвищу Региомонтан)

«Я обнаружил сейчас в Венеции Диофанта, греческого арифметика, который еще не переведен на латинский язык. Всего обнаружено шесть книг, которые сейчас находятся в моих руках, однако в своем предисловии он обещает написать тринадцать. Если это произведение, которое в самом деле является выдающимся и очень трудным, удастся разыскать полностью, то я позабочусь о том, чтобы перевести его на латинский язык, для этого моих познаний в греческом, которые я приобрел в доме почтеннейшего господина, будет достаточно. Настоятельно прошу Вас разузнать, не найдется ли у Ваших знакомых полного текста этого сочинения. Ведь в Вашем городе Ферраре проживает несколько знатоков греческой литературы, у которых среди других могут быть и рукописи этого сорта.»

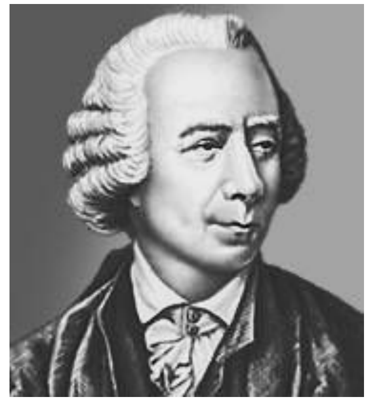
# Переводы «Арифметики»




- Арабский перевод Абул Вефы (X-XI вв.)
- Размещение143 задач «Арифметики» в знаменитой «Алгебре» Рафаэля Бомбелли (1572)
- Первый перевод на латынь сделан Ксилиандром (1575)
- Полный латинский перевод с комментариями «*Арифметики»,* сделанный Баше де Мезириаком (1621)

# «Арифметика» оказала влияние на таких известных математиков, как:

Пьер Ферма



Леонард Эйлер

Карл Якоби


Франсуа Виет

Анри Пуанкаре

Диофант это первый математик, который ввёл алгебраические обозначения, а также буквенное обозначение для неизвестного; способы перемножения функций с ним от -6 до 6 степеней

- первая степень — ς;
- вторая степень — $\Delta^{\tilde{\upsilon}}$ от Δύναμις — «*дюнамис*», что означает сила, степень;
- третья степень — $K^{\tilde{\upsilon}}$ от Κύβος — «*кубос*», т.е. куб;
- четвёртая степень — $\Delta^{\tilde{\upsilon}}\Delta$ от Δύναμοδύναμις — «*дюнамодюнамис*», т.е. квадратоквадрат;
- пятая степень — $\Delta K^{\tilde{\upsilon}}$ от Δύναμοκύβος — «*дюнамокубос*», т.е. квадратокуб;
- шестая степень — $K^{\tilde{\upsilon}}K$ от Κύβοκύβος — «*кубокубос*», т.е. кубокуб.
- Свободный член, или $x^0$, Диофант обозначал символом М.

Впервые в Европе вводятся знаки операций и знак равенства .

В связи с этим появляются отрицательные числа и правила знаков:

$$(-)\cdot(-) = (+),$$

$$(-)\cdot(+) = (-),$$

а также операция вынесения общего множителя за скобки:

$$ax+bx = (a+b)x.$$

Формулирование «Великой теоремы» Ферма на основе второй книги «Арифметики» задачи №8

$$X^2 + Y^2 = a^2 ,$$

в котором Диофант принимает $a^2 = 16$. Рациональными его решениями будут, например, $(0,a)$ и $(0,-a)$. Чтобы найти другие решения Диофант делает подстановку

$$X = x, \quad Y = kx - a.$$

(Невозможно разложить куб на два куба, или же биквадрат на два биквадрата и, вообще, никакую степень превосходящую квадрат, на две степени с тем же показателем. Я открыл этому поистине чудесное доказательство, но эти поля для него слишком малы);

Нахождение рациональных точек на эллиптической кривой.
Для таких задач Диофант впервые использует методы касательной и секущей. Из задачи №24 и №26 Четвёртой книги.

Задача $\mathrm{IV}_{24}$ эквивалентна системе

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = a, \\ X_1 X_2 = Y^3 - Y, \end{cases}$$

которая определяет пространственную эллиптическую кривую $L$.
Задача $\mathrm{IV}_{26}$ эквивалентна системе

$$\begin{cases} X_1 X_2 + X_1 = Y_1^3, \\ X_1 X_2 + X_2 = Y_2^3. \end{cases}$$

Диофант делает подстановку

$$X_1 = \beta^3 x, \qquad X_2 = x^2 - 1, \; Y_1 = \beta x \; (\beta = 2),$$

Которое обращает первое уравнение в тождество, а второе принимает вид

$$\beta^3 x^3 + x^2 - \beta^3 x - 1 = Y_2^3.$$

При решении задачи №19 из Третьей книги (необходимо найти четыре таких числа, чтобы квадрат суммы всех четырёх оставался квадратом при вычитании или прибавлении одного из этих чисел)

$$(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)^2 \pm X_i = \square$$

Приходится прибегать к свойствам прямоугольных треугольников с рациональными сторонами, опираясь на решение следующего уравнения

$$x^2 + y^2 = z^2$$

# Теорема Диофанта

Если $p$ и $q$ представимы в виде суммы двух точных квадратов, то их произведение тоже представимо в виде суммы двух квадратов
Если

$$p = a^2 + b^2 \text{ и } q = c^2 + d^2,$$

то

$$pq = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2$$

Где $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2 = pq$ – тождество Диофанта

На основе задач Диофанта №1 и №2 Четвёртой книги, гласящих, что:

*Данное число можно разложить на два куба, сумма сторон которых задана и найти два таких числа, чтобы была задана их разность, а также разность их кубов.*

Эти условия эквивалентны:

$$x^3 + y^3 = a^3 - b^3,$$

где $a>b>0$ и $x$, $y$ – положительные.

Виет ставит ещё две аналогичные задачи:

1) $x^3 - y^3 = a^3 + b^3$ $(x>y>0,\ a>0,\ b>0)$,

2) $x^3 - y^3 = a^3 - b^3$ $(x>y>0,\ a>b>0)$.

Все эти задачи Виет решает с помощью метода касательной Диофанта.

Эйлер обращается к диофантову анализу.

Он совершенствует свои методы и впервые применяет метод секущей Диофанта (Задача №26 Четвёртой книги) в случае, если известны две конечные рациональные точки кривой.
А именно, пусть

$$F_3(\alpha) = f^2, \quad F_3(\beta) = g^2;$$

тогда Эйлер полагал

$$y = f + (g - f)(x - \alpha)/(\beta - \alpha) \ \text{ или } \ y = g + (f - \mathrm{g})(x - \beta)/(\alpha - \beta),$$

что равносильно проведению прямой через точки $(\alpha, f)$ и $(\beta, g)$. После этого он находил новое рациональное значение $x$ из уравнения

$$F_3(x) = f + (g - f)\,(x - \alpha)^2 /(\beta - \alpha)$$

Знаменитая теорема сложения эллиптических интегралов, открытая Эйлером.

Пусть дана кривая

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

И точка $A(x,y)$ на ней. Обозначим

$$\Pi(A) = \int_{\infty}^{x} \frac{dx}{y}.$$

Теорема Эйлера утверждает, что для любых точек $A(x,y)$ *и* $B(x_1,y_1)$ кривой Г существует точка $C(x_2,y_2)$ этой кривой, что

$$\Pi(A) + \Pi(B) = \Pi(C).$$

*Вторая теорема Эйлера* утверждает, что если задано уравнение

$$\Pi(D) = n\Pi(A),$$

где $A$ и $D$ — точки кривой Г, а $n$ — любое целое число, положительное или отрицательное, то координаты точки $D$ рационально выражаются через координаты точки $A$.

В частности, если $n = 2$, то получаем уравнение

$$\Pi(D) = 2\Pi(A).$$

Соотношение называют иногда *теоремой умножения эллиптических интегралов*.

Если теперь точки $A$ и $B$ рациональные, то рациональными будут точки $C$ и $D$, т.е. благодаря теореме Эйлера из двух или одной рациональных точек кривой Г можно получать новые её рациональные точки.

Эту-то связь теоремы сложения с диофантовым анализом и отметил впервые знаменитый немецкий математик Карл Густав Якоб Якоби. Он это сделал в своей статье «О применении теории эллиптических и абелевых интегралов в диофантовом анализе»

Пуанкаре же начал искать, каким способом можно связать между собой и систематизировать проблемы диофантова анализа. Для этого он решил провести новую классификацию многочленов от двух переменных с рациональными коэффициентами.

Согласно Пуанкаре две кривые

$$f_1(x, y) = 0 \quad \text{и} \quad f_2(x, y) = 0$$

*эквивалентны* или *принадлежат одному классу*, если от одной из них к другой можно перейти путём бирационального преобразования с рациональными коэффициентами. Так, например, любые две прямые

$$ax + by + c = 0 \quad \text{и} \quad a'x + b'y + c' = 0,$$

Чтобы показать это, Пуанкаре выбирает фиксированную рациональную точку $F$, лежащую вне обеих прямых, и ставит в соответствие каждой точке $A$ первой прямой точку $A'$ второй, которая получится при пересечении её с прямой $AF$ (рис. 1). Из этого следует, что все прямые с рациональными коэффициентами принадлежат одному классу.

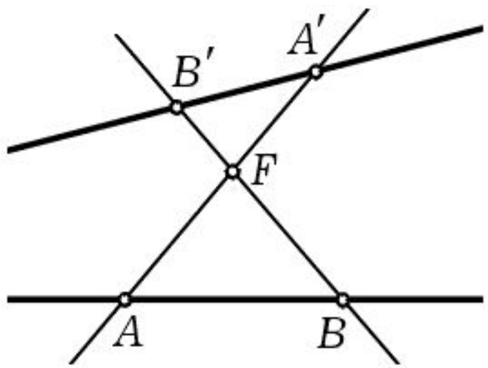



Рис. 1.

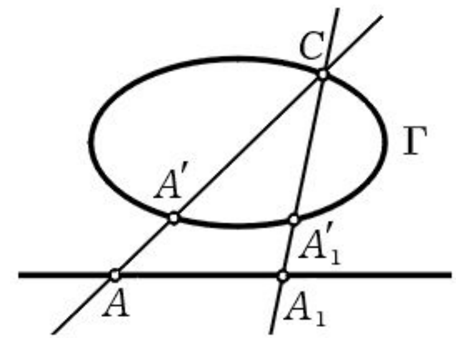



Рис. 2.

После этого он переходит к коническим сечениям, т.е. кривым второго порядка, и показывает, что если на коническом сечении $f(x, y) = 0$ (с целыми или рациональными коэффициентами) имеется хотя бы одна рациональная точка $C$, то оно эквивалентно рациональной прямой. Для этого он ставит в соответствие каждой точке $A$ фиксированной рациональной прямой $L$ точку $A'$ конического сечения Г так, чтобы точки $A$, $A'$ и $C$ лежали на одной прямой (рис. 2). Этот результат, был установлен ещё Диофантом.

Выпускная квалификационная работа на тему:

# «Влияние Работ Диофанта Александрийского на дальнейшее развитие математики»