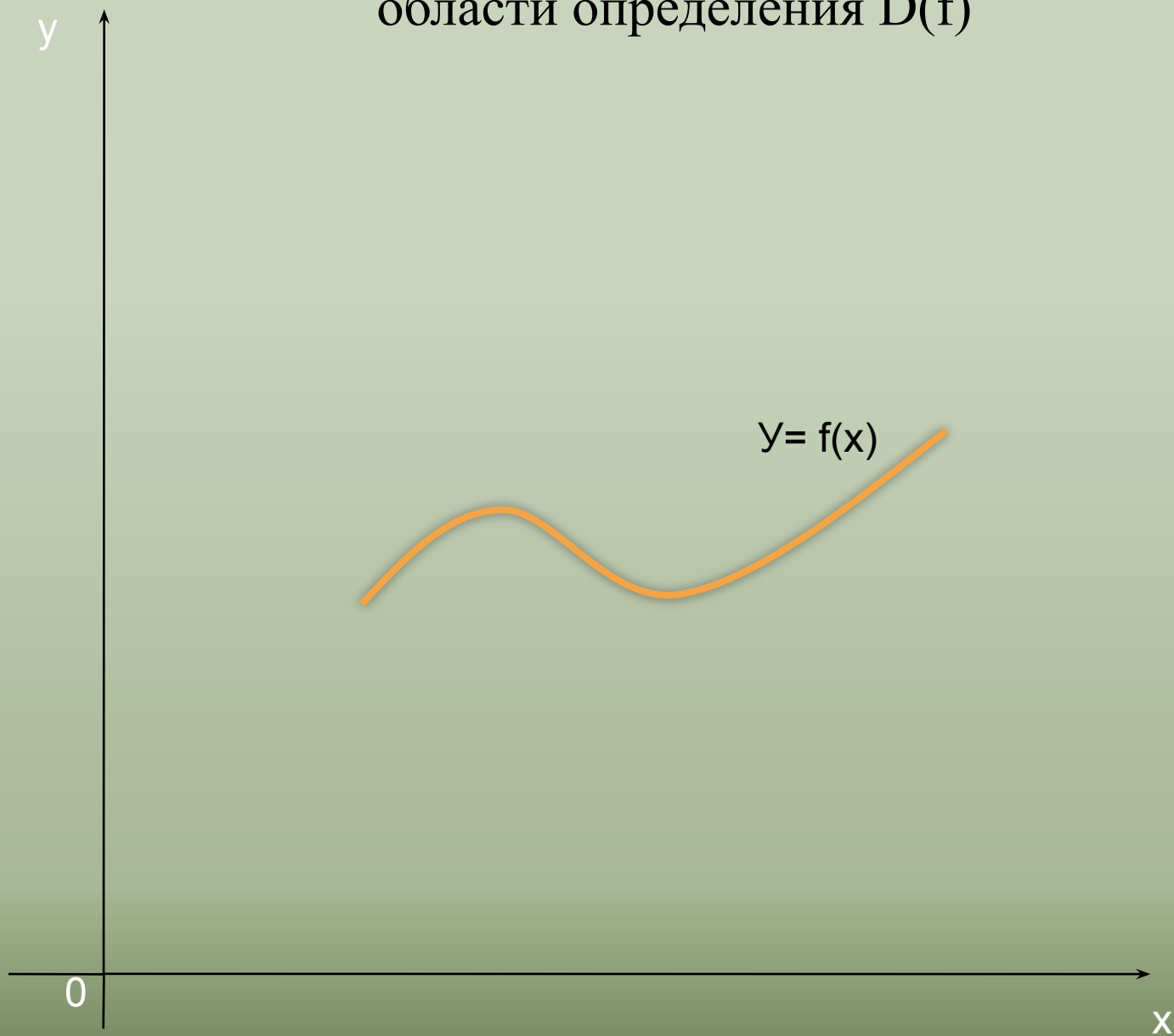




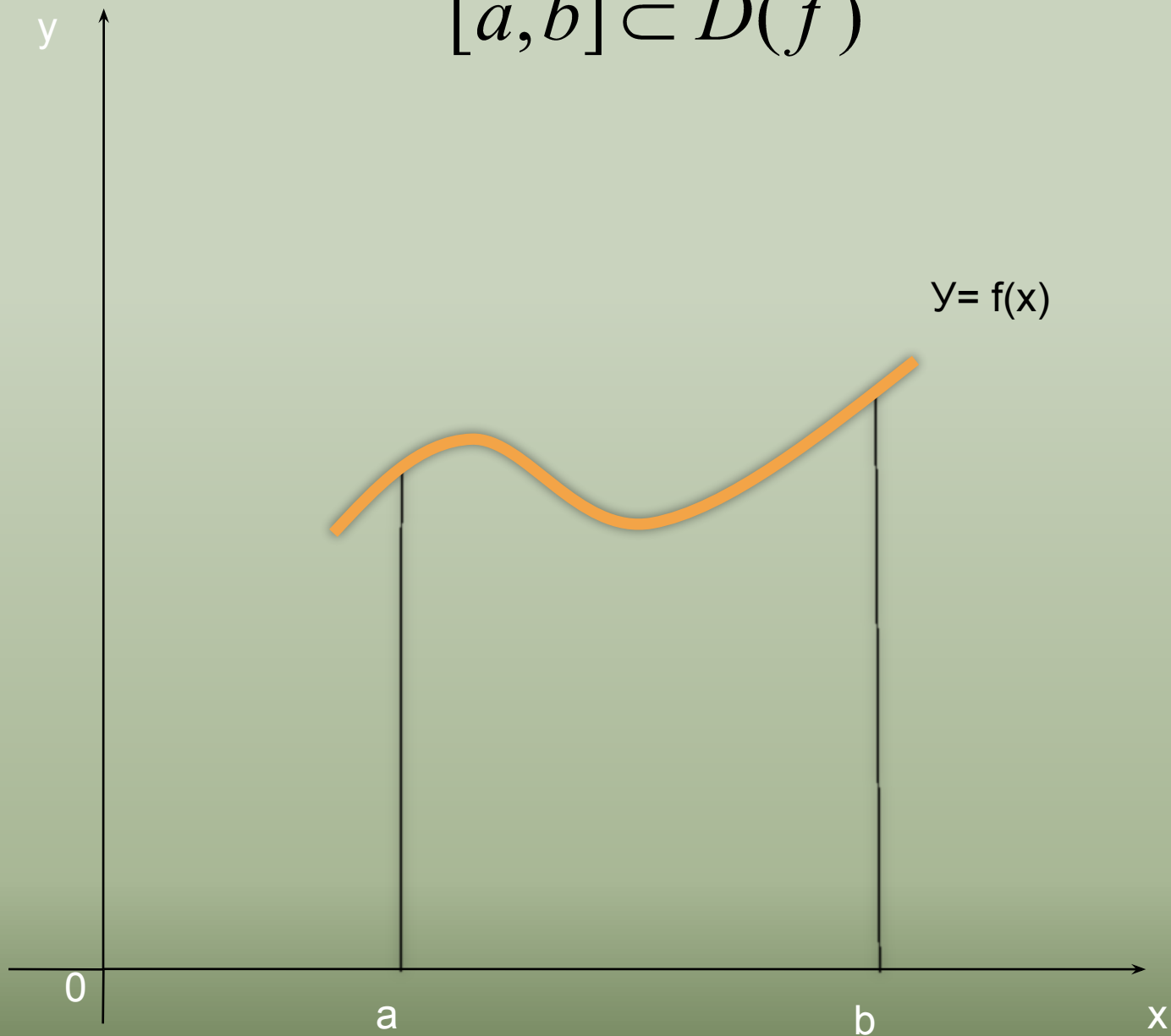
# Введение определѐнного интеграла

Пусть графически задана функция  $f(x)$ , непрерывная на своей области определения  $D(f)$

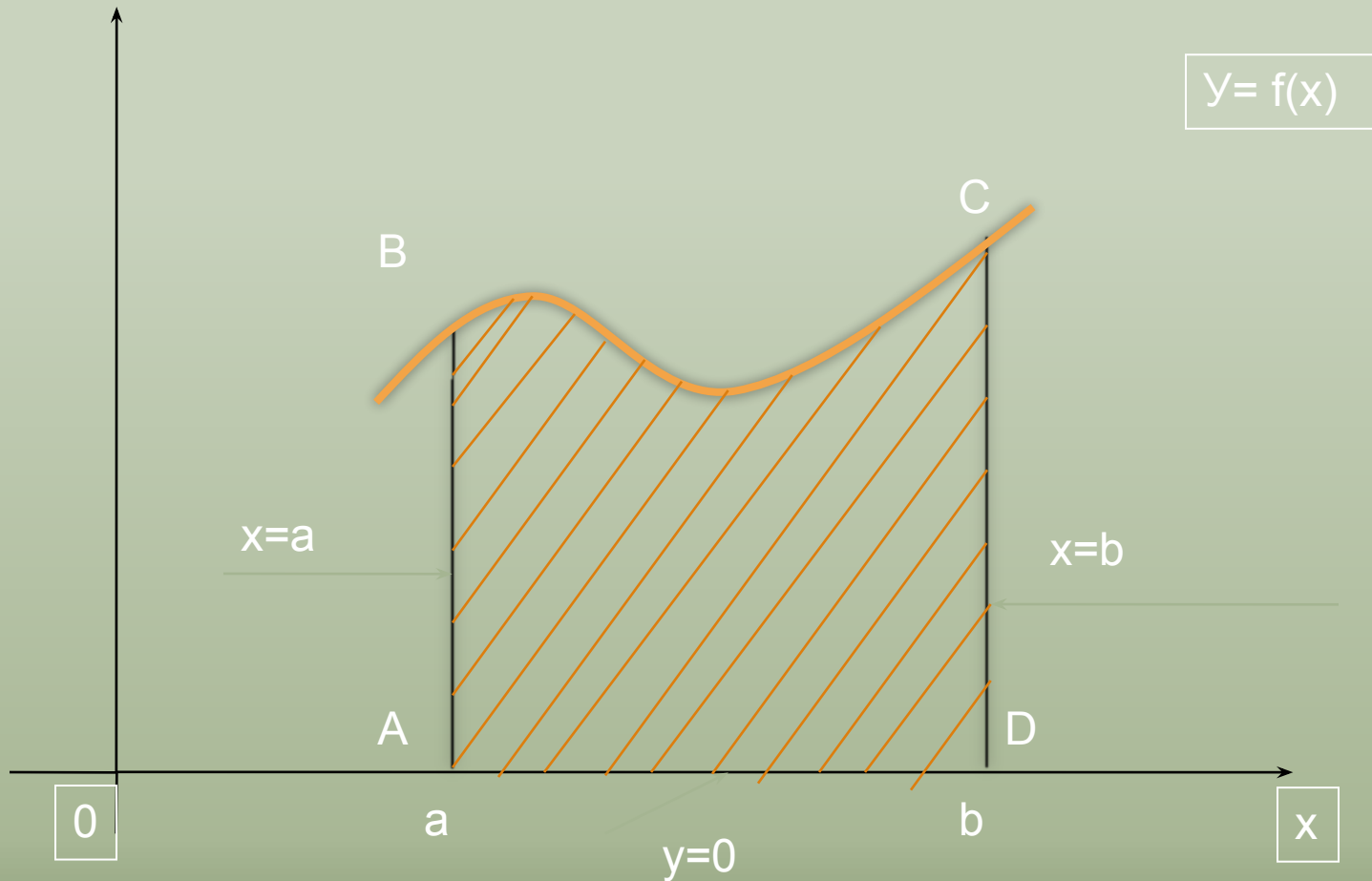


Будем рассматривать её на отрезке

$$[a, b] \subset D(f)$$

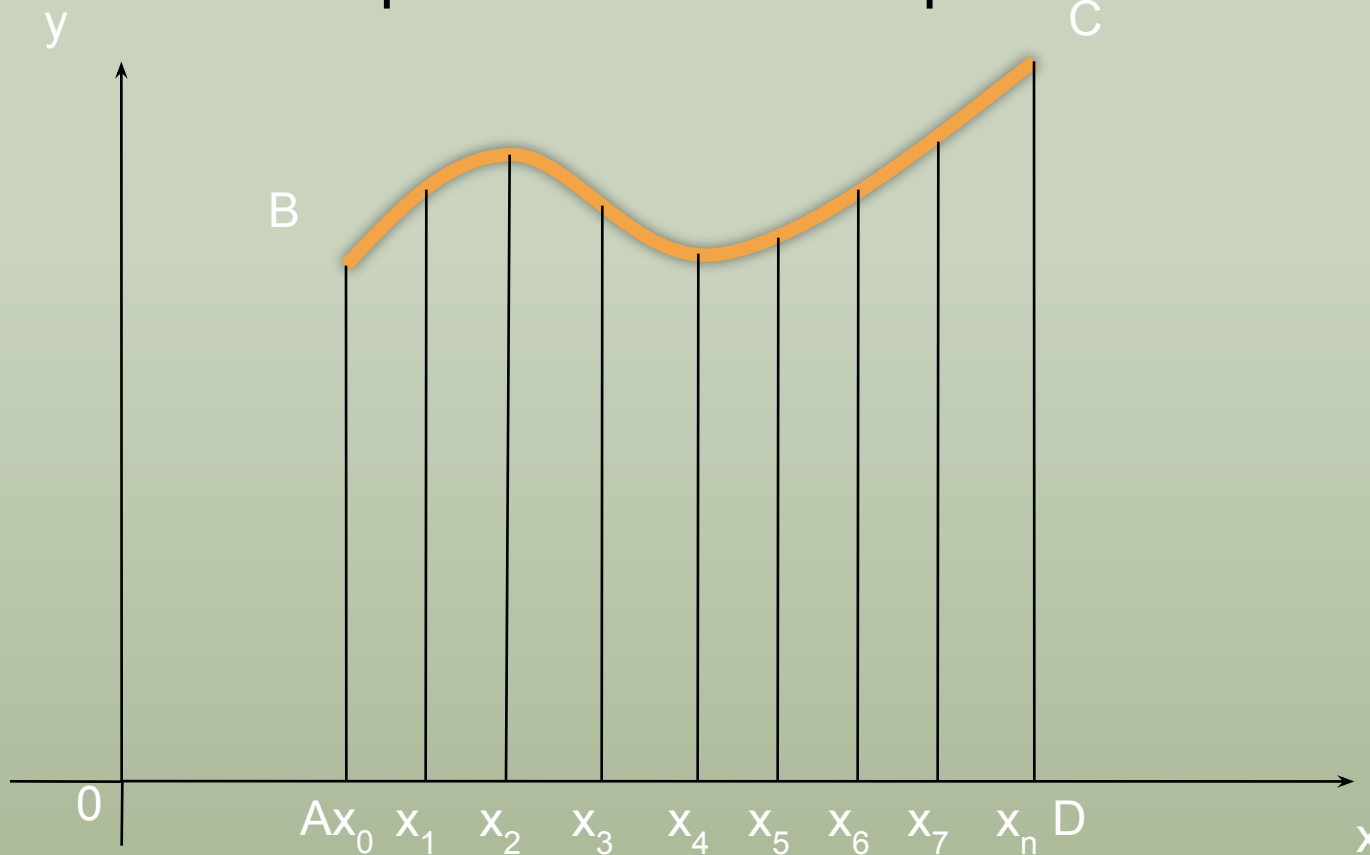


Построим фигуру, ограниченную графиком функции  $y = f(x)$ , прямыми  $x = a$ ,  $x = b$  и  $y = 0$ . Назовём её криволинейной трапецией ABCD



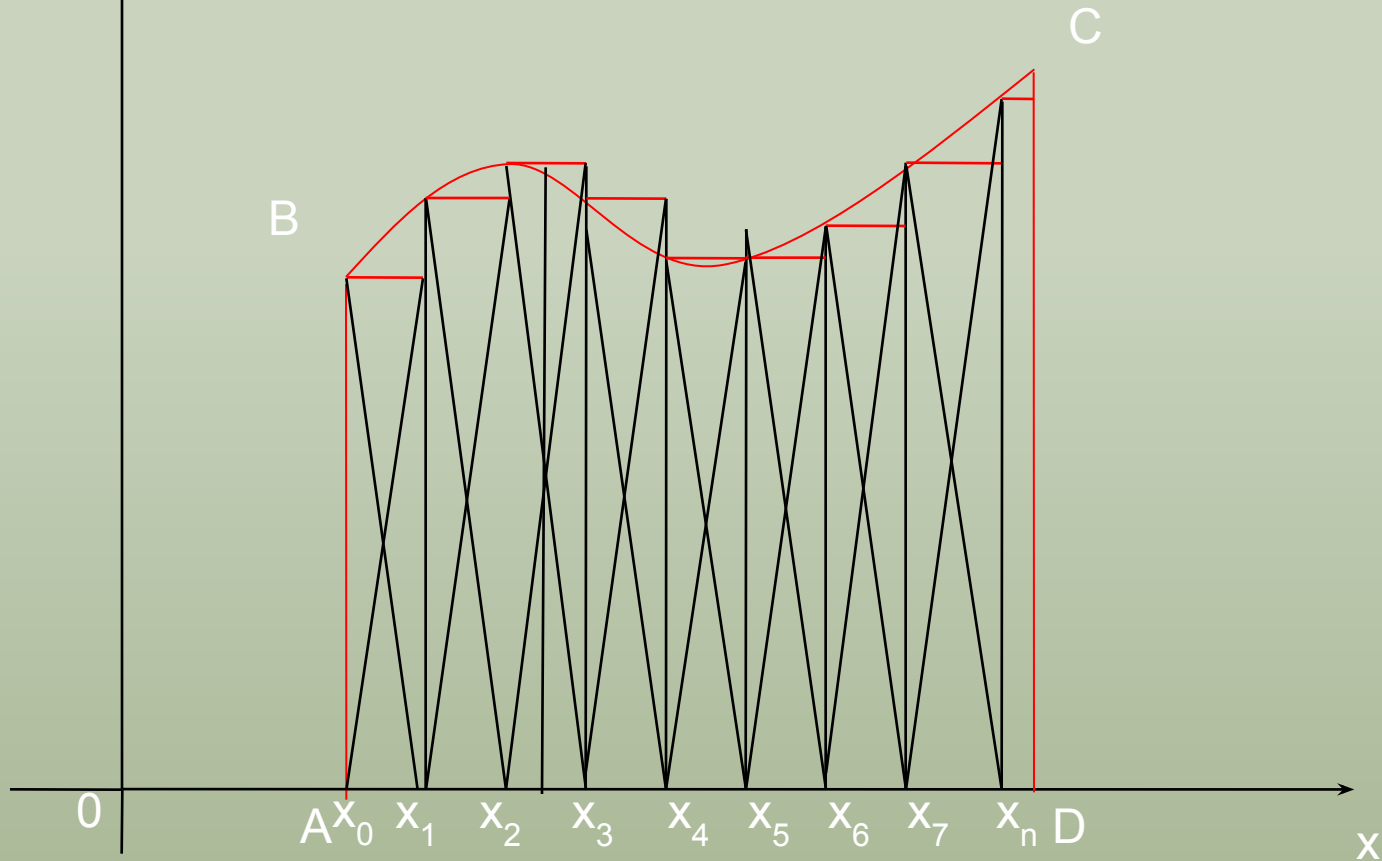
Поставим задачу нахождения её площади  $S$

Разделим основание  $[AD]$  трапеции  $ABCD$  точками  $x_0 = a; x_1; x_2; \dots; x_n = b$  ( $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < x_n = b$ ) произвольным образом

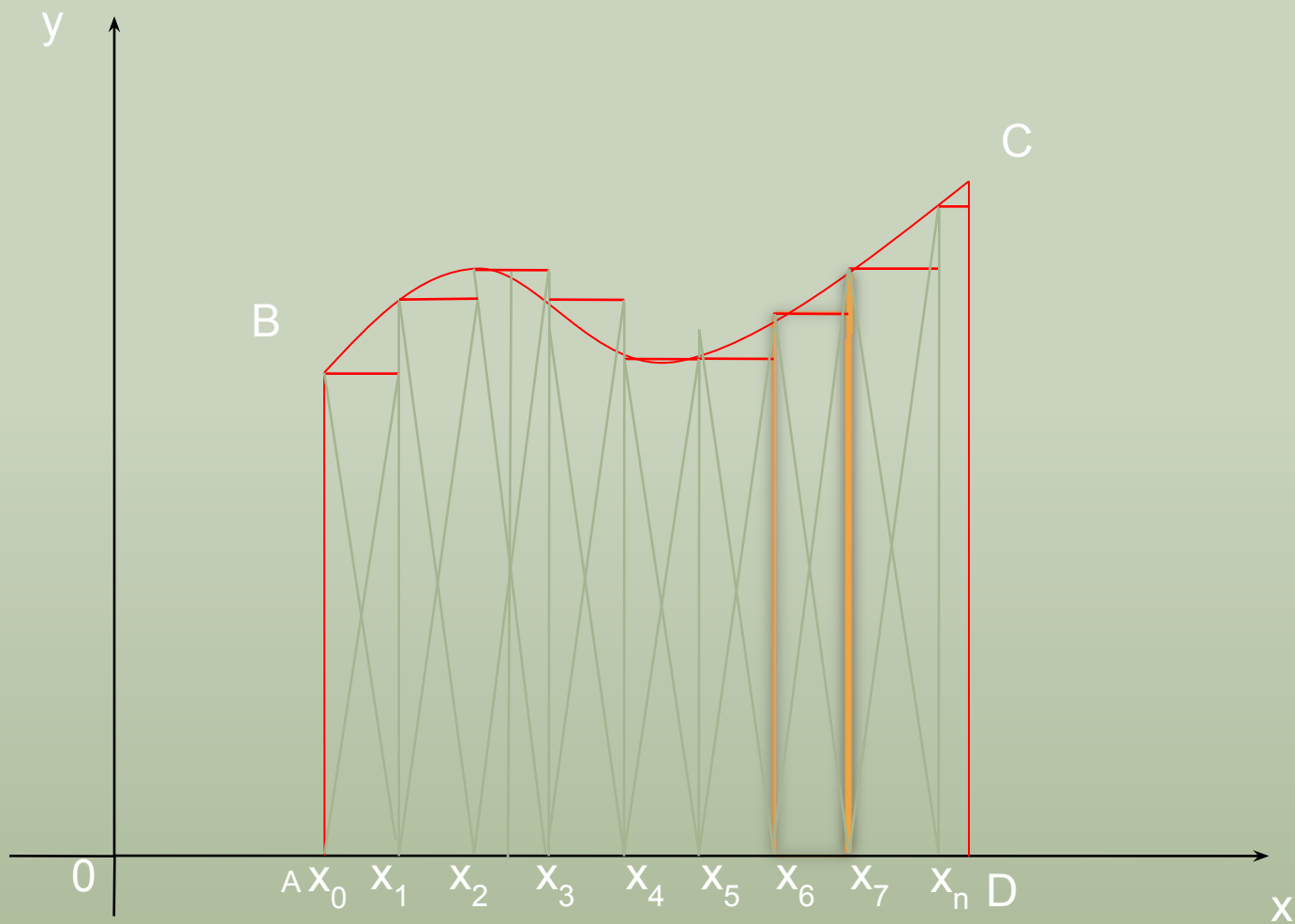


Через точки деления проведём прямые  $y = a, y = x_1, y = x_2, \dots, y = x_i, y = x_{i+1}, \dots, y = b$ . Этими прямыми трапеция  $ABCD$  разбивается на полосы.

Каждой полосе поставим в соответствие прямоугольник, одна сторона которого есть отрезок  $[x_i; x_{i+1}^y]$ , а смежная сторона – это отрезок  $f(x_i)$  ( $i=0\dots n-1$ )



Криволинейная трапеция заменится некоторой ступенчатой фигурой, составленной из отдельных прямоугольников



Основание  $i$ -го прямоугольника равно разности  $x_{i+1} - x_i$ , которую мы будем обозначать через  $\Delta x_i$ . Высота  $i$ -го прямоугольника равна  $f(x_i)$ .



**Площадь  $i$ -го прямоугольника равна:**

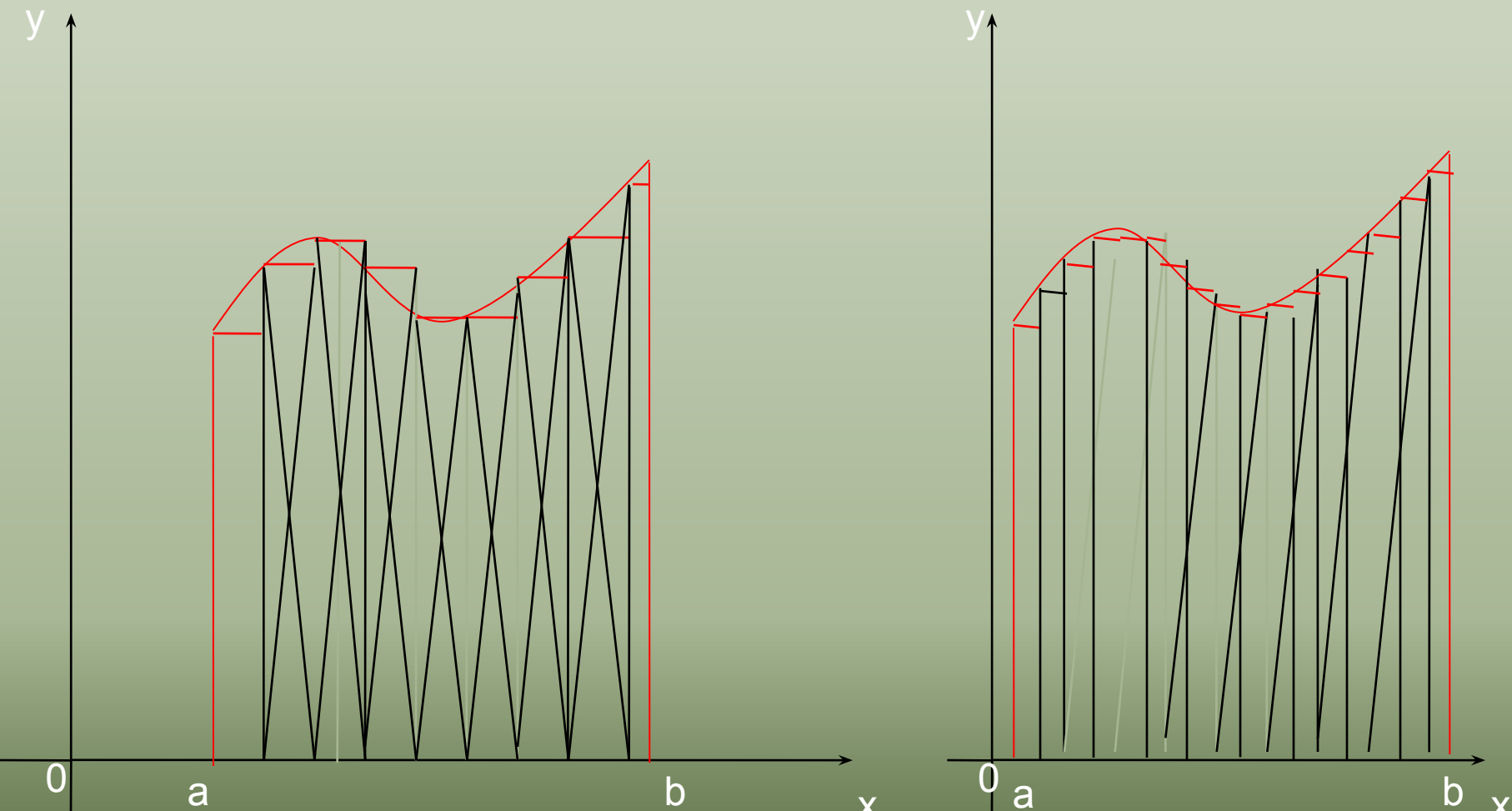
$$S_i = f(x_i)x_i$$

**Сложив площади всех прямоугольников, получаем приближенное значение площади  $S$  криволинейной трапеции:**

$$S \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)x_i$$

$$\text{При } \Delta x_i \rightarrow 0 \quad \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x_i \xrightarrow{\Delta x_i \rightarrow 0} S$$

т.к площадь ступенчатой фигуры почти совпадает с площадью криволинейной трапеции:



Точное значение площади  $S$  получается как предел суммы площадей всех прямоугольников

$$S = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n f(x_i) \Delta x_i$$

Для обозначения предельных сумм вида

$f(x_i)$   $x_i$  немецкий учёный В.Лейбниц ввёл  
СИМВОЛ  $\int_a^b f(x) dx$  - интеграл функции  $f(x)$  от  $a$  до  $b$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n f(x_i) \Delta x_i$$

Если предел функции  $f(x)$  существует, то  $f(x)$  называется интегрируемой на отрезке  $[a, b]$ . Числа  $\underline{a}$  и  $\underline{b}$  называются нижним и верхним пределом интегрирования. При постоянных пределах интегрирования определённый интеграл представляет собой определённое число.

# Некоторые приложения определенного интеграла

# 1) Площадь плоской фигуры

## Задача

Вычислить площадь фигуры  $F$ , ограниченной линиями  $y = 4 - x^2$  и  $y = x^2 - 2x$

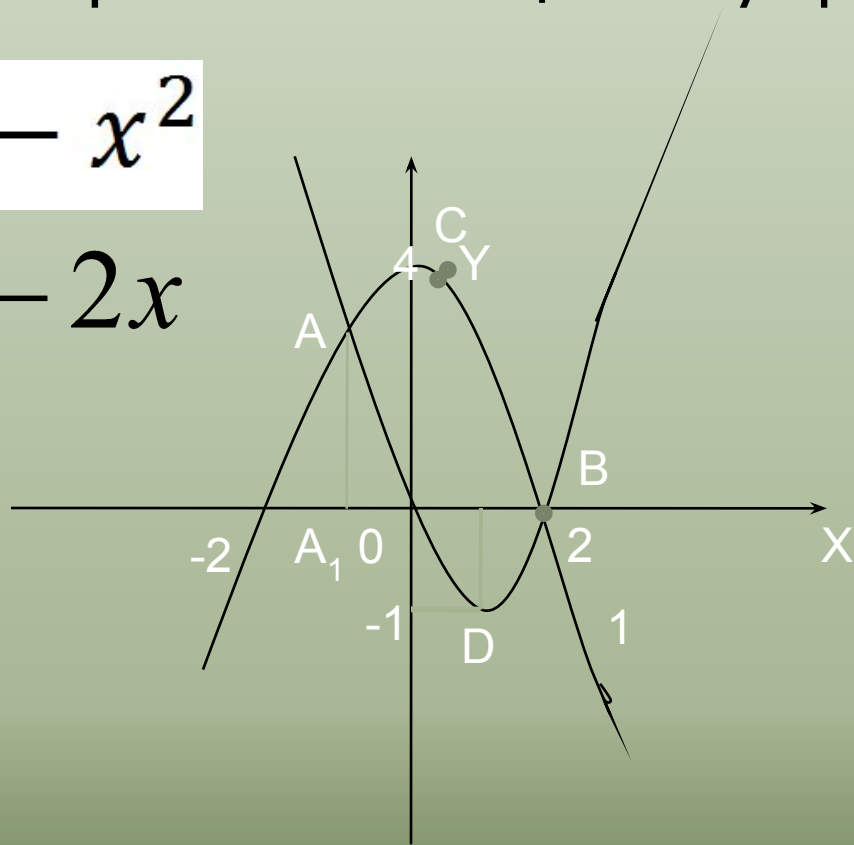
$$F: \begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$$

Решим задачу по следующему алгоритму:

1) Построим фигуру F. Для этого построим линии, ограничивающие эту фигуру

$$y = 4 - x^2$$

$$y = x^2 - 2x$$



2) Найдем точки пересечения этих парабол

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = 4 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \\ x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

A(-1;3); B(2;0)

3) Искомую площадь  $S_f$  можно найти как алгебраическую сумму площадей криволинейных трапеций

$$S_f = S_{A_1ACB} + S_{OBD} - S_{A_1AO}$$



$$S_{A_1ACB} = \int_{-1}^2 (4 - x^2) dx = \left( 4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 = 8 - \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{3} = 9$$

$$S_{OBD} = \int_2^0 (x^2 - 2x) dx = \left( \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_2^0 = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}$$

$$S_{A_1A0} = \int_{-1}^0 (x^2 - 2x) dx = \left( \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

$$S_f = 9 + \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = 9 \text{ (кв.ед.)}$$

Ответ :  $S_f = 9 \text{ кв.ед.}$

## 2) Объем тела вращения

Пусть тело образуется при вращении вокруг оси  $Ox$  криволинейной трапеции  $x_1ABx_2$

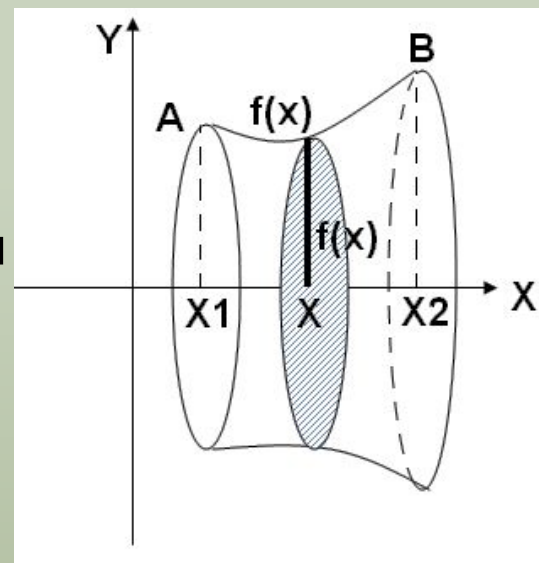
Любое сечение этого тела плоскостью, перпендикулярной к оси  $Ox$  будет круг, радиус которого равен соответствующей ординате точки кривой  $Y=f(x)$

Площадь сечения  $S(x)$  равна  $\pi y^2$ , т.е.

$$S(x) = \pi f^2(x)$$

Объем тела вращения может быть вычислен по формуле

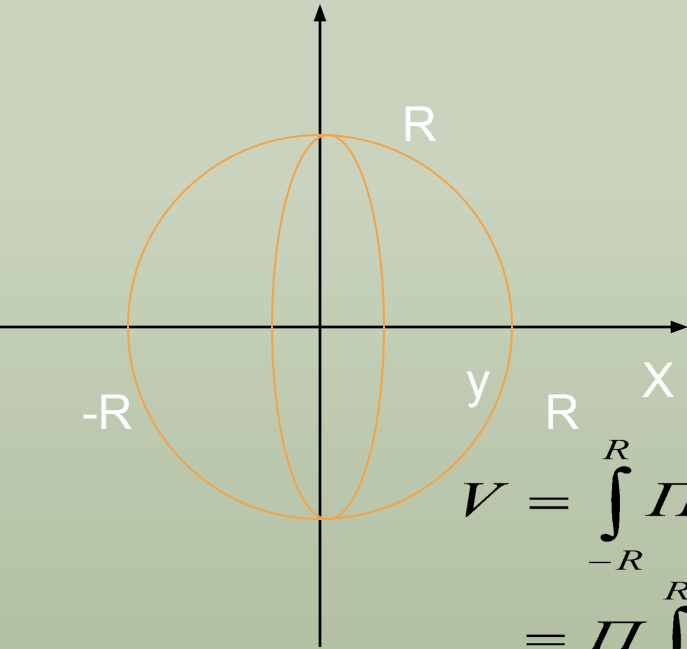
$$V = \int_{x_1}^{x_2} \pi f^2(x) dx \quad \text{при} \quad x_1 < x_2$$



## ЗАДАЧА

Вычислить объем шара, получаемого вращением полуокружности  $y = \sqrt{R^2 - x^2}$  вокруг оси OX

**РЕШЕНИЕ.** Построим полуокружность  $y = \sqrt{R^2 - x^2}$



При вращении этой полуокружности вокруг OX получается сфера, ограничивающая шар.

Объем шара найдем по формуле

$$\begin{aligned} V &= \int_{-R}^R \Pi f^2(x) dx = \Pi \int_{-R}^R (\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx = \\ &= \Pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \Pi \left( R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R}^R = \end{aligned}$$

$$= \Pi \left( R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \Pi R^3$$

Ответ: Объем шара  $V = \frac{4}{3} \Pi R^3$  (куб.ед.)