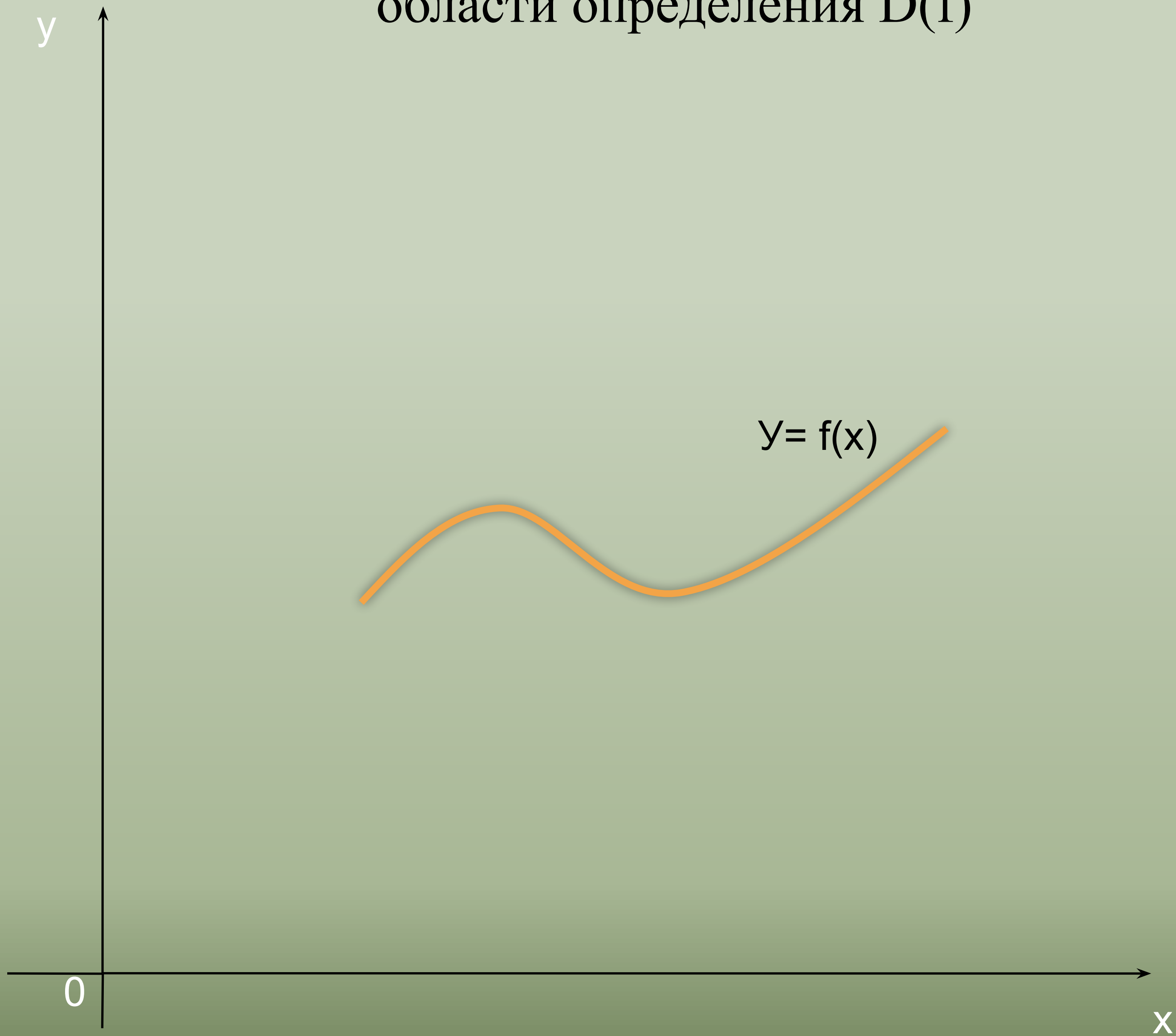
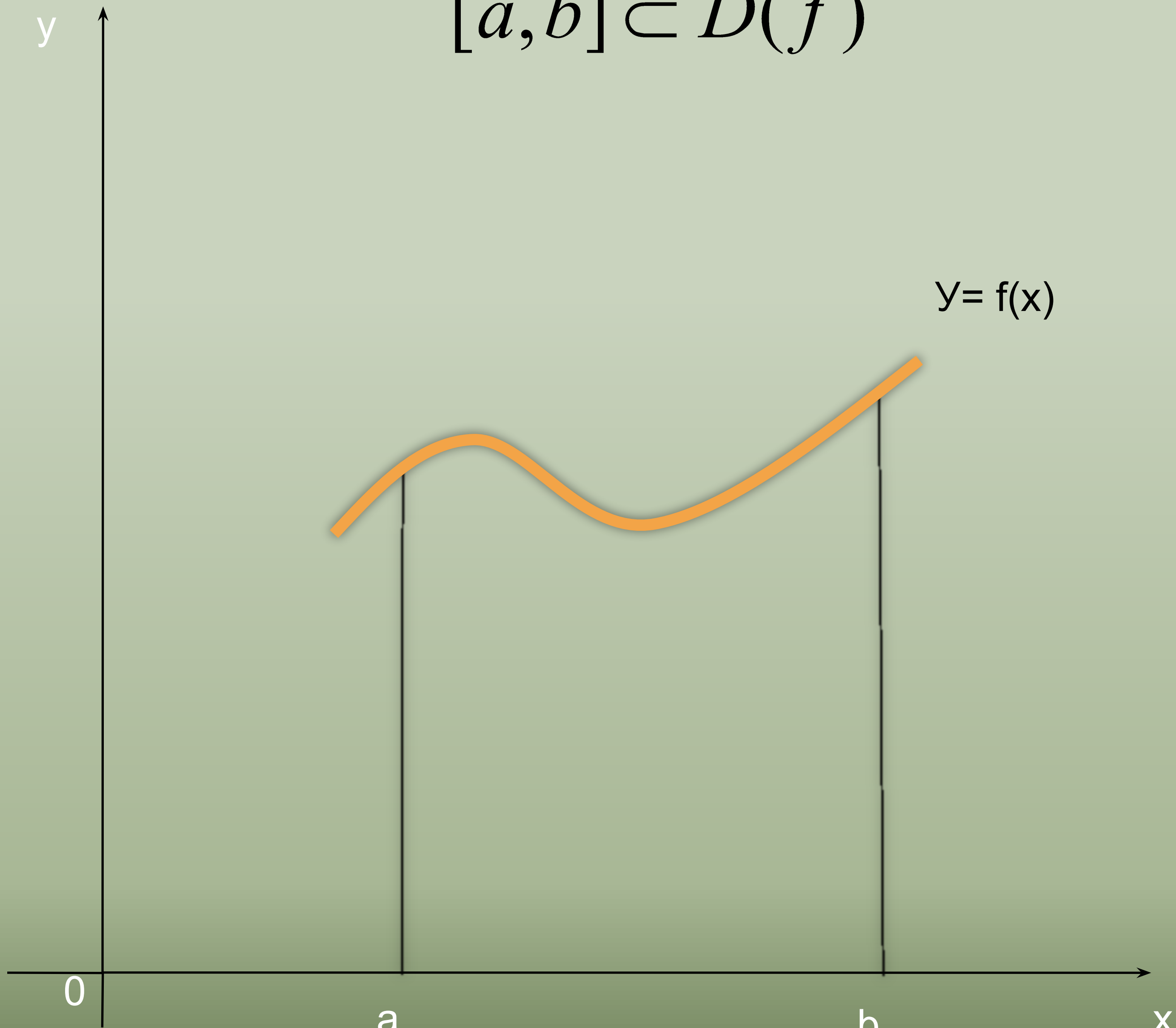
Введение определённого интеграла

Пусть графически задана функция f(x), непрерывная на своей области определения D(f)

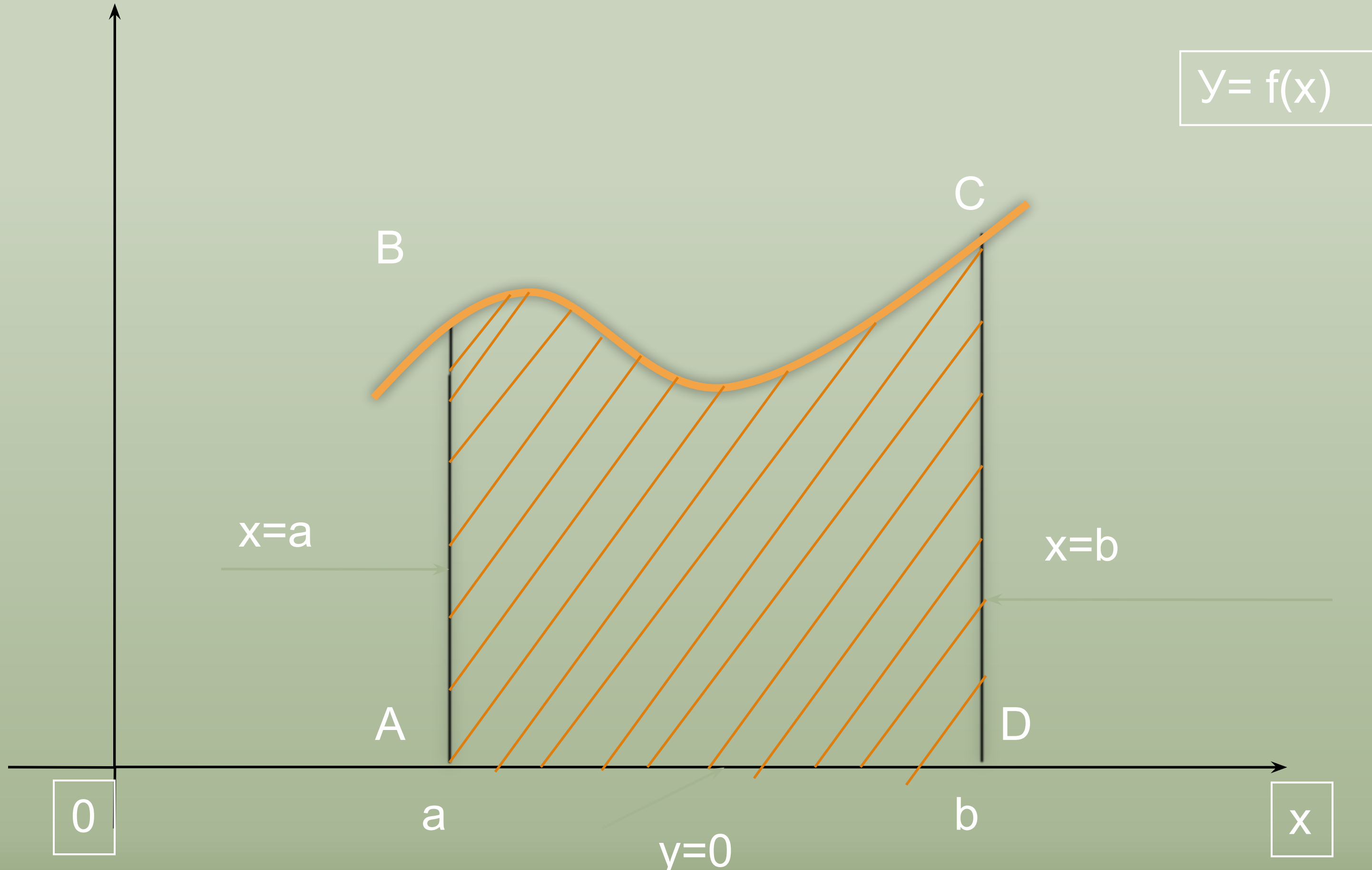


Будем рассматривать её на отрезке

$$[a,b] \subset D(f)$$

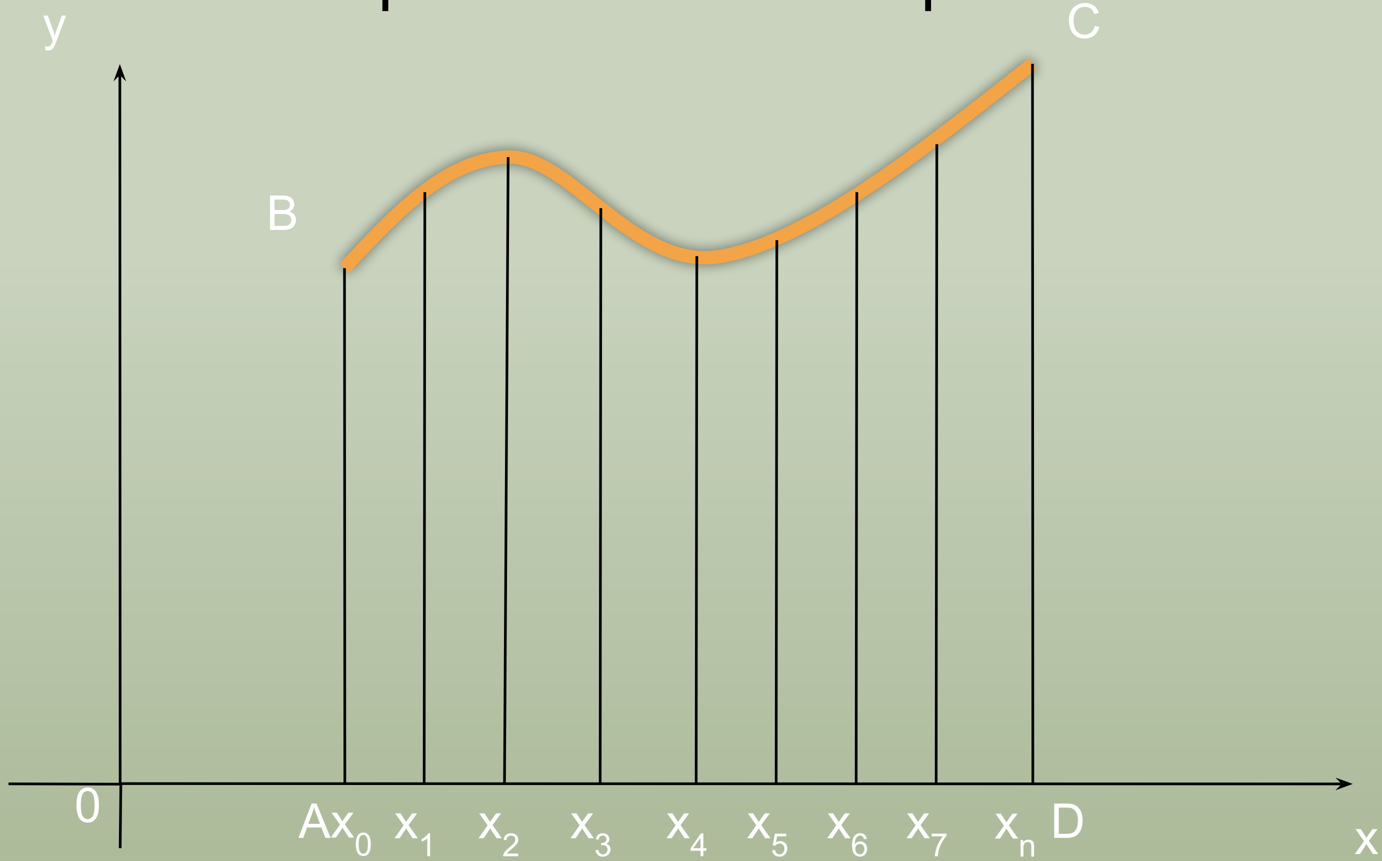


Построим фигуру, ограниченную графиком функции $y = f(x)$, прямыми x = а, x = в и у = 0. Назовём её криволинейной трапецией ABCD



Поставим задачу нахождения её площади S

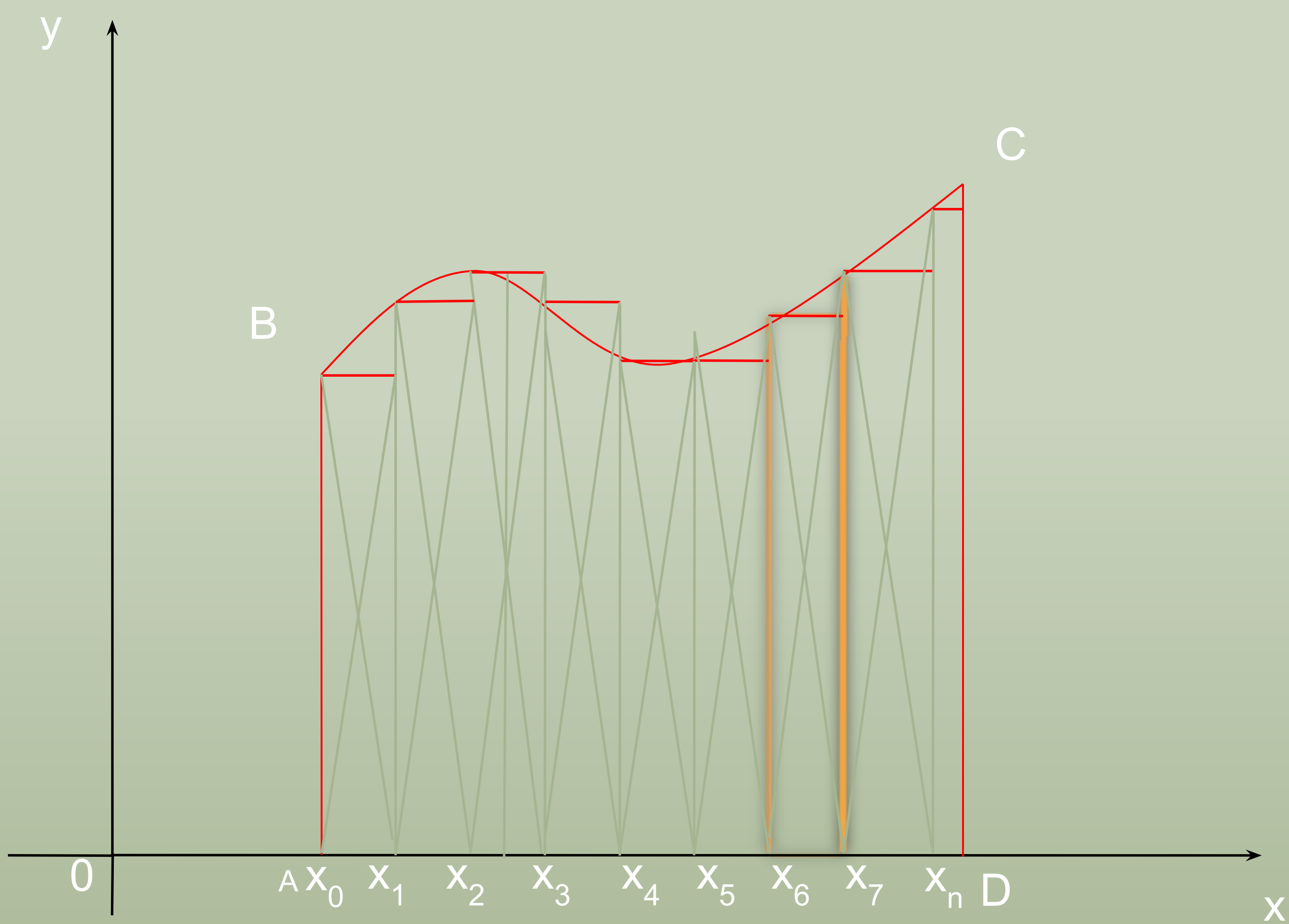
Разделим основание [AD] трапеции ABCD точками $x_0=a; x_1; x_2; \dots; x_n= b$ ($x_0= a<x_1<x_2<\dots<x_i<x_{i+1}<x_n=b$) произвольным образом



Через точки деления проведём прямые $y = a$, $y=x_1$, $y = x_2$, … $y = x_i$, $y= x_{i+1}$,…, $y= b$. Этими прямыми трапеция ABCD разбивается на полосы.

Каждой полосе поставим в соответствие прямоугольник, одна сторона которого есть отрезок $[x_i;x_{i+1}]$, а смежная сторона – это отрезок $f(x_i)$ $(i=0\ldots n-1)$

Криволинейная трапеция заменится некоторой ступенчатой фигурой, составленной из отдельных прямоугольников



Основание i-го прямоугольника равно разности **x_{i+1}-x_{i}, которую мы будем обозначать через** $\triangle x_i$ Высота i-го прямоугольника равна $f(x_i)$

Площадь i-го прямоугольника равна:

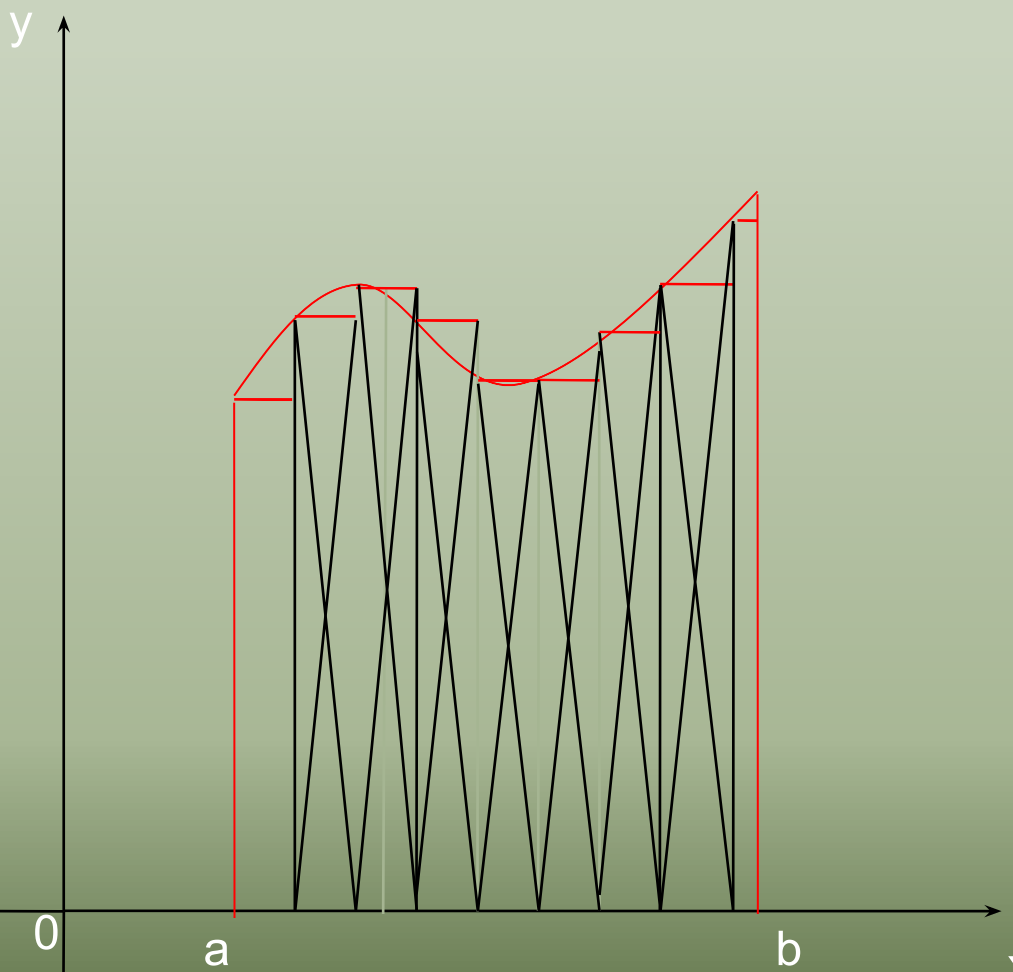
$$S_i = f(x_i)x_i$$

Сложив площади всех прямоугольников, получаем приближенное значение площади S криволинейной трапеции:

$$S \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)x_i$$

$$\text{При } \triangle x_i \to 0 \quad \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \triangle x_i \xrightarrow[\triangle x_i \to 0]{} S$$

т.к площадь ступенчатой фигуры почти совпадает с площадью криволинейной трапеции:



Точное значение площади S получается как предел суммы площадей всех прямоугольников

$$S = \lim_{\triangle x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \triangle x_i$$

Для обозначения предельных сумм вида

f(xi)   xi немецкий учёный В.Лейбниц ввёл символ $\int_a^b f(x)dx$ - интеграл функции f(x) от a до b

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \Delta x_i$$

Если предел функции f(x) существует, то f(x) называется интегрируемой на отрезке [a,b]. Числа a и b называются нижним и верхним пределом интегрирования. При постоянных пределах интегрирования определённый интеграл
представляет собой определённое число.

Некоторые приложения определённого интеграла

1) Площадь плоской фигуры

Задача

Вычислить площадь фигуры F, ограниченной линиями y= 4-x^2 и y= x^2-2x

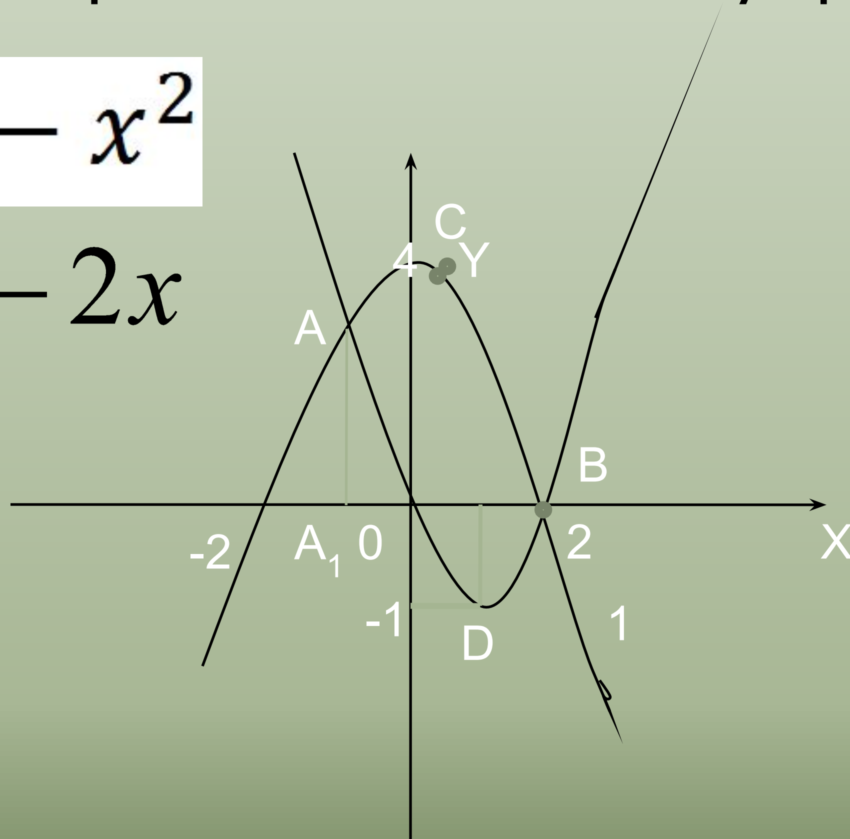
$$F: \begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$$

Решим задачу по следующему алгоритму:

1) Построим фигуру F. Для этого построим линии, ограничивающие эту фигуру

$$y = 4 - x^2$$

$$y = x^2 - 2x$$



2) Найдем точки пересечения этих парабол

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = 4 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

A(-1;3); B(2;0)

3)Искомую площадь S_f можно найти как алгебраическую сумму площадей криволинейных трапеций

$$S_f = S_{A_1ACB} + S_{OBD} - S_{A_1AO}$$

$$S_{A_1ACB}=\int_{-1}^{2}(4-x^2)dx=\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2}=8-\frac{8}{3}+4-\frac{1}{3}=9$$

$$S_{OBD}=\int_{2}^{0}(x^2-2x)dx=\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Bigg|_{2}^{0}=-\frac{8}{3}+4=\frac{4}{3}$$

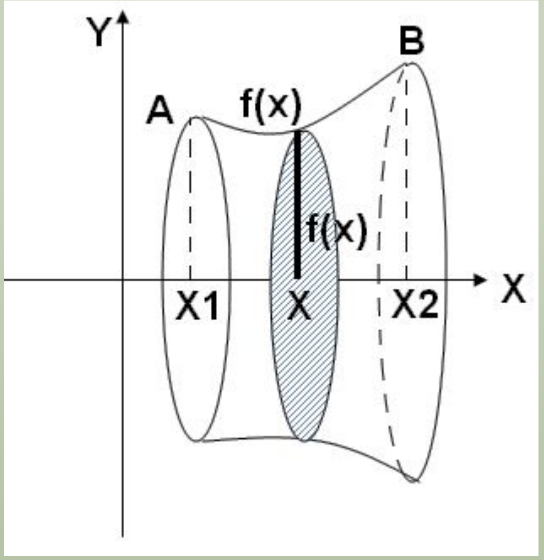
$$S_{A_1A0}=\int_{-1}^{0}(x^2-2x)dx=\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Bigg|_{-1}^{0}=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$$

$$S_f=9+\frac{4}{3}-\frac{4}{3}=9(кв.ед.)$$

$$Ответ: S_f=9кв.ед.$$

2) Объем тела вращения

Пусть тело образуется при вращении вокруг оси ОХ криволинейной трапеции x_1ABx_2



Любое сечение этого тела плоскостью, перпендикулярной к оси Ох будет круг, радиус которого равен соответствующей ординате точки кривой *Y=f(x)*

Площадь сечения *S(x)* равна πy^2, т.е.

$S(x)= \pi f^2(x)$

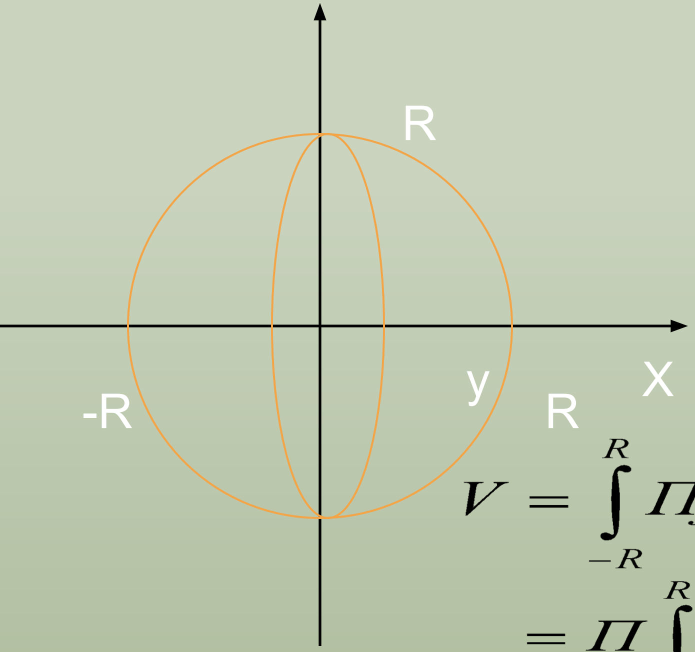
Объем тела вращения может быть вычислен по формуле

$$V = \int_{x_1}^{x_2} \pi f^2(x)dx \qquad при \qquad x_1 < x_2$$

ЗАДАЧА

Вычислить объем шара, получаемого вращением полуокружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ вокруг оси ОХ

РЕШЕНИЕ. Построим полуокружность $y = \sqrt{R^2 - x^2}$



При вращении этой полуокружности вокруг ОХ получается сфера, ограничивающая шар.

Объем шара найдем по формуле

$$V = \int_{-R}^{R} \Pi f^2(x)\ dx = \Pi \int_{-R}^{R} (\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx =$$

$$= \Pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2) dx = \Pi (R^2 x - \frac{x^3}{3}) \Big|_{-R}^{R} =$$

$$= \Pi (R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3}) = \frac{4}{3} \Pi R^3$$

Ответ: Объем шара $V = \frac{4}{3} \Pi R^3$ (куб.ед.)