

# Теорема Пифагора

ОБУЧАЮЩАЯ ПРОГРАММА

Работа  
Учителя математики  
МБОУ «Школа №129»  
Приволжского района,  
Г.Казани  
Гинановой С.М.

# Содержание

- Теорема Пифагора
- Доказательство теоремы Пифагора
- Теорема, обратная теореме Пифагора
- Доказательство обратной теоремы
- Историческая справка
- Пифагоровы и египетские треугольники
- Задачи
- Контрольные вопросы

# Теорема Пифагора

Пользуясь свойствами площадей многоугольников, мы установим теперь замечательное соотношение между гипотенузой и катетами прямоугольного треугольника. Теорема, которую мы докажем, называется **теоремой Пифагора**. Она является важнейшей теоремой геометрии.

## ТЕОРЕМА

*В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.*

- [Содержание](#)

# Доказательство

Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами  $a$ ,  $b$  и гипотенузой  $c$  (рисунок 1). Докажем, что

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Достроим треугольник до квадрата со стороной  $a+b$  так, как показано на рисунке 2. Площадь  $S$  этого квадрата равна

$$(a+b)^2$$

С другой стороны этот квадрат составлен из четырех равных прямоугольных треугольников, площадь каждого из которых равна

$$\frac{1}{2} a \cdot b$$

и квадрата со стороной  $c$ , поэтому

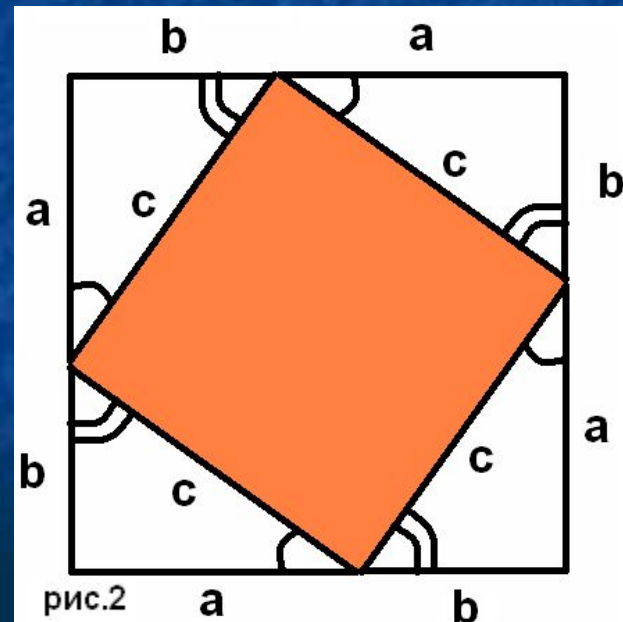
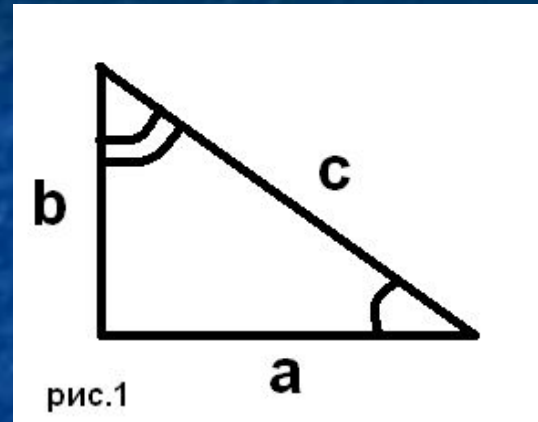
$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} ab + c^2 = 2ab + c^2$$

Таким образом,  $(a+b)^2 = 2ab + c^2$

откуда

Теорема доказана.  $c^2 = a^2 + b^2$

- [Содержание](#)



# Теорема, обратная теореме Пифагора

## Теорема

*Если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник прямоугольный.*

- [Содержание](#)



# Доказательство обратной теоремы

Пусть в треугольнике  $ABC$   $AB^2 = AC^2 + BC^2$ .

Докажем, что угол  $C$  прямой.

Рассмотрим прямоугольный треугольник  $A_1B_1C_1$  с прямым углом  $C_1$ , у которого  $A_1C_1 = AC$  и  $B_1C_1 = BC$ .

По теореме Пифагора  $A_1B_1^2 = A_1C_1^2 + B_1C_1^2$ , и, значит,  $A_1B_1^2 = AC^2 + BC^2$ .

Но  $AC^2 + BC^2 = AB^2$  по условию теоремы. Следовательно,  $A_1B_1^2 = AB^2$ .

Откуда  $A_1B_1 = AB$ . Треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  равны по трем сторонам, поэтому  $\angle C = \angle C_1$ , т.е. треугольник  $ABC$  прямоугольный с прямым углом  $C$ . Теорема доказана.

# Историческая справка

Интересна история теоремы Пифагора. Хотя эта теорема и связывается с именем Пифагора, она была известна задолго до него. В вавилонских текстах эта теорема встречается за 1200 лет до Пифагора. Возможно, что тогда еще не знали ее доказательства, а само соотношение между гипотенузой и катетами было установлено опытным путем на основе измерений. Пифагор, по-видимому, нашел доказательство этого соотношения. Сохранилось древнее придание, что в честь своего открытия Пифагор принес в жертву богам быка, по другим свидетельствам – даже сто быков. На протяжении последующих веков были найдены различные другие доказательства теоремы Пифагора. В настоящее время их насчитывается более ста.

По теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник со сторонами 3, 4, 5 является прямоугольным:  $5^2 = 3^2 + 4^2$ . Прямоугольными являются также треугольники со сторонами 5, 12, 13; 8, 15, 17 и 7, 24, 25.

- [Содержание](#)

# Пифагоровы и египетские треугольники

Прямоугольные треугольники, у которых длины сторон выражаются целыми числами, называются пифагоровыми треугольниками. Можно доказать, что катеты  $a$ ,  $b$  и гипотенуза  $c$  таких треугольников выражаются формулами

$$a = 2m \cdot n \quad , \quad b = m^2 - n^2 \quad , \quad c = m^2 + n^2$$

где  $m$  и  $n$  – любые натуральные числа, такие, что  $m > n$ . Треугольник со сторонами 3, 4, 5 часто называют египетским треугольником, т.к. он был известен еще древним египтянам.

- Содержание



# Задачи

- Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника по данным катетам  $a$  и  $b$  :  
1)  $a = 5, b = 12$       2)  $a = 5, b = 6$       3)  $a = \frac{3}{7}, b = \frac{4}{7}$
- Найдите катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла  $60^\circ$  если гипотенуза равна  $c$  .
- По данным катетам  $a$  и  $b$  прямоугольного треугольника найдите высоту, проведенную к гипотенузе:  
1)  $a = 5, b = 12$       2)  $a = 12, b = 16$
- Выясните, является ли треугольник прямоугольным, если его стороны выражаются числами: (в каждом случае ответ обоснуйте)  
1) 6,8,10      3) 9,12,15      5) 3,4,6      7) 15,20,25  
2) 5,6,7      4) 10,24,26      6) 11,9,13
- [Содержание](#)

# Контрольные вопросы

- Сформулируйте и докажите теорему Пифагора.
- Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме Пифагора.
- Какие треугольники называются пифагоровыми? Приведите примеры.
- Какие треугольники называются египетскими? Приведите примеры.
- Придумайте задачу на применение т.Пифагора.
  
- [Содержание](#)