

Теорема Пифагора

ОБУЧАЮЩАЯ ПРОГРАММА

Работа
Учителя математики
МБОУ «Школа №129»
Приволжского района,
Г.Казани
Гинановой С.М.

Содержание

- Теорема Пифагора
- Доказательство теоремы Пифагора
- Теорема, обратная теореме Пифагора
- Доказательство обратной теоремы
- Историческая справка
- Пифагоровы и египетские треугольники
- Задачи
- Контрольные вопросы

Теорема Пифагора

Пользуясь свойствами площадей многоугольников, мы установим теперь замечательное соотношение между гипотенузой и катетами прямоугольного треугольника. Теорема, которую мы докажем, называется **теоремой Пифагора**. Она является важнейшей теоремой геометрии.

ТЕОРЕМА

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

- [Содержание](#)

Доказательство

Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами a , b и гипотенузой c (рисунок 1). Докажем, что

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Достроим треугольник до квадрата со стороной $a+b$ так, как показано на рисунке 2. Площадь S этого квадрата равна

$$(a+b)^2$$

С другой стороны этот квадрат составлен из четырех равных прямоугольных треугольников, площадь каждого из которых равна

$$\frac{1}{2} a \cdot b$$

и квадрата со стороной c , поэтому

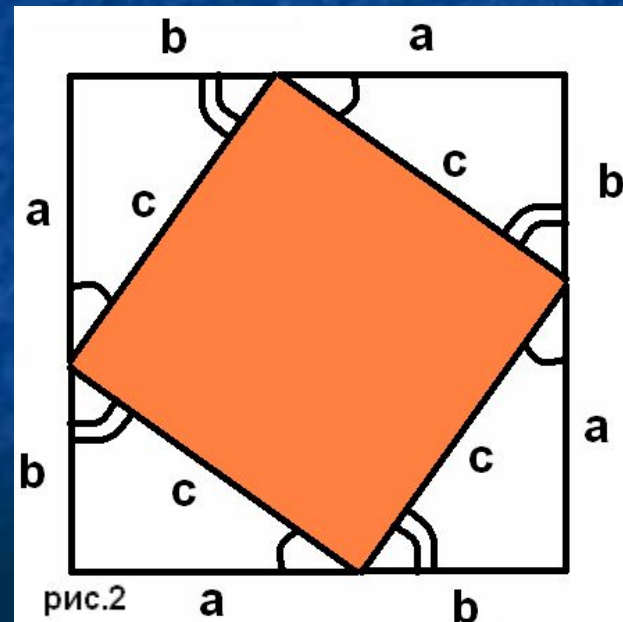
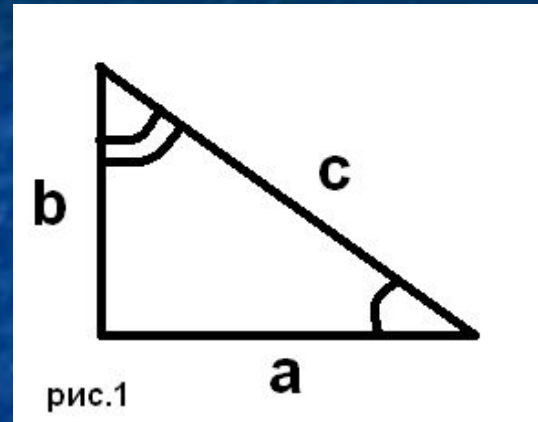
$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} ab + c^2 = 2ab + c^2$$

Таким образом, $(a+b)^2 = 2ab + c^2$

откуда

Теорема доказана. $c^2 = a^2 + b^2$

- [Содержание](#)



Теорема, обратная теореме Пифагора

Теорема

Если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник прямоугольный.

- [Содержание](#)

Доказательство обратной теоремы

Пусть в треугольнике ABC $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Докажем, что угол C прямой.

Рассмотрим прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$ с прямым углом C_1 , у которого $A_1C_1 = AC$ и $B_1C_1 = BC$.

По теореме Пифагора $A_1B_1^2 = A_1C_1^2 + B_1C_1^2$, и, значит, $A_1B_1^2 = AC^2 + BC^2$.

Но $AC^2 + BC^2 = AB^2$ по условию теоремы. Следовательно, $A_1B_1^2 = AB^2$.

Откуда $A_1B_1 = AB$. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по трем сторонам, поэтому $\angle C = \angle C_1$, т.е. треугольник ABC прямоугольный с прямым углом C . Теорема доказана.

Историческая справка

Интересна история теоремы Пифагора. Хотя эта теорема и связывается с именем Пифагора, она была известна задолго до него. В вавилонских текстах эта теорема встречается за 1200 лет до Пифагора. Возможно, что тогда еще не знали ее доказательства, а само соотношение между гипотенузой и катетами было установлено опытным путем на основе измерений. Пифагор, по-видимому, нашел доказательство этого соотношения. Сохранилось древнее придание, что в честь своего открытия Пифагор принес в жертву богам быка, по другим свидетельствам – даже сто быков. На протяжении последующих веков были найдены различные другие доказательства теоремы Пифагора. В настоящее время их насчитывается более ста.

По теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник со сторонами 3, 4, 5 является прямоугольным: $5^2 = 3^2 + 4^2$. Прямоугольными являются также треугольники со сторонами 5, 12, 13; 8, 15, 17 и 7, 24, 25.

- [Содержание](#)

Пифагоровы и египетские треугольники

Прямоугольные треугольники, у которых длины сторон выражаются целыми числами, называются пифагоровыми треугольниками. Можно доказать, что катеты a , b и гипотенуза c таких треугольников выражаются формулами

$$a = 2m \cdot n \quad , \quad b = m^2 - n^2 \quad , \quad c = m^2 + n^2$$

где m и n – любые натуральные числа, такие, что $m > n$. Треугольник со сторонами 3, 4, 5 часто называют египетским треугольником, т.к. он был известен еще древним египтянам.

- Содержание

Задачи

- Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника по данным катетам a и b :
1) $a = 5, b = 12$ 2) $a = 5, b = 6$ 3) $a = \frac{3}{7}, b = \frac{4}{7}$
- Найдите катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла 60° если гипотенуза равна c .
- По данным катетам a и b прямоугольного треугольника найдите высоту, проведенную к гипотенузе:
1) $a = 5, b = 12$ 2) $a = 12, b = 16$
- Выясните, является ли треугольник прямоугольным, если его стороны выражаются числами: (в каждом случае ответ обоснуйте)
1) 6,8,10 3) 9,12,15 5) 3,4,6 7) 15,20,25
2) 5,6,7 4) 10,24,26 6) 11,9,13
- [Содержание](#)

Контрольные вопросы

- Сформулируйте и докажите теорему Пифагора.
- Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме Пифагора.
- Какие треугольники называются пифагоровыми? Приведите примеры.
- Какие треугольники называются египетскими? Приведите примеры.
- Придумайте задачу на применение т.Пифагора.

- [Содержание](#)