Раздел 1. Элементы линейной алгебры.

Тема 1.2.
Системы линейных алгебраических уравнений.

Теорема Кро́некера — Капе́лли

Лекция № 9

ГБОУ СПО МО «ЛПТ»
Преподаватель математики
Осипова Людмила Евгеньевна
Mila139139 @ yandex.ru

УРОК ОДИННАДЦАТЫЙ

Леопольд Кронекер
немецкий математик

07.12.1823 — 29.12.1891

Родился 7 декабря 1823, Лигниц, Германия, ныне Легница, Польша в еврейской семье, за год до смерти принял христианство.
Иностранный корреспондент Петербургской Академии наук (1872), член Берлинской АН (1861), профессор университета в Берлине. Основные труды по алгебре и теории чисел. Большое значение имеют его исследования по арифметической теории алгебраических величин.

Альфред Капелли
итальянский математик

Родился 5 августа 1855 года в Милане. В 1877 году окончил Римский университет. В 1881 году стал профессором алгебраического анализа в университете Палермо. В 1886 году переехал в Неаполь и остался жить в этом городе до самой смерти. В Неапольском университете возглавил кафедру алгебры. С 1894 по 1910 годы, продолжая профессорскую деятельность, был редактором математического издания членом Национальной академии.

05.08.1855 — 28.01.1910

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

1

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Теорема Кро́некера — Капе́лли

Это — критерий совместности СЛАУ, которая отвечает на первые два вопроса о совместности системы и количестве решений.

Вспомним такие понятия как:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

A – основная матрица системы

B – матрица-столбец свободных членов.

$A|B$ - расширенная матрица системы

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

СЛАУ (1)

Теорема Кро́некера — Капе́лли

Для того, чтобы система линейных уравнений (1) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы этой системы был равен рангу ее основной матрицы

rang A/B = rang A

система совместна.

система имеет единственное решение.

rang (A/B) = rang (A) = n

система имеет бесконечно много решений.

rang (A/B) = rang $(A) < n$

Если ранг основной матрицы не равен рангу расширенной матрицы, то система не имеет решения.

rang $(A) \neq$ rang (A/B)

система несовместна.

Где n число неизвестных переменных в заданной СЛАУ

Рассмотрим пример 1

Задание.

Задана система уравнений. Вычислим ранги основной и расширенной матрицы, т.е. проверим систему на совместимость.

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = 3 \\ X_1 - X_2 = 1 \end{cases}$$

Решение.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ - основная матрица.

$A \mid B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$ - расширенная матрица.

1) Найдём ранг основной матрицы *A*

$$M_2^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (-1-1) = -2$$ Старший минор не равен нулю

$\Rightarrow$ rang (A) = 2

2) Найдём ранг расширенной матрицы *A*I*B*

$$M_2^1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (1+3) = 4$$ Старший минор не равен нулю

$\Rightarrow$ rang (AIB) = 2

Получаем: rang(A) = rang(A|B)=2, количество переменных в системе n=2, то по теореме Кронекера - Капелли система имеет решение, и только одно.

Ответ: Система является - совместной определённой

Рассмотрим пример 2

Задание.

Задана система уравнений. Вычислим ранги основной и расширенной матрицы, т.е. проверим систему на совместимость.

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = 3 \\ 2X_1 + 2X_2 = 6 \end{cases}$$

Решение.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ - основная матрица.

$A \mid B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{array}\right)$ - расширенная матрица.

1) Найдём ранг основной матрицы *A*

$M_1^1 = |2| = 2 \Rightarrow$ rang (*A*) = *1*

2) Найдём ранг расширенной матрицы *A*|*B*

$M_1^1 = |2| = 2 \Rightarrow$ rang (*A*|B) = *1*

Получилось, что rang(A) = rang(A|B)= 1, но n=2. (1<2) Следовательно, система совместна, имеет бесконечное множество решений.

Ответ: Система является - совместной неопределённой

Рассмотрим пример 3

Задание.

Задана система уравнений. Вычислим ранги основной и расширенной матрицы, т.е. проверим систему на совместимость.

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = 3 \\ X_1 + X_2 = 7 \end{cases}$$

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$ - основная матрица.

$$A \mid B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 7 \end{array}\right)$$ - расширенная матрица.

1) Найдём ранг основной матрицы *A*

$M_1^1 = |1| = 1 \Rightarrow$ rang (*A*) = *1*

2) Найдём ранг расширенной матрицы *A*|*B*

$M_2^1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = (7-3) = 4$ Старший минор не равен нулю

$\Rightarrow$ rang (*A*|*B*) = *2*

Итак, rang(A) = 1, rang(A|B) = 2, они не равны, следовательно, система не имеет решений.

Ответ: Система является - несовместной

Рассмотрим пример 4

Задание.

Задана система уравнений. Вычислим ранги основной и расширенной матрицы, т.е. проверим систему на совместимость.

$$\begin{cases} X_1^2 + X_2^2 = 25 \\ X_1 - X_2 = 0 \end{cases}$$

Решение.

Эту систему не исследуем, так как теорема Кронекера - Капелли применима только к системам линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим пример 5

Задание.

Задана система уравнений. Вычислим ранги основной и расширенной матрицы, т.е. проверим систему на совместимость.

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 = 0 \\ 3X_1 + 5X_2 = 0 \end{cases}$$

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$ - основная матрица.

$$A \mid B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{array}\right)$$ - расширенная матрица.

1) Найдём ранг основной матрицы *A*

$$M_2^1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (5\text{-}6) = -1 \Longrightarrow \text{rang}\,(A) = 2$$

2) Найдём ранг расширенной матрицы *A*I*B*

$$M_2^1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (5\text{-}6) = -1 \Longrightarrow \text{rang}\,(A|B) = 2$$

Количество переменных n=2.   rang(A) = rang(A|B) = 2

Ответ: система является совместимой и имеет единственное решение. А так как система однородная, то это единственное решение и есть (0;0).

ПРИМЕЧАНИЕ

В однородных системах ранги основной матрицы и расширенной всегда равны между собой. Столбец свободных членов в расширенной матрице – нулевой.

Рассмотрим пример 6

Задание.

Задана система уравнений. Вычислим ранги основной и расширенной матрицы, т.е. проверим систему на совместимость.

$$\begin{cases} 2X_1 + 3X_2 = 0 \\ 6X_1 + 9X_2 = 0 \end{cases}$$

Решение.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$ - основная матрица.

$A \mid B = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 6 & 9 & 0 \end{array}\right)$ - расширенная матрица.

1) Найдём ранг основной матрицы A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \text{rang}\,(A) = 1$$

2) Найдём ранг расширенной матрицы $A|B$

$$A\,|\,B = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 6 & 9 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{rang}\,(A|B) = 1$$

Итак: rang(A) = rang(A|B) = 1

Количество переменных n=2.

Значит, система имеет бесконечное множество решений

Ответ: Система является - совместной неопределённой

Рассмотрим пример 7

Задание.

Задана система уравнений. Вычислим ранги основной и расширенной матрицы, т.е. проверим систему на совместимость.

$$\begin{cases} 3x + 4y + 7z = 0 \\ x - 5y + 6z = 1 \\ 8x + y - z = 10 \end{cases}$$

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 1 & -5 & 6 \\ 8 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ - основная матрица.

$$A \mid B = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 7 & 0 \\ 1 & -5 & 6 & 1 \\ 8 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right)$$ - расширенная матрица.

1) Найдём ранг основной матрицы *A*

$$M_3^1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 1 & -5 & 6 \\ 8 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 15+7+192+280-18+4 = 480$$

Старший минор не равен нулю

$\Rightarrow$ rang $(A) = 3$

2) Найдём ранг расширенной матрицы *A*I*B*

$$M_3^1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 1 & -5 & 6 \\ 8 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 480$$

Старший минор не равен нулю

$\Rightarrow$ rang $(A\mathrm{I}B) = 3$

Ответ: Это неоднородная система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Система является - совместной определённой - (решение только одно).

Основные источники

- Лунгу К.Н. Сборник задач по высшей математике. 1 часть / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С. Н. Федин. – 7-е изд. – М.: Айрис – пресс, 2008. - 576с.: ил. – (Высшее образование)
- Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть / Д.Т. Письменный – 5-е изд. – М.: Айрис – пресс, 2005.-288с.: ил.
- Тюрникова Г.В. Курс высшей математики для начинающих: Учебное пособие. – М.: ГУ-ВШЭ, 2008. 376с.
- http://mathsun.ru/ - История математики. Биографии великих математиков