

# Раздел 1. Элементы линейной алгебры.

## Тема 1.2.

### Системы линейных алгебраических уравнений.

# Теорема Кронекера — Капелли

## Лекция № 9

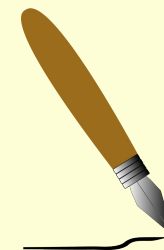


ГБОУ СПО МО «ЛПТ»  
Преподаватель математики  
Осипова Людмила Евгеньевна  
Mila139139 @ yandex.ru

УРОК ОДИННАДЦАТЫЙ

# Леопольд Кронекер

## немецкий математик



Родился 7 декабря 1823, Лигниц, Германия, ныне Легница, Польша в еврейской семье, за год до смерти принял христианство.

Иностраннный корреспондент Петербургской Академии наук (1872), член Берлинской АН (1861), профессор университета в Берлине. Основные труды по алгебре и теории чисел.

Большое значение имеют его исследования по арифметической теории алгебраических величин.

**07.12.1823 — 29.12.1891**





# Альфред Капелли

## итальянский математик

Родился 5 августа 1855 года в Милане. В 1877 году окончил Римский университет. В 1881 году стал профессором алгебраического анализа в университете Палермо. В 1886 году переехал в Неаполь и остался жить в этом городе до самой смерти. В Неапольском университете возглавил кафедру алгебры. С 1894 по 1910 годы, продолжая профессорскую деятельность, был редактором математического издания членом Национальной академии.



**05.08.1855 — 28.01.1910**

# Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

1

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

## *Теорема Кронекера — Капелли*

Это — критерий совместности СЛАУ, которая отвечает на первые два вопроса о совместности системы и количестве решений.

## Вспомним такие понятия как:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad A/B = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

$A$  – основная матрица системы

$B$  – матрица-столбец свободных членов.

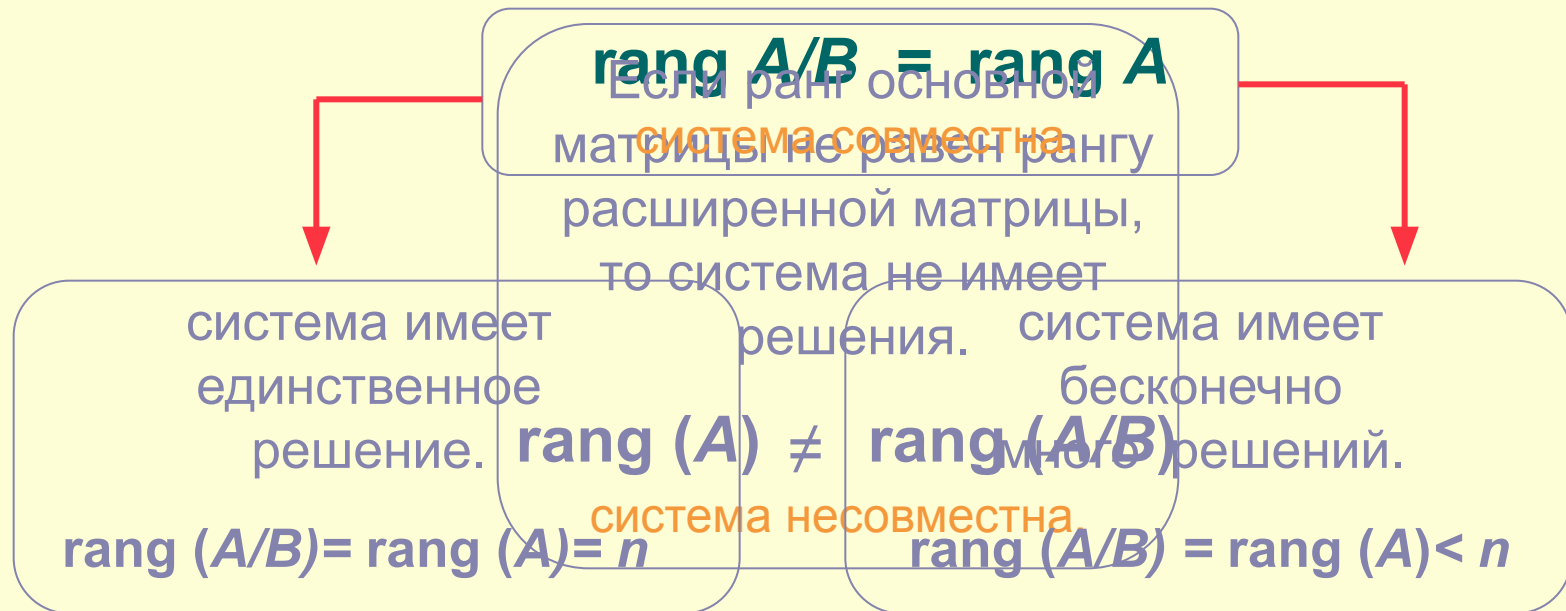
$A/B$  - расширенная матрица системы

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

СЛАУ ( 1 )

# Теорема Кронекера — Капелли

Для того, чтобы система линейных уравнений (1) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы этой системы был равен рангу ее основной матрицы



Где  $n$  число неизвестных переменных в заданной СЛАУ

# Рассмотрим пример 1

## Задание.

Задана система уравнений. Вычислим ранги основной и расширенной матрицы, т.е. проверим систему на совместимость.

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = 3 \\ X_1 - X_2 = 1 \end{cases}$$

## Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ - основная матрица.}$$

$$A | B = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \text{ - расширенная матрица.}$$

1) Найдём ранг основной матрицы  $A$

$$M_2^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (-1-1) = -2 \quad \text{Старший минор не равен нулю}$$

⇒  $\text{rang}(A) = 2$

2) Найдём ранг расширенной матрицы  $A|B$

$$M_2^1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (1+3) = 4 \quad \text{Старший минор не равен нулю}$$

⇒  $\text{rang}(A|B) = 2$

**Получаем:**  $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 2$ , количество переменных в системе  $n=2$ , то по теореме Кронекера - Капелли система имеет решение, и только одно.

**Ответ:** Система является - совместной определённой



## Рассмотрим пример 2

### Задание.

Задана система уравнений. Вычислим ранги основной и расширенной матрицы, т.е. проверим систему на совместимость.

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = 3 \\ 2X_1 + 2X_2 = 6 \end{cases}$$

### Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ - основная матрица.}$$

$$A | B = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{array} \right) \text{ - расширенная матрица.}$$



1) Найдём ранг основной матрицы  $A$

$$M_1^1 = |2| = 2 \quad \Rightarrow \quad \text{rang}(A) = 1$$


2) Найдём ранг расширенной матрицы  $A|B$

$$M_1^1 = |2| = 2 \quad \Rightarrow \quad \text{rang}(A|B) = 1$$

**Получилось**, что  $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 1$ , но  $n=2$ . ( $1 < 2$ )

Следовательно, система совместна, имеет бесконечное множество решений.

**Ответ:** Система является - совместной неопределённой



## Рассмотрим пример 3

### Задание.

Задана система уравнений. Вычислим ранги основной и расширенной матрицы, т.е. проверим систему на совместимость.

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = 3 \\ X_1 + X_2 = 7 \end{cases}$$

### Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ - основная матрица.}$$

$$A | B = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 7 \end{array} \right) \text{ - расширенная матрица.}$$

1) Найдём ранг основной матрицы  $A$

$$M_1^1 = |1| = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{rang}(A) = 1$$

2) Найдём ранг расширенной матрицы  $A|B$

$$M_2^1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = (7-3) = 4 \quad \text{Старший минор не равен нулю}$$

$$\Rightarrow \quad \text{rang}(A|B) = 2$$

Итак,  $\text{rang}(A) = 1$ ,  $\text{rang}(A|B) = 2$ , они не равны, следовательно, система не имеет решений.

**Ответ:** Система является - несовместной

## Рассмотрим пример 4

### Задание.

Задана система уравнений. Вычислим ранги основной и расширенной матрицы, т.е. проверим систему на совместимость.

$$\begin{cases} X_1^2 + X_2^2 = 25 \\ X_1 - X_2 = 0 \end{cases}$$

### Решение.

Эту систему не исследуем, так как теорема Кронекера - Капелли применима только к системам линейных алгебраических уравнений.

## Рассмотрим пример 5

### Задание.

Задана система уравнений. Вычислим ранги основной и расширенной матрицы, т.е. проверим систему на совместимость.

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 = 0 \\ 3X_1 + 5X_2 = 0 \end{cases}$$

### Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ - основная матрица.}$$

$$A | B = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{array} \right) \text{ - расширенная матрица.}$$

1) Найдём ранг основной матрицы  $A$

$$M_2^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = (5-6) = -1 \quad \Rightarrow \quad \text{rang}(A) = 2$$

2) Найдём ранг расширенной матрицы  $A|B$

$$M_2^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = (5-6) = -1 \quad \Rightarrow \quad \text{rang}(A|B) = 2$$

Количество переменных  $n=2$ .  $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 2$

**Ответ:** система является совместимой и имеет единственное решение. А так как система однородная, то это единственное решение и есть  $(0;0)$ .

### ПРИМЕЧАНИЕ

В однородных системах ранги основной матрицы и расширенной всегда равны между собой. Столбец свободных членов в расширенной матрице – нулевой.

## Рассмотрим пример 6

### Задание.

Задана система уравнений. Вычислим ранги основной и расширенной матрицы, т.е. проверим систему на совместимость.

$$\begin{cases} 2X_1 + 3X_2 = 0 \\ 6X_1 + 9X_2 = 0 \end{cases}$$

### Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \text{ - основная матрица.}$$

$$A | B = \left( \begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 6 & 9 & 0 \end{array} \right) \text{ - расширенная матрица.}$$



1) Найдём ранг основной матрицы  $A$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A) = 1$$

2) Найдём ранг расширенной матрицы  $A|B$

$$A|B = \left( \begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 6 & 9 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{rang}(A|B) = 1$$

**Итак:**  $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 1$

Количество переменных  $n=2$ .

Значит, система имеет бесконечное множество решений

**Ответ:** Система является - совместной неопределённой

# Рассмотрим пример 7

## Задание.

Задана система уравнений. Вычислим ранги основной и расширенной матрицы, т.е. проверим систему на совместимость.

## Решение.

$$\begin{cases} 3x + 4y + 7z = 0 \\ x - 5y + 6z = 1 \\ 8x + y - z = 10 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 1 & -5 & 6 \\ 8 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ - основная матрица.}$$

$$A | B = \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 7 & 0 \\ 1 & -5 & 6 & 1 \\ 8 & 1 & -1 & 10 \end{array} \right) \text{ - расширенная матрица.}$$

1) Найдём ранг основной матрицы  $A$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 1 & -5 & 6 \\ 8 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 15 + 7 + 192 + 280 - 18 + 4 = 480$$

Старший минор не равен нулю

⇒  $\text{rang}(A) = 3$

2) Найдём ранг расширенной матрицы  $AI B$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 1 & -5 & 6 \\ 8 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 480$$

Старший минор не равен нулю

⇒  $\text{rang}(AI B) = 3$

**Ответ:** Это неоднородная система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Система является - совместной определённой - (решение только одно).



# Основные источники

- Лунгу К.Н. Сборник задач по высшей математике. 1 часть / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С. Н. Федин. – 7-е изд. – М.: Айрис – пресс, 2008. - 576с.: ил. – ( Высшее образование )
  - Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть / Д.Т. Письменный – 5-е изд. – М.: Айрис – пресс, 2005.-288с.: ил.
  - Тюрникова Г.В. Курс высшей математики для начинающих: Учебное пособие. – М.: ГУ-ВШЭ, 2008. 376с.
  - <http://mathsun.ru/> - История математики. Биографии великих математиков
- 