Геометрические места точек и решение простых уравнений и неравенств

НИШ ФМН, Шымкент.

Учитель математики: Кененбаева Гульнур Ахметжановна

Цели обучения:

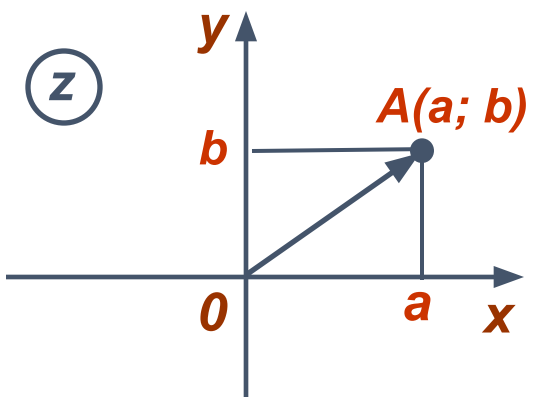
ММ 12.1. уммет изображать комплексные
числа на комлекснй плоскости
(используя диаграмму Аргана)

АУ 12.5. умеет изображать
на комплексной плоскости множества точек,
заданных
несложными уравнениями и неравенствами

Геометрическое изображение комплексных чисел

Всякое комплексное число $z = a + i \cdot b$, можно изобразить на плоскости *XOY* в виде точки *A(a; b).*

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называют ***плоскостью комплексной переменной***.



Точкам, лежащим на оси *OX*, соответствуют действительные числа ($b = 0$), поэтому ось *OX* называют ***действительной осью***.

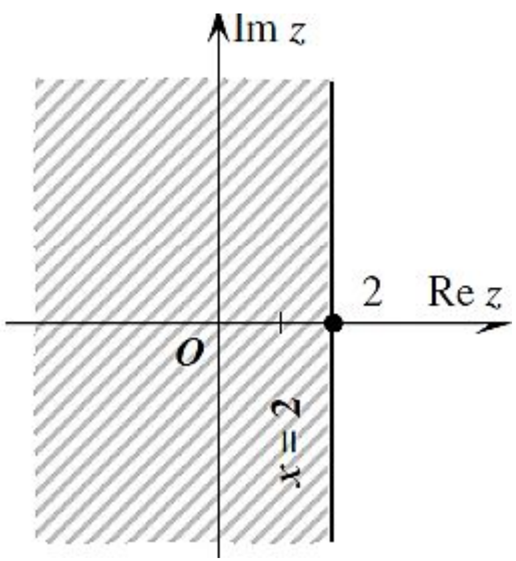
Точкам, лежащим на оси *OY* , соответствуют чисто мнимые числа ($a = 0$), поэтому ось *OY* называют ***мнимой осью***.

Иногда удобно считать геометрическим изображением комплексного числа *z* вектор $\overline{OA}$

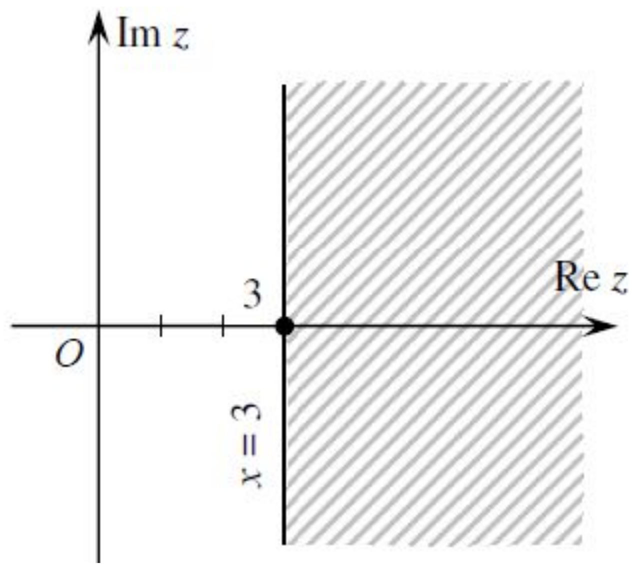
Пример 1.13 Построить на комплексной плоскости множество точек, которые удовлетворяют заданному условию:

1) $\operatorname{Re} z \le 2$; 2) $\operatorname{Re} z \ge 3$; 3) $-1 \le \operatorname{Re} z \le 4$; 4) $\operatorname{Im} z \ge 6$; 5) $-1 \le \operatorname{Im} z \le 3$;

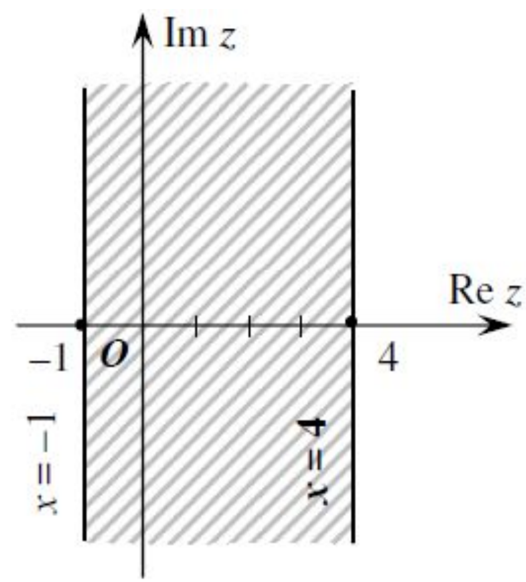
1) $\operatorname{Re} z \le 2$;



2) $\operatorname{Re} z \ge 3$;



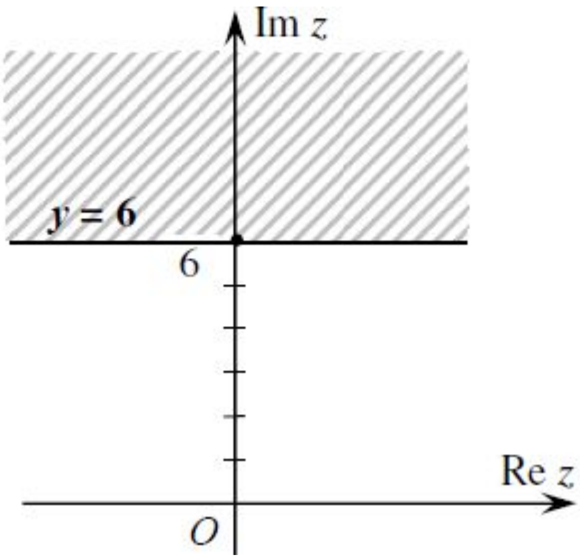
3) $-1 \le \operatorname{Re} z \le 4$



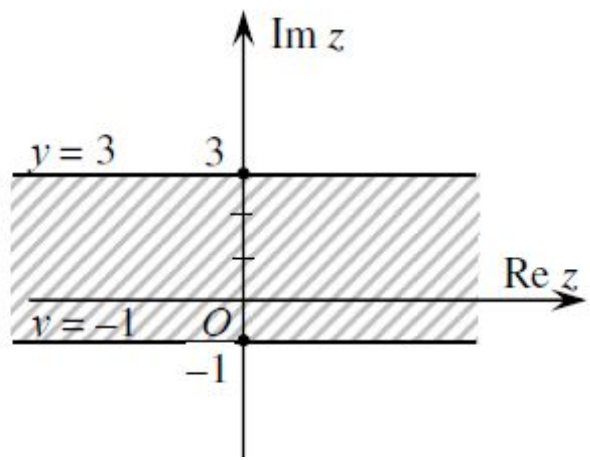
Пример 1.13 Построить на комплексной плоскости множество точек, которые удовлетворяют заданному условию:

4) $\operatorname{Im} z \geq 6$; 5) $-1 \leq \operatorname{Im} z \leq 3$; 6) $\begin{cases} -3 \leq \operatorname{Re} z \leq 1; \\ 2 \leq \operatorname{Im} z \leq 4. \end{cases}$

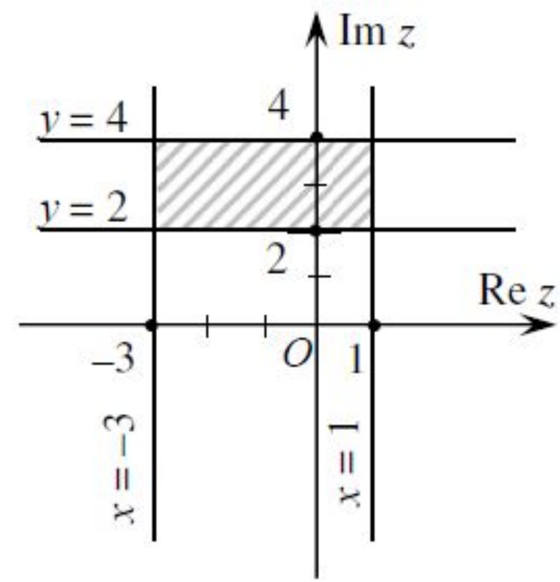
4) $\operatorname{Im} z \geq 6$;



5) $-1 \leq \operatorname{Im} z \leq 3$;



6) $\begin{cases} -3 \leq \operatorname{Re} z \leq 1; \\ 2 \leq \operatorname{Im} z \leq 4. \end{cases}$



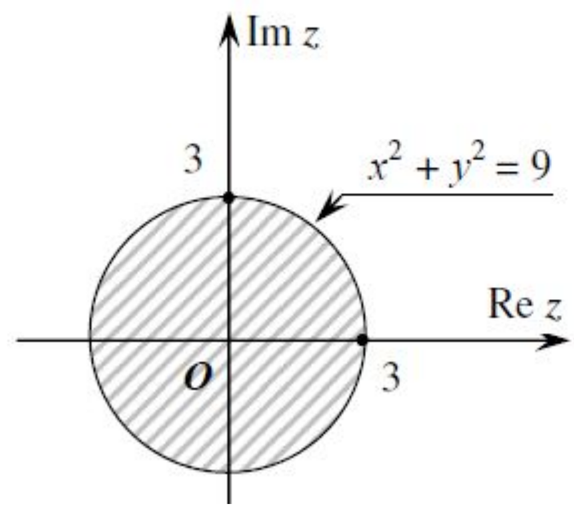
Пример 1.14 Построить на комплексной плоскости множество точек, которые удовлетворяют заданному условию:

1) $|z| \le 3$;

Р е ш е н и е.

Пусть $z = x + iy$.

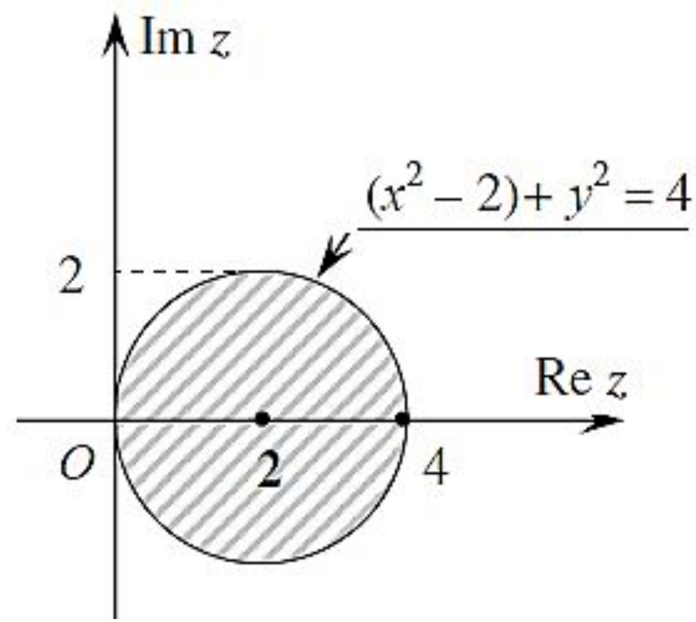
1) Условие $|z| \le 3$ равносильно неравенству $\sqrt{x^2 + y^2} \le 3$ или $x^2 + y^2 \le 9$. Последнее неравенство определяет множество точек круга с центром в начале координат и радиусом $r = 3$ и на окружности, которая его ограничивает. Соответствующее множество точек изображено на рис. 1.10.



Пример 1.14 Построить на комплексной плоскости множество точек, которые удовлетворяют заданному условию:

$$2)\ |z-2| \le 2;$$

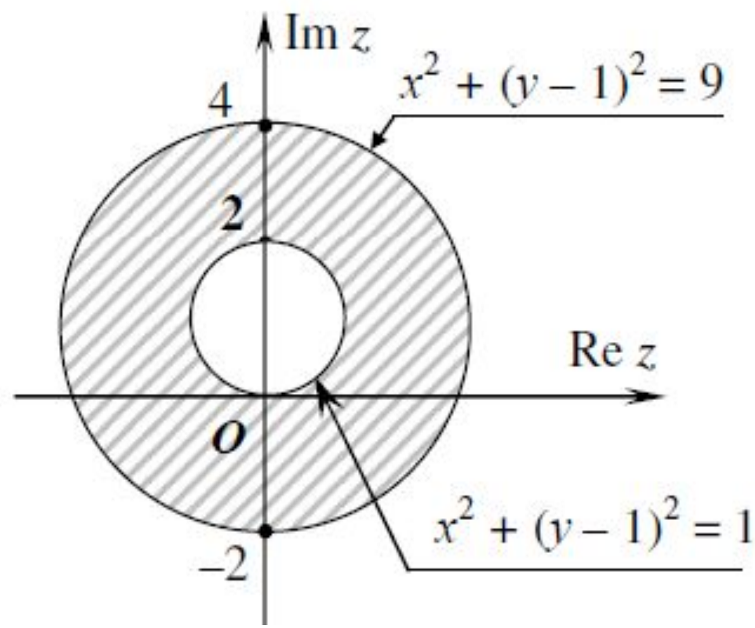
2) Запишем неравенство $|z-2| \le 2$ в форме $|x+iy-2| \le 2$, откуда $|(x-2)+iy| \le 2$ или $(x-2)^2+y^2 \le 4$. Последнее неравенство задает круг с центром в точке (2; 0), радиус которого $r = 2$ (рис. 1.11) и ограничивающую его окружность.



Пример 1.14 Построить на комплексной плоскости множество точек, которые удовлетворяют заданному условию:

$$1 \le |z - i| \le 3$$

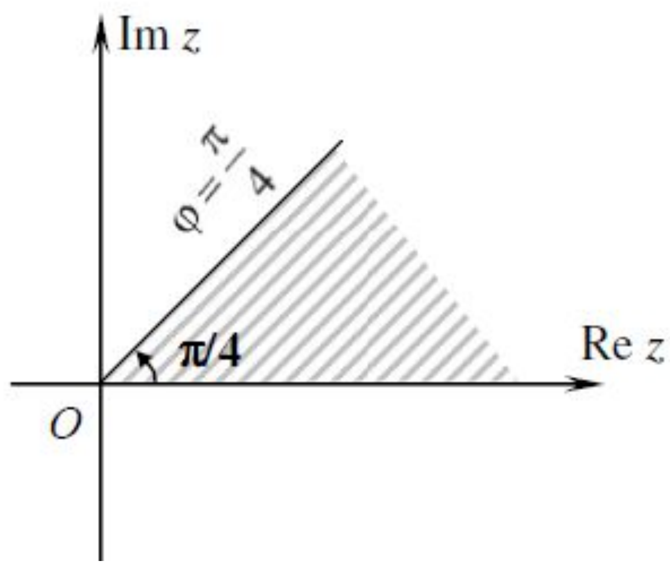
3) Из неравенства $1 \le |z - i| \le 3$ выходит $1 \le |x + i(y - 1)| \le 3$, $1 \le \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \le 3$. Отсюда, имеем неравенство $1 \le x^2 + (y - 1)^2 \le 9$, которое определяет кольцо, изображенное на рис. 1.12.



Пример 1.14 Построить на комплексной плоскости множество точек, которые удовлетворяют заданному условию:

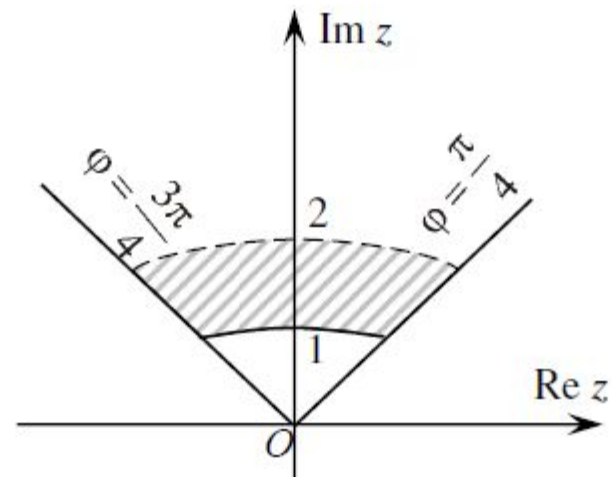
4) $0 \le \arg z \le \dfrac{\pi}{4}$;

4) Неравенство $0 \le \arg z \le \dfrac{\pi}{4}$ определяет множество точек, которые ограничены осью $\operatorname{Re} z$ и лучом, выходящим из начала координат под углом $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ к оси $\operatorname{Re} z$



Пример 1.14 Построить на комплексной плоскости множество точек, которые удовлетворяют заданному условию:

5) $\begin{cases} 1 \le r < 2; \\ \dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{3\pi}{4}. \end{cases}$



5) Условие

$$\begin{cases} 1 \le r < 2; \\ \dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$$

определяет ту часть кольца $1 \le x^2 + y^2 < 2$, которая ограничена лучами, выходящими из начала координат под углами $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ и $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$ к оси $\operatorname{Re} z$. При этом точки, которые лежат на большей окружности, к отмеченному множеству точек не принадлежат. Соответствующее множество точек изображено на рис. 1.14.

Решение задач.

Запишите уравнение окружности: а) радиуса 3 с центром в точке $1+i$; б) с центром в точке $(3, 0)$, проходящей через точку $(6, -4)$.

Изобразите на комплексной плоскости множество всех чисел z, удовлетворяющих заданному условию:

34.6. а) $|z| = 3$; в) $|z + 2| = 3$;

б) $|z - 1| = 3$; г) $|z + 3i| = 3$.

○34.7. а) $|z - i| = 1$; в) $|z - 1 - i| = \sqrt{2}$;

б) $|z + 2i| = 2$; г) $|z + 4 + 3i| = 5$.

○34.10. **Изобразите на комплексной плоскости множество всех чисел z, удовлетворяющих уравнению:**

а) $|z| = |z - 1|$; в) $|z - 1| = |z - i|$;

б) $|z - 1| = |z - 3|$; г) $|z + 3i| = |z + 4|$.

Решение задач.

о34.20. Изобразите на комплексной плоскости множество всех тех чисел z, у которых:

а) $\frac{\pi}{2} < \arg(z) < \frac{3\pi}{4}$ и $|z| = 2$;

б) $\frac{\pi}{2} < \arg(z) < \frac{3\pi}{4}$ и $3 < |z| < 5$;

в) $-\frac{3\pi}{4} < \arg(z) < \frac{\pi}{6}$ и $|z| = 8$;

г) $-\frac{5\pi}{6} < \arg(z) < \frac{2\pi}{3}$ или $1 < |z| < 2$.