

*Геометрические места точек и
решение простых уравнений и
неравенств*

НИШ ФМН, Шымкент.

Учитель математики: Кененбаева Гульнур Ахметжановна

Цели обучения:

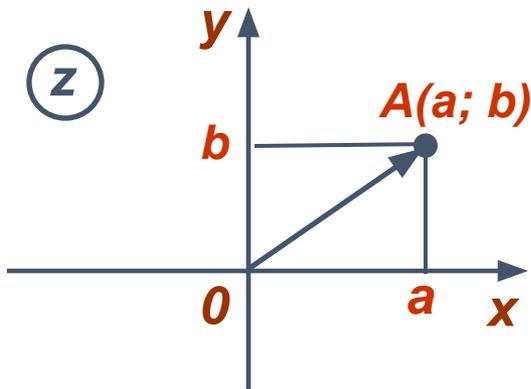
ММ 12.1. уметь изображать комплексные числа на комплексной плоскости (используя диаграмму Аргана)

АУ 12.5. умеет изображать на комплексной плоскости множества точек, заданных несложными уравнениями и неравенствами

Геометрическое изображение комплексных чисел

Всякое комплексное число $z = a + i \cdot b$, можно изобразить на плоскости XOY в виде точки $A(a; b)$.

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называют **плоскостью комплексной переменной**.



Точкам, лежащим на оси OX , соответствуют действительные числа ($b = 0$), поэтому ось OX называют **действительной осью**.

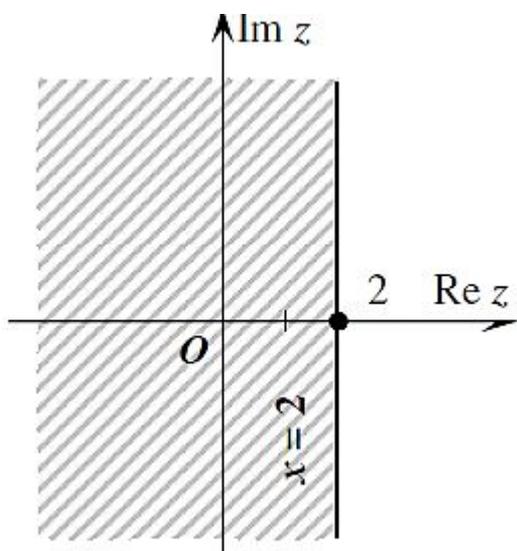
Точкам, лежащим на оси OY , соответствуют чисто мнимые числа ($a = 0$), поэтому ось OY называют **мнимой осью**.

Иногда удобно считать геометрическим изображением комплексного числа z вектор \overline{OA}

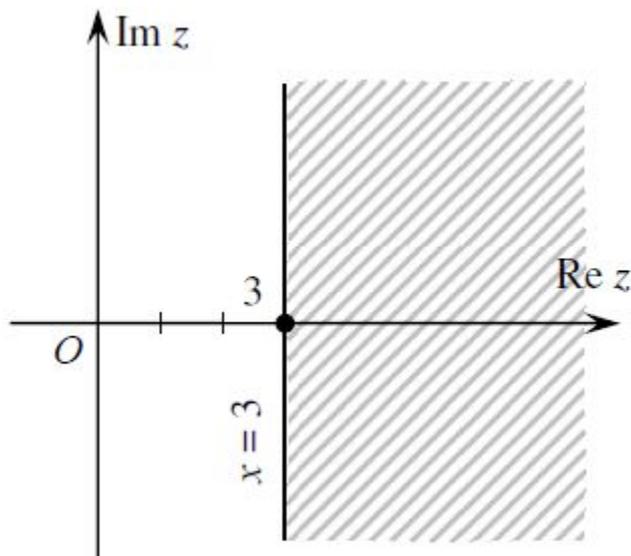
Пример 1.13 Построить на комплексной плоскости множество точек, которые удовлетворяют заданному условию:

- 1) $\operatorname{Re} z \leq 2$; 2) $\operatorname{Re} z \geq 3$; 3) $-1 \leq \operatorname{Re} z \leq 4$; 4) $\operatorname{Im} z \geq 6$; 5) $-1 \leq \operatorname{Im} z \leq 3$;

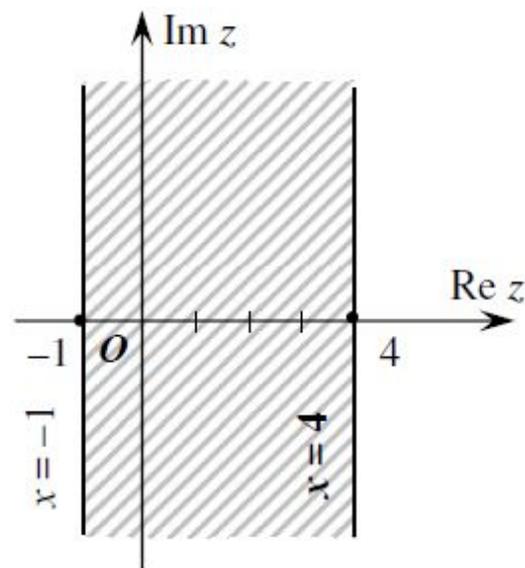
1) $\operatorname{Re} z \leq 2$;



2) $\operatorname{Re} z \geq 3$;



3) $-1 \leq \operatorname{Re} z \leq 4$



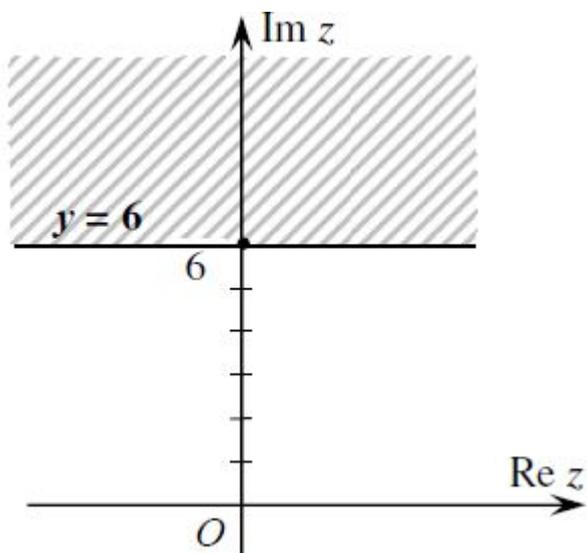
Пример 1.13 Построить на комплексной плоскости множество точек, которые удовлетворяют заданному условию:

4) $\text{Im } z \geq 6$;

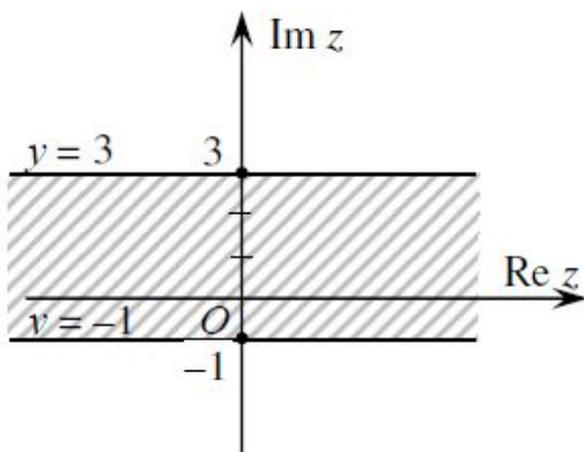
5) $-1 \leq \text{Im } z \leq 3$;

6) $\begin{cases} -3 \leq \text{Re } z \leq 1; \\ 2 \leq \text{Im } z \leq 4. \end{cases}$

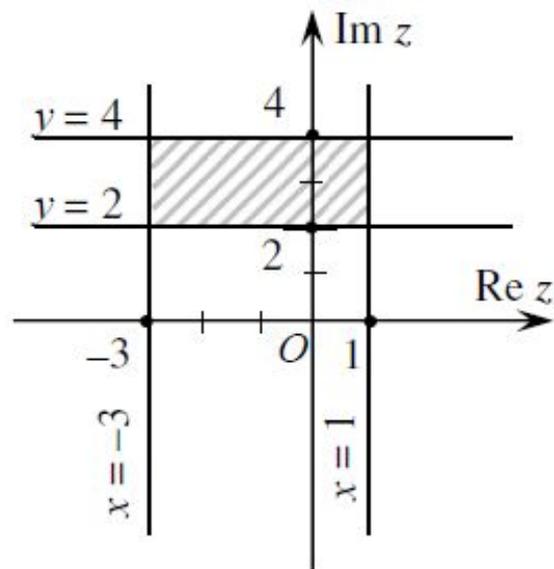
4) $\text{Im } z \geq 6$;



5) $-1 \leq \text{Im } z \leq 3$;



6) $\begin{cases} -3 \leq \text{Re } z \leq 1; \\ 2 \leq \text{Im } z \leq 4. \end{cases}$



Пример 1.14 Построить на комплексной плоскости множество точек, которые удовлетворяют заданному условию:

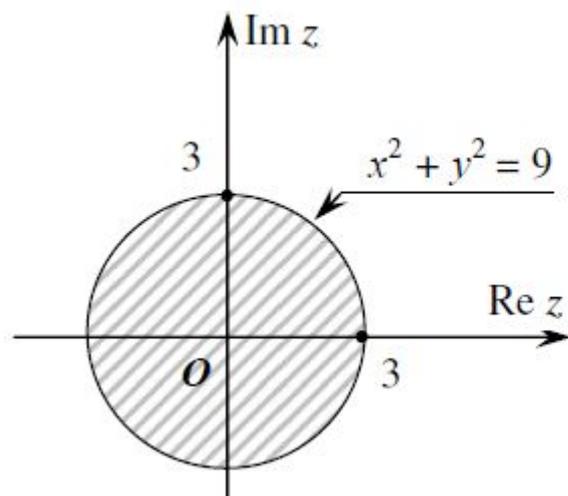
1) $|z| \leq 3$;

Р е ш е н и е .

Пусть $z = x + iy$.

1) Условие $|z| \leq 3$ равносильно неравенству $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 3$ или $x^2 + y^2 \leq 9$.

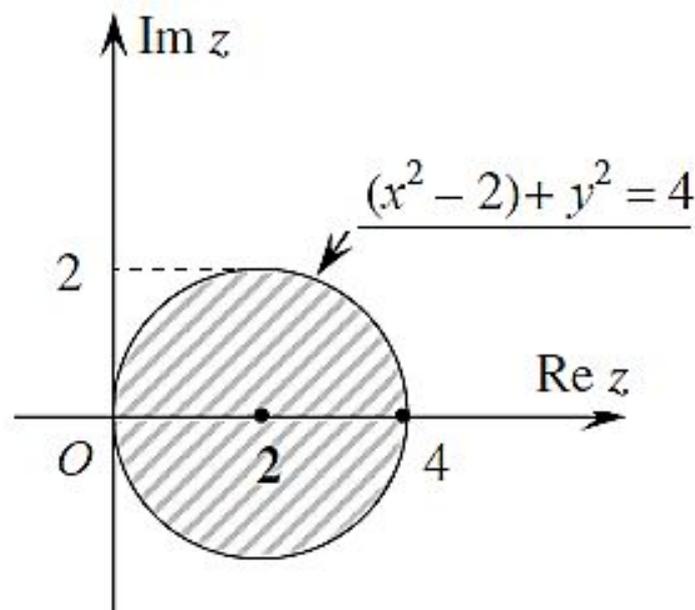
Последнее неравенство определяет множество точек круга с центром в начале координат и радиусом $r = 3$ и на окружности, которая его ограничивает. Соответствующее множество точек изображено на рис. 1.10.



Пример 1.14 Построить на комплексной плоскости множество точек, которые удовлетворяют заданному условию:

$$2) |z - 2| \leq 2;$$

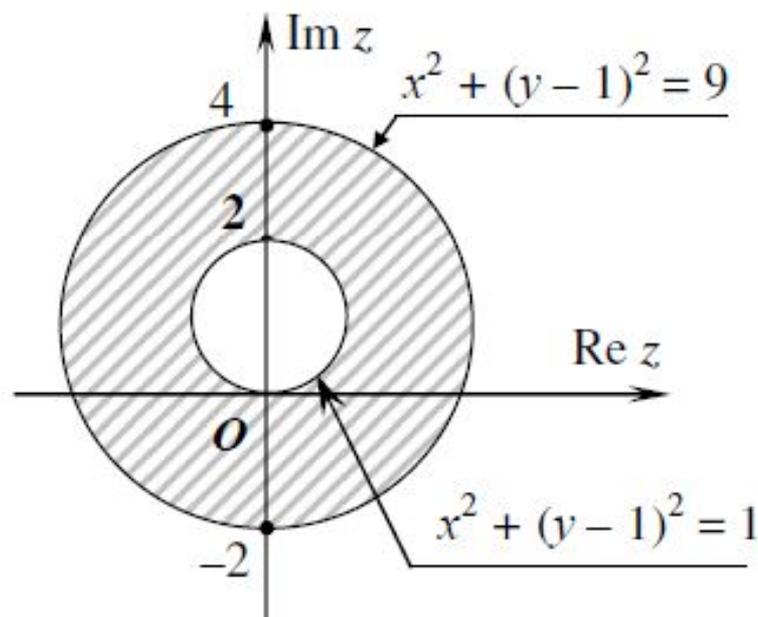
2) Запишем неравенство $|z - 2| \leq 2$ в форме $|x + iy - 2| \leq 2$, откуда $|(x - 2) + iy| \leq 2$ или $(x - 2)^2 + y^2 \leq 4$. Последнее неравенство задает круг с центром в точке $(2; 0)$, радиус которого $r = 2$ (рис. 1.11) и ограничивающую его окружность.



Пример 1.14 Построить на комплексной плоскости множество точек, которые удовлетворяют заданному условию:

$$1 \leq |z - i| \leq 3$$

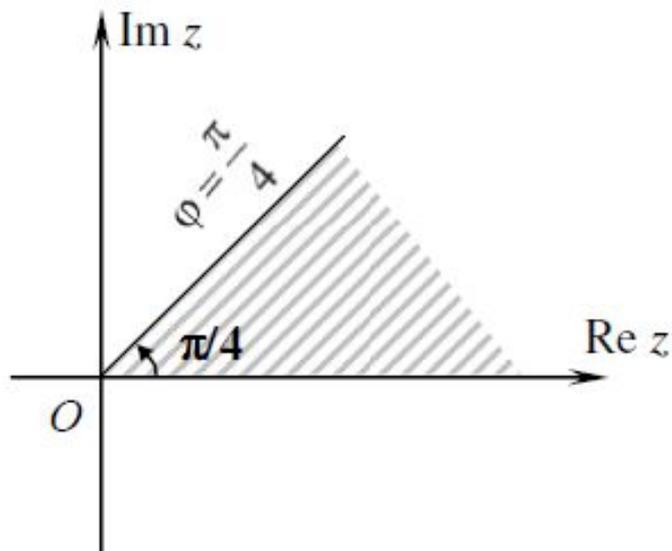
3) Из неравенства $1 \leq |z - i| \leq 3$ выходит $1 \leq |x + i(y - 1)| \leq 3$, $1 \leq \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} \leq 3$. Отсюда, имеем неравенство $1 \leq x^2 + (y - 1)^2 \leq 9$, которое определяет кольцо, изображенное на рис. 1.12.



Пример 1.14 Построить на комплексной плоскости множество точек, которые удовлетворяют заданному условию:

$$4) 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4};$$

4) Неравенство $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$ определяет множество точек, которые ограничены осью $\operatorname{Re} z$ и лучом, выходящим из начала координат под углом $\varphi = \frac{\pi}{4}$ к оси $\operatorname{Re} z$.

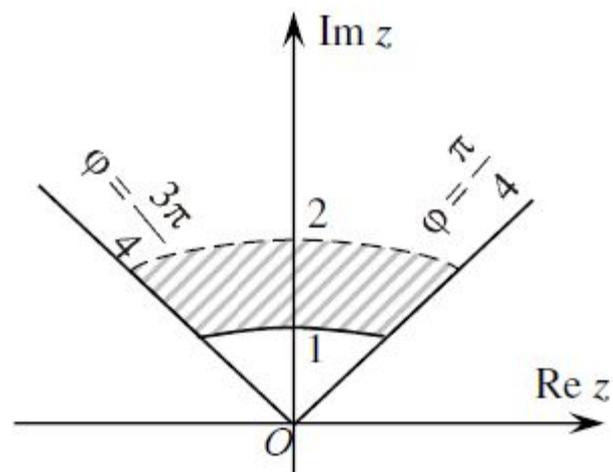


Пример 1.14 Построить на комплексной плоскости множество точек, которые удовлетворяют заданному условию:

$$5) \begin{cases} 1 \leq r < 2; \\ \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}. \end{cases}$$

5) Условие

$$\begin{cases} 1 \leq r < 2; \\ \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$



определяет ту часть кольца $1 \leq x^2 + y^2 < 2$, которая ограничена лучами, выходящими из начала координат под углами $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ к оси $\text{Re } z$. При этом точки, которые лежат на большей окружности, к отмеченному множеству точек не принадлежат. Соответствующее множество точек изображено на рис. 1.14.

Решение задач.

Запишите уравнение окружности: а) радиуса 3 с центром в точке $1+i$; б) с центром в точке $(3, 0)$, проходящей через точку $(6, -4)$.

Изобразите на комплексной плоскости множество всех чисел z , удовлетворяющих заданному условию:

34.6. а) $|z| = 3$;

в) $|z + 2| = 3$;

б) $|z - 1| = 3$;

г) $|z + 3i| = 3$.

34.7. а) $|z - i| = 1$;

в) $|z - 1 - i| = \sqrt{2}$;

б) $|z + 2i| = 2$;

г) $|z + 4 + 3i| = 5$.

34.10. Изобразите на комплексной плоскости множество всех чисел z , удовлетворяющих уравнению:

а) $|z| = |z - 1|$;

в) $|z - 1| = |z - i|$;

б) $|z - 1| = |z - 3|$;

г) $|z + 3i| = |z + 4|$.

Решение задач.

34.20. Изобразите на комплексной плоскости множество всех тех чисел z , у которых:

а) $\frac{\pi}{2} < \arg(z) < \frac{3\pi}{4}$ и $|z| = 2$;

б) $\frac{\pi}{2} < \arg(z) < \frac{3\pi}{4}$ и $3 < |z| < 5$;

в) $-\frac{3\pi}{4} < \arg(z) < \frac{\pi}{6}$ и $|z| = 8$;

г) $-\frac{5\pi}{6} < \arg(z) < \frac{2\pi}{3}$ или $1 < |z| < 2$.