Способы отбора корней в тригонометрических уравнениях

Е. Ф

Актуальность

Так как я ученик 11 класса, и в этом году сдаю ЕГЭ по математике на профильном уровне, то мне необходимо знать способы отбора корней и уметь их применять при решении 13 задания. Так же я могу помочь одноклассникам при выполнении этого задания.

Цель работы: изучить различные способы отбора корней в тригонометрических уравнениях на промежутке $[a; b]$.

Задачи: 1.Изучить литературу по способам отбора корней принадлежащих промежутку [а; b] при решении тригонометрических уравнений;

2.Рассмотреть особенности каждого найденного способа;

3. Научиться определять наиболее рациональный способ отбора корней из промежутка[а; b] при решении тригонометрических уравнений;

4. Показать практическое применение полученных знаний и оценить степень сложности в использовании различных способов.

5. Познакомить одноклассников с рациональными способами отбора корней из промежутка [*а; b*] при решении тригонометрических уравнений.

Объект исследования: корни тригонометрического уравнения, принадлежащие промежутку [a; b].

Предмет исследования: способы отбора корней, принадлежащих промежутку [a; b], при решении тригонометрических уравнений.

Методы исследования:

1. Анализ;
2. Сравнение;
3. Экспериментальное подтверждение.

Гипотеза

- Чем я лучше научусь отбирать корни, принадлежащие промежутку[a; b], при решении тригонометрических уравнений, используя рациональные способы отбора корней, тем больше времени у меня останется на решение остальных заданий для получения большего количества баллов при оценке работы ЕГЭ по математике на профильном уровне.

Способы отбора корней

- Арифметический;
- Алгебраический;
- Геометрический;
- Графический.

Арифметический способ

Пример. а) Решите уравнение $2\cos^2 x = \sqrt{3}\,\sin(\frac{3\pi}{2} + x)$;

б) Найдите все корни уравнения на отрезке $[\frac{3\pi}{2}; 3\pi]$.

Решение. а) Решив это уравнение, я получила следующие корни: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n\epsilon Z$, $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n\epsilon Z$;
б) Теперь найдем все корни этого уравнения на заданном отрезке способом перебора.

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n\epsilon Z$$

$$n = 0, x = \frac{\pi}{2} \notin \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$$

$$n = 1, x = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}\ \epsilon \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$$

$$n = 2, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2} \epsilon \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$$

$$n = 3, x = \frac{\pi}{2} + 3\pi = \frac{7\pi}{2} \notin \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n\epsilon Z$$

$$n = 0, x = \frac{5\pi}{6} \notin \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$$

$$n = 1, x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n = \frac{17\pi}{6} \epsilon \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$$

$$n = 2, x = \frac{5\pi}{6} + 4\pi = \frac{29\pi}{6} \notin \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$$

$$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n\epsilon Z$$

$$n = 0, x = \ -\frac{5\pi}{6} \epsilon \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$$

$$n = 1, x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n = \frac{7\pi}{6} \epsilon \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$$

$$n = 2, x = -\frac{5\pi}{6} + 4\pi = \frac{19\pi}{6} \epsilon \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$$

Ответ: $\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \frac{17\pi}{6}$

- преимущества арифметического способа: определяет точное количество корней уравнения на данном промежутке и их значение.
- Недостатки: иногда приходится долго перебирать значение *n*, для того чтобы определить все значения из указанного промежутка.

Алгебраический способ

- Решив уравнение, я получила корни: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n\epsilon Z$, $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n\epsilon Z$.

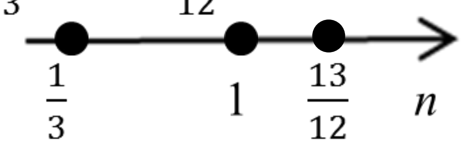
При помощи двойного неравенства определяем значение n. На координатной прямой отмечаем эти значения и между ними находим целые числа.

$$\frac{3\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leq 3\pi$$

$$\frac{3\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} \leq 2\pi n \leq 3\pi - \frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{4\pi}{6*2\pi} \leq \frac{2\pi n}{2\pi} \leq \frac{13\pi}{6*2\pi}$$

$$\frac{1}{3} \leq n \leq \frac{13}{12}$$



$n=1, n\epsilon Z$

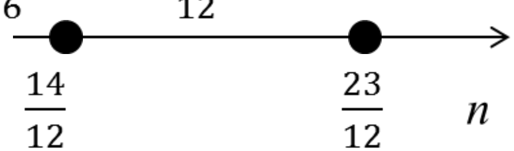
$$\frac{3\pi}{2} \leq -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leq 3\pi$$

$$\frac{3\pi}{2} + \frac{5\pi}{6} \leq 2\pi n \leq 3\pi + \frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{14\pi}{6} \leq 2\pi n \leq \frac{23\pi}{6}$$

$$\frac{14\pi}{6*2\pi} \leq \frac{2\pi n}{2\pi} \leq \frac{23\pi}{6*2\pi}$$

$$\frac{7}{6} \leq n \leq \frac{23}{12}$$



$n = \emptyset, n\epsilon Z$

Когда мы нашли целое значение n, подставляем его в найденные корни уравнения и получим корни это уравнения на данном промежутке.

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{17\pi}{6}$$

Также решаем дальше.

$$\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} + \pi n \leq 3\pi$$

$$\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \leq \pi n \leq 3\pi - \frac{\pi}{2}$$

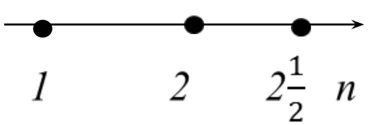
$$\frac{2\pi}{2\pi} \leq \frac{\pi n}{\pi} \leq \frac{5\pi}{2\pi}$$

$$1 \leq n \leq 2\frac{1}{2}$$

$$n = 1;\ 2$$

$$n = 1, x = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$$

$$n = 2, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$$



Ответ: $\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \frac{17\pi}{6}$

- Преимущества алгебраического способа: по рисунку видно количество корней и их значения.

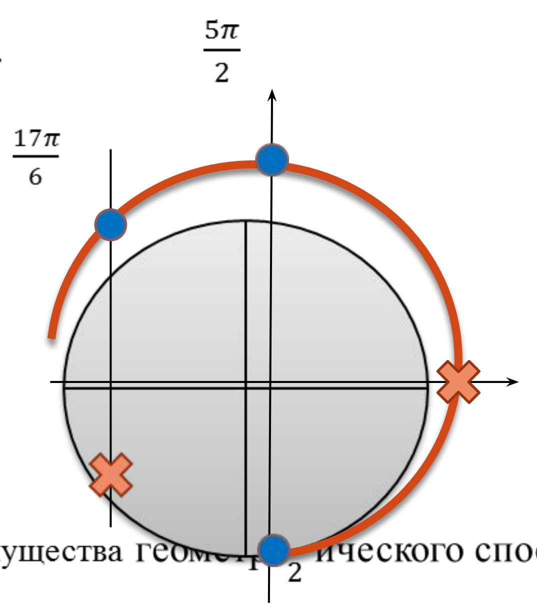
- Недостатки: такой способ может дать ошибку при определении корней, если неправильно использовать период.

Геометрический способ

- При решении уравнения я получила $\cos x = 0$; $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Далее отбираю корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$ с помощью единичной окружности. Для этого на ней отмечаю дугу равную данному отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$ и точки пересечения прямых x=0 и x= $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ с построенной дугой.

Таким образом, корнями, принадлежащими данному отрезку являются числа

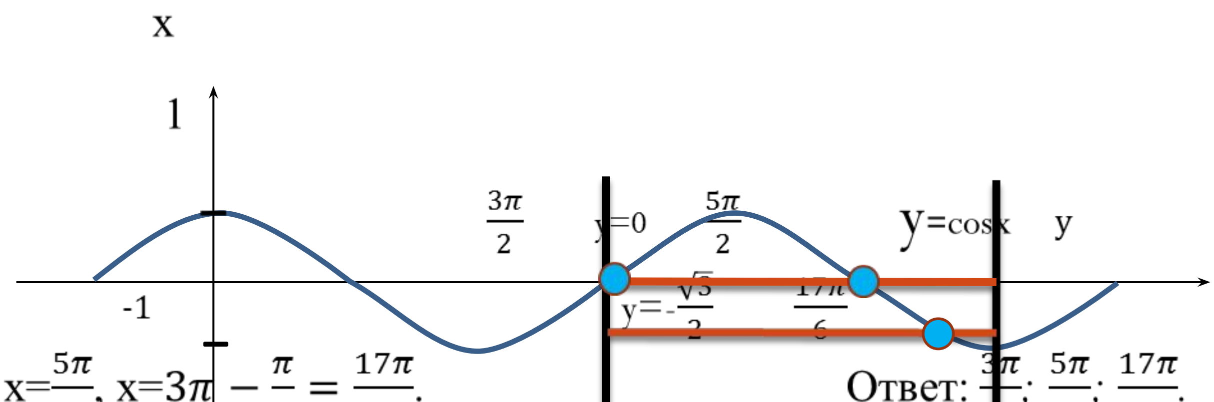
$\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$; $\frac{17\pi}{6}$.



- Преимущества геометрического способа: по рисунку видно количество корней и их значения.
- Недостатки: такой способ может дать ошибку при определении корней, если неправильно использовать период.

Графический способ

- При решении уравнения я получила $\cos x = 0$; $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Выполняю построение графиков функций y=cosx, y=0 и y=$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ определяем промежуток $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$ на котором нужно отобрать корни. Определяем значения х, соответствующие точкам пересечения построенных графиков функций.



Получаем x=$\frac{3\pi}{2}$, x=$\frac{5\pi}{2}$, x=$3\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{17\pi}{6}$.

Ответ: $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$; $\frac{17\pi}{6}$.

- Преимущества графического способа: сразу видно количество корней и легко можно определить их значения.

- Недостатки: много времени уходит на построение графиков функций, без бумаги в клетку могут возникнуть неточности в построении графиков и соответственно неверное определение корней уравнения.

Практическая часть

- Пример 1. а) Решить уравнение $(49^{\cos x})^{\sin x} = 7^{\sqrt{2}\cos x}$.

б) Найти все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

а) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n\epsilon Z}$; $\boldsymbol{x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n\epsilon Z}$.

б) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n\epsilon Z$

$n = 0, x = \frac{\pi}{2} \notin \left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$

$n = 1, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2} \epsilon \left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$

$n = 2, x = \frac{\pi}{2} + 4\pi = \frac{9\pi}{2} \notin \left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$

$x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n\epsilon Z$

$n = 0, x = \frac{\pi}{4} \notin \left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$

$n = 1, x = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4} \notin \left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$

$n = 2, x = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4} \notin \left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$

$n = 3, x = -\frac{\pi}{4} + 3\pi = \frac{11\pi}{4} \epsilon \left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$

$n = 4, x = \frac{\pi}{4} + 4\pi = \frac{17\pi}{4} \notin \left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$

Ответ: $\frac{5\pi}{2}; \frac{11\pi}{4}$.

а) Решите уравнение $\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\cos x}-2=0$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-5\pi;-\frac{7\pi}{3}]$

- $x=2\pi n, n\epsilon Z$ $\quad x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\epsilon Z$
- n=0, x=0 $\epsilon\left[-5\pi;-\frac{7\pi}{3}\right]$
- $n=-1,\ x=-2\pi \notin \left[-5\pi;-\frac{7\pi}{3}\right]$
- $n=-2, x=-4\pi\ \epsilon\left[-5\pi;-\frac{7\pi}{3}\right]$
- $n=-3, x=-6\pi \notin \left[-5\pi;-\frac{7\pi}{3}\right]$
- $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\epsilon Z$
- $n=0, x=\frac{2\pi}{3}\notin\left[-5\pi;-\frac{7\pi}{3}\right]$

$x=-\frac{2\pi}{3}\notin\left[-5\pi;-\frac{7\pi}{3}\right]$;

- $n=-1, x=\frac{2\pi}{3}-2\pi=-\frac{4\pi}{3}\notin\left[-5\pi;-\frac{7\pi}{3}\right]$

$x=-\frac{2\pi}{3}-2\pi=-\frac{8\pi}{3}\ \epsilon\left[-5\pi;-\frac{7\pi}{3}\right]$;

- $n=-2, x=\frac{2\pi}{3}-4\pi=-\frac{10\pi}{3}\ \epsilon\left[-5\pi;-\frac{7\pi}{3}\right]$
- $x=-\frac{2\pi}{3}-4\pi=-\frac{14\pi}{3}\ \epsilon\left[-5\pi;-\frac{7\pi}{3}\right]$;
- $n=-3, x=\frac{2\pi}{3}-6\pi=-\frac{16\pi}{3}\ \epsilon\left[-5\pi;-\frac{7\pi}{3}\right]$
- $x=-\frac{2\pi}{3}-6\pi=-\frac{20\pi}{3}\notin\left[-5\pi;-\frac{7\pi}{3}\right]$
- Ответ: $-\frac{10\pi}{3}$; -4π; $-\frac{8\pi}{3}$; $-\frac{14\pi}{3}$

Пример 2. а) Решите уравнение $2\sin^4 x + 3\cos 2x + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; 3\pi]$.

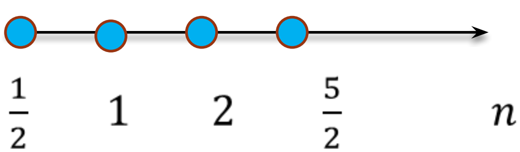
а) $x = \pm\frac{\pi}{2} + \pi n, n \epsilon Z$

б) $\pi \le \frac{\pi}{2} + \pi n \le 3\pi$

$\pi - \frac{\pi}{2} \le \pi n \le 3\pi - \frac{\pi}{2}$

$\frac{1}{2} \le n \le \frac{5}{2}$

$\frac{\pi}{2} \le \pi n \le \frac{5\pi}{2}$



$n = 1, 2$

$x = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$

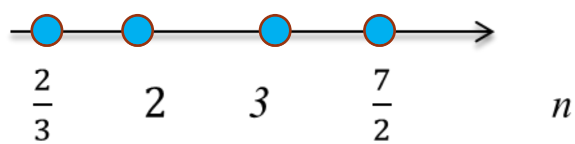
$x = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$

$\pi \le -\frac{\pi}{2} + \pi n \le 3\pi$

$\pi + \frac{\pi}{2} \le \pi n \le 3\pi + \frac{\pi}{2}$

$\frac{3\pi}{2} \le \pi n \le \frac{7\pi}{2}$

$\frac{3}{2} \le n \le \frac{7}{2}$



n=2, 3

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$

$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$

Ответ: $\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}$.

Пример 3. а) Решить уравнение $(16^{\sin x})^{\cos x} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{3}\sin x}$.

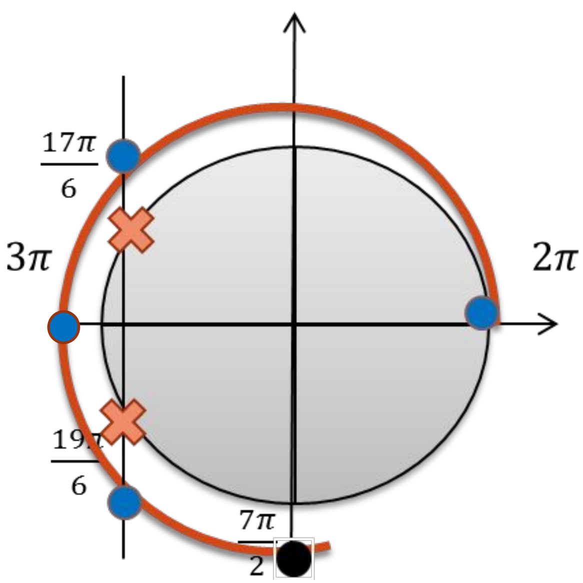
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащего промежутку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$

$\sin x = 0$

Прямые y=0, x=$-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

а) $x = \pi n, n\epsilon Z$; $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n\epsilon Z$

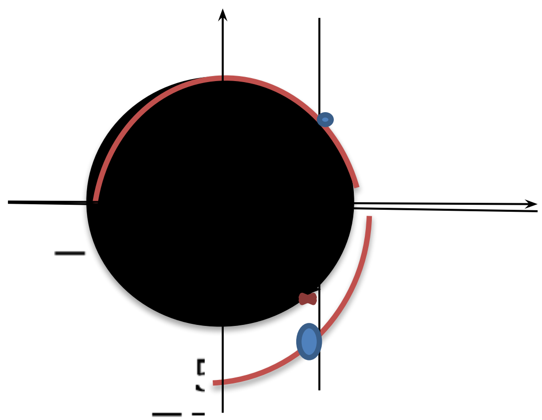
б)



Ответ: 2π; $\frac{17\pi}{6}$; 3π; $\frac{19\pi}{6}$

а) Решите уравнение $5\cos^2 x - 12\cos x + 4 = 0$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$



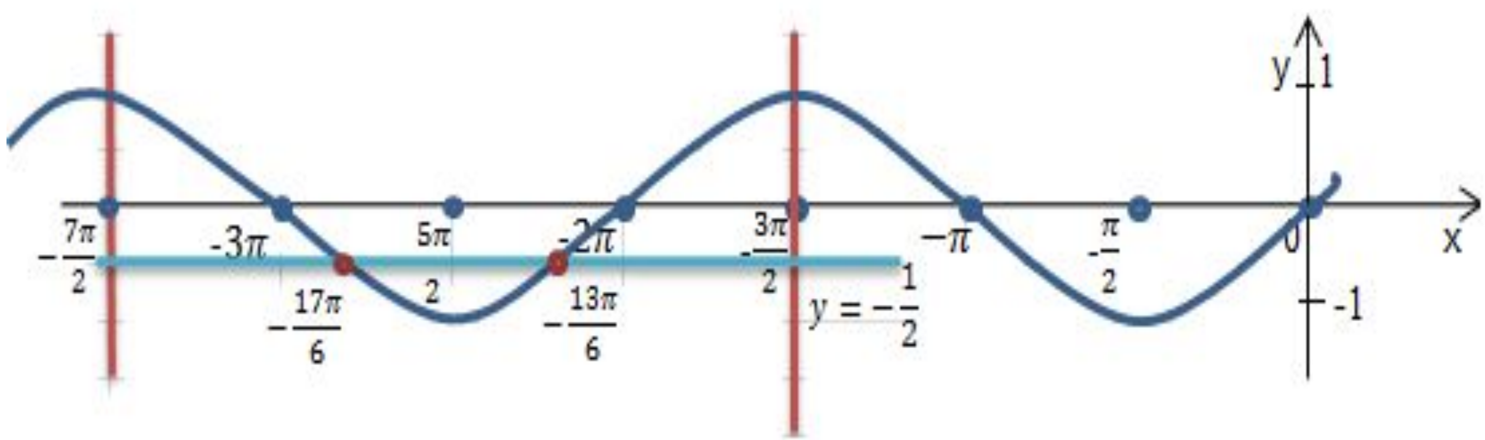
Ответ: $-2\pi + arccos\frac{2}{5}; -2\pi - arccos\frac{2}{5}.$

Пример 4. а) Решите уравнение $6\sin^2 x - 5\sin x - 4=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащих отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

а) $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$' $n\epsilon Z$

б) Отберем корни этого уравнения при помощи графика функций. Выполняем построение графика функций y=sin x и $y=-\frac{1}{2}$



- Ответ: $-\frac{13\pi}{6}; -\frac{17\pi}{6}$

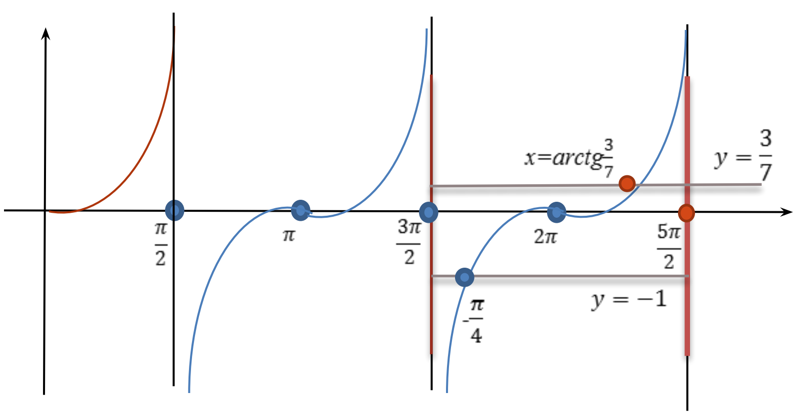
Пример 3. а) Решите уравнение $7\sin^2 x + 4\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

- $\text{tg}\, x = \frac{3}{7}$
- $tg\, x = -1$

- б) Находим корни уравнения из числового промежутка $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ с помощью графика функций $y = tg\, x$ и $y = -1, y = \frac{3}{7}$

- Ответ: $x = arctg\frac{3}{7}$; $x = -\frac{\pi}{4}$.



Вывод

- Изучив литературу по способам отбора корней принадлежащих промежутку [a; b], я рассмотрела 4 способа отбора корней и достоинства и недостатки каждого. Научился определять и применять наиболее рациональный способ отбора корней тригонометрических уравнений на заданном промежутке. А также я познакомил одноклассников с этими способами отбора корней.

Спасибо за внимание