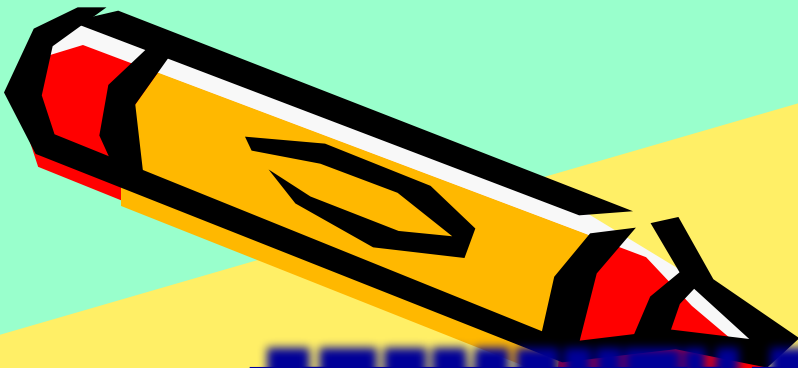




ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

НАОЧНИЙ ПОСІБНИК

З ДИСЦИПЛІНИ "Вища математика"

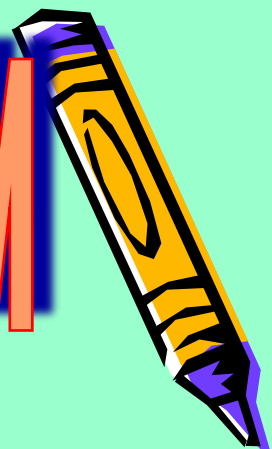
Спеціальності 5.06010101

"Будівництво та експлуатація будівель і споруд"



Укладач викладач I категорії Хорунжа І.О.

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ



ЗМІСТ

1. Матриці. Види матриць
2. Дії над матрицями
3. Застосування матриць у будівельній справі
4. Визначники. Властивості визначників
5. Правило трикутників
6. Мінори Мінори та алгебраїчні доповнення
7. Обернена матриця
8. Системи лінійних рівнянь. Системи лінійних рівнянь. Метод Крамера



ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

ЗМІСТ



1. Матриці. Види матриць.

2. Дії над матрицями.
3. Застосування матриць у будівельній справі.
4. Визначники. Властивості визначників.
5. Правило трикутників.
6. Мінори та алгебраїчні доповнення.
7. Обернена матриця.
8. Системи лінійних рівнянь. Метод Крамера.



Нові терміни

- матриця - матрица
- визначник — определитель
- рядок — строка
- стовпчик — столбец
- мінор - минор



МАТРИЦІ



Таблиця чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

розміра $(m \times n)$,

де m – число рядків,

n – число стовпців

називається

матрицею.



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ 7 & -5 & 9 & -2 \\ -5 & -3 & 11 & 0 \\ 6 & 13 & 21 & 7 \end{pmatrix}$$

Визначити елемент

$$a_{13} = -4$$

$$a_{33} = 9$$

$$a_{52} = 13$$

$$a_{42} = -3$$

$$a_{34} = -2$$



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ 7 & -5 & 9 & -2 \\ -5 & -3 & 11 & 0 \\ 6 & 13 & 21 & 7 \end{pmatrix}$$



Відповідь

Визначити місце
елемента

$$a_{43} = 11$$

$$a_{52} = 13$$

$$a_{34} = -2$$

$$a_{53} = 21$$

$$a_{31} = 7$$

$$a_{54} = 7$$



ВИДИ МАТРИЦЬ

матриці

МАТРИЦЯ-РЯДОК

$$A = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n})$$

МАТРИЦЯ
-СТОВПЧИК

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$$

КВАДРАТНА

$$m=n$$

НУЛЬОВА

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ТРАНСПОНОВАНА

$$A^T$$

ДИАГОНАЛЬНА

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

ОДИНИЧНА

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

СИМЕТРИЧНА

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & 5 \\ 3 & 6 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ДІЇ
НАД
МАТРИЦЯМИ

Додавання,
віднімання
матриць

$$A+B$$
$$A-B$$

Множення
матриці
на число

$$kA$$

Множення
матриць

$$AB$$

Обернення
матриці

$$A^{-1}$$



1

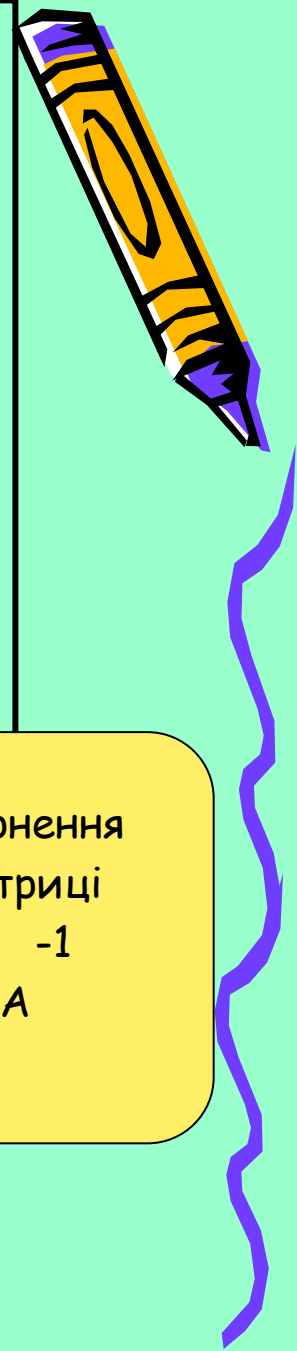
2

3

4

*

—



ДОДАВАННЯ МАТРИЦЬ

Щоб додати дві матриці A і B треба додати кожен елемент матриці A з відповідним елементом матриці B

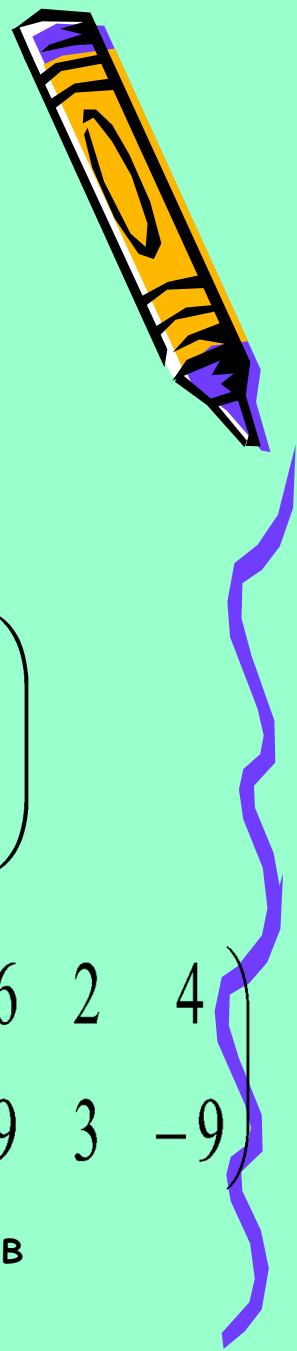
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

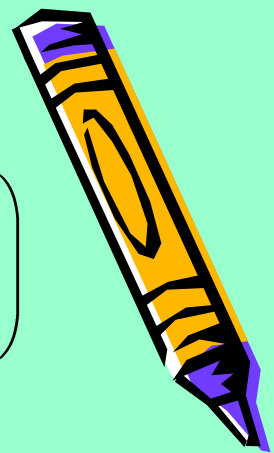
$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+4 & -3+5 & 5-1 \\ 6+3 & 1+2 & -4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 9 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

! можна додавати тільки матриці однакових розмірів

$$A+B=B+A$$



$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 16 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

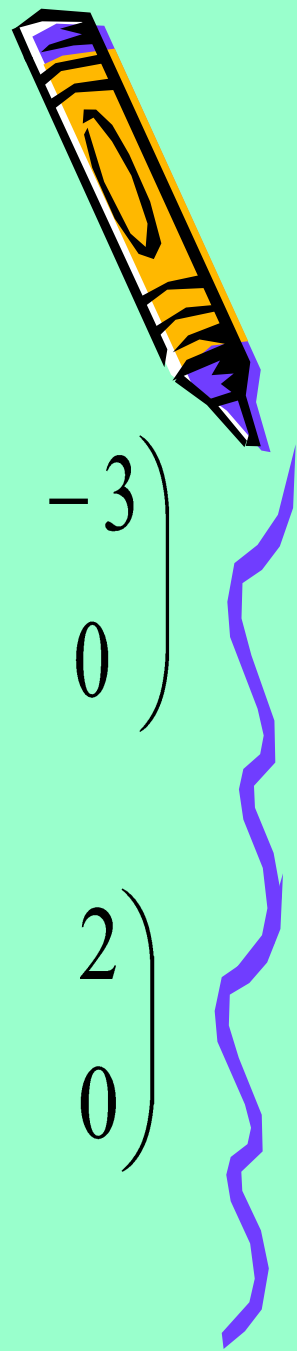


$$A + C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 21 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$C + D = ?$$



МНОЖЕННЯ МАТРИЦІ НА ЧИСЛО



$$D = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\kappa = 3; \quad \kappa D = \begin{pmatrix} 12 & -12 & -3 \\ 9 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\kappa = -2; \quad \kappa D = \begin{pmatrix} -8 & 8 & 2 \\ -6 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$



Множення матриць



Матрицю A можна перемножити на матрицю B тільки тоді, коли кількість стовпчиків матриці A дорівнює кількості рядків матриці B (матриці A і B називаються конформними)

$$(4 \times 3) \cdot (3 \times 2) = (4 \times 2)$$

$$(3 \times 2) \cdot (4 \times 3) = \dots$$

$A (2 \times 3)$

$A \times C$

$B (4 \times 2)$

$B \times A, B \times M$

$C (3 \times 1)$

$C \times ?$

$D (4 \times 5)$

$D \times ?$

$M (2 \times 1)$

$M \times ?$



Множення матриць



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = ? \quad (2 \times 2) \cdot (2 \times 3) = (2 \times 3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \\ 4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 & 4 \cdot 4 + 3 \cdot 1 & 4 \cdot 5 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 11 \\ 18 & 19 & 29 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 35 & 30 & -5 \\ -21 & 19 & 3 \\ 31 & 16 & 22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ -5 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 185 & 0 & 0 \\ 0 & 185 & 0 \\ 0 & 0 & 185 \end{pmatrix} = 185 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Приклад з будівництва

Щоб краще зрозуміти операцію множення матриць між собою звернемось до прикладу з виробництва.

ЗАДАЧА Комбінат ЖБК має три цехи в кожному з яких виготовляють різні види виробів.

Об'єм виробництва за квартал задається таблицею 1.

За цей час витрати на виробництво 1 тисячі штук виробів по сировині, електроенергії і води задаються таблицею 2

Знайти матрицю витрат на виробництво по цехах для сировини, електроенергії і води за I квартал

Цех	Вироби-S	Вироби-V
I	1,5	2
II	1,3	2,4
III	2	3

таблиця 1

Вироби	Сировина тис.грн	Електро- енергія. тис. грн	Вода тис. грн
s	20	3	0,5
v	30	2	0,3

таблиця 2

Перейдемо до матриць, позначивши матрицю таблиці 1 через A, таблиці 2 – через B

$$A = \begin{pmatrix} 1,5 & 2 \\ 1,3 & 2,4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 20 & 3 & 0,5 \\ 30 & 2 & 0,3 \end{pmatrix}$$

Очевидно, щоб визначити витрати I цеху на сировину ми повинні відповідно поелементно перший рядок матриці A помножити на перший стовпчик матриці B і знайти суму.

Далі перейдемо до II цеху, візьмемо другий рядок матриці A і по черзі помножимо його на перший, другий і третій стовпчики матриці B. Аналогічно знайдемо витрати для III цеху



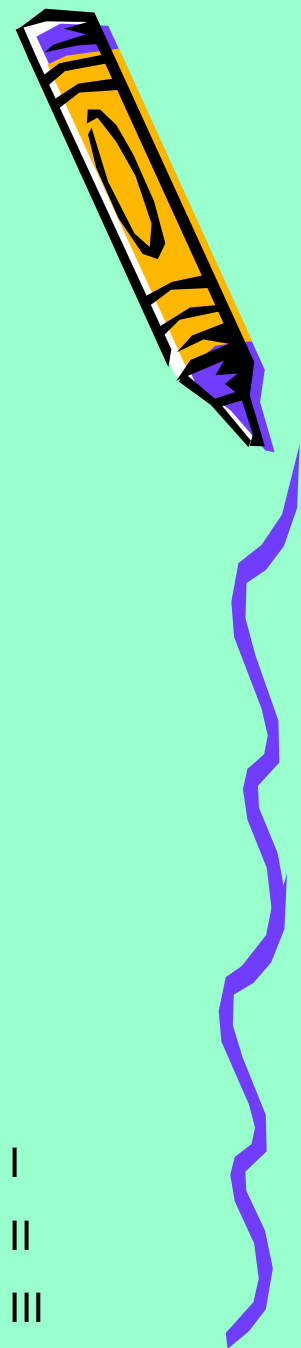
$$C = AB = \begin{pmatrix} 1,5 & 2 \\ 1,3 & 2,4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 20 & 3 & 0,5 \\ 30 & 2 & 0,3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1,5 \cdot 20 + 2 \cdot 30 & 1,5 \cdot 3 + 2 \cdot 2 & 1,5 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,3 \\ 1,3 \cdot 20 + 2,4 \cdot 30 & 1,3 \cdot 3 + 2,4 \cdot 2 & 1,3 \cdot 0,5 + 2,4 \cdot 0,3 \\ 2 \cdot 20 + 3 \cdot 30 & 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 & 2 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 30 + 60 & 4,5 + 4 & 0,75 + 0,6 \\ 26 + 72 & 3,9 + 4,8 & 0,65 + 0,72 \\ 40 + 90 & 6 + 6 & 1 + 0,9 \end{pmatrix} =$$

сировина ел.енергія вода

$$= \begin{pmatrix} 90 & 8,5 & 1,35 \\ 98 & 8,7 & 1,37 \\ 130 & 12 & 1,9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix}$$



ВИЗНАЧНИКИ



З кожною квадратною матрицею пов'язана певна числова характеристика - *визначник*, який відповідає цій матриці.

Визначник квадратної матриці A позначається одним із символів:

$$\det A, \Delta, \Delta(A), \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Порядок визначника визначається за порядком квадратної матриці для якої обчислюється визначник.

Визначником другого порядку, який відповідає матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

називають число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$



ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧНИКІВ



- Визначник транспонованої матриці дорівнює визначнику початкової матриці;
- Якщо один з рядків (стовпчиків) складається тільки з нулів, то визначник дорівнює нулю;
- При перестановці місцями двох рядків (стовпчиків) визначника дістаємо визначник протилежного знаку;
- Визначник, який має два однакові рядки (стовпчика), дорівнює нулю;
- Якщо всі елементи деякого рядка(стовпчика) визначника помножити на число K , то сам визначник помножується на K ;
- Якщо один з рядків (стовпчиків) визначника пропорційний другому рядку, то визначник дорівнює нулю.
- Визначник не змінюється, якщо до елементів одного з рядків (стовпчиків) додаються елементи другого рядка(стовпчика) помножені на одне й те саме число.



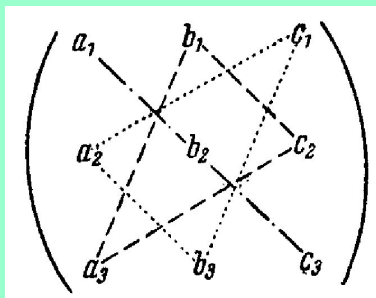
ПРАВИЛО ТРИКУТНИКІВ



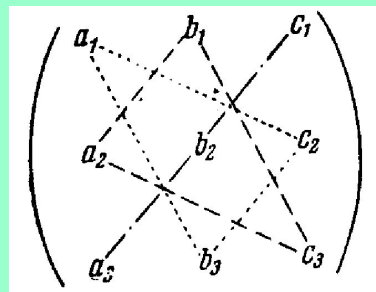
Правило *трикутників* застосовують
для обчислення визначників 3-го порядку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{31}a_{23}a_{11})$$

$\Delta =$



-



МІНОРИ

Міномом елемента матриці n -го порядку називається визначник порядку $(n-1)$, який одержується із матриці A викреслюванням i -го рядка і j -го стовпчика.

Міном позначається M_{ij}

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 7 & 5 & -4 \\ 0 & 5 & 11 \end{pmatrix};$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 11 \end{vmatrix} = 6 \cdot 11 - 5 \cdot 3 = 51$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -4 \cdot 6 - 5 \cdot 3 = -39$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 35$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 10$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = -29$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -32$$



АЛГЕБРАЇЧНІ ДОПОВНЕННЯ



Алгебраїчним доповненням елемента матриці A на називається мінор цього елемента взятий зі знаком "+", якщо $(i+j)$ - парне число або зі знаком "-", якщо $(i+j)$ - непарне

Алгебраїчне доповнення позначається $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 7 & 5 & -4 \\ 0 & 5 & 11 \end{pmatrix};$$

$$M_{21}=51; \quad M_{31}=-39; \quad M_{13}=35;$$

$$M_{23}=10; \quad M_{32}=-29; \quad M_{33}=-32$$

$$A_{21}=-51; \quad A_{31}=-39; \quad A_{13}=35$$

$$A_{23} = -10$$

$$A_{33} = -32$$

$$A_{32} = 29$$



ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ

Матриця A^{-1} називається оберненою до матриці A , якщо
 $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \quad \text{де } A_{ij} \text{ алгебраїчні доповнення} \\ \text{відповідних елементів матриці } A.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ -5 & 2 & 7 \end{pmatrix}; \det A = 185$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 35 \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 30 \quad A_{31} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 35$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} = -21 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} = 19 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 31 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 16 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 22$$

$$A^{-1} = \frac{1}{185} \begin{pmatrix} 35 & 30 & -5 \\ -21 & 19 & 3 \\ 31 & 16 & 22 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{185} \begin{pmatrix} 35 & 30 & -5 \\ -21 & 19 & 3 \\ 31 & 16 & 22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ -5 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A stylized yellow pencil with a purple eraser and a purple sharpened lead tip, angled diagonally. The pencil has black outlines and a purple band near the eraser.

називають
системою лінійних
алгебраїчних рівнянь
загального виду

МЕТОД КРАМЕРА



Правило Крамера

Якщо визначник СПАР при $m=n$ відмінний від нуля, то система рівнянь має один єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами,

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} ; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$



Розв'язати СЛАР



$$a) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2; \end{cases} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -5 \\ 0 & 5 & -2 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -15 \neq 0 \Rightarrow$$

система має єдине рішення

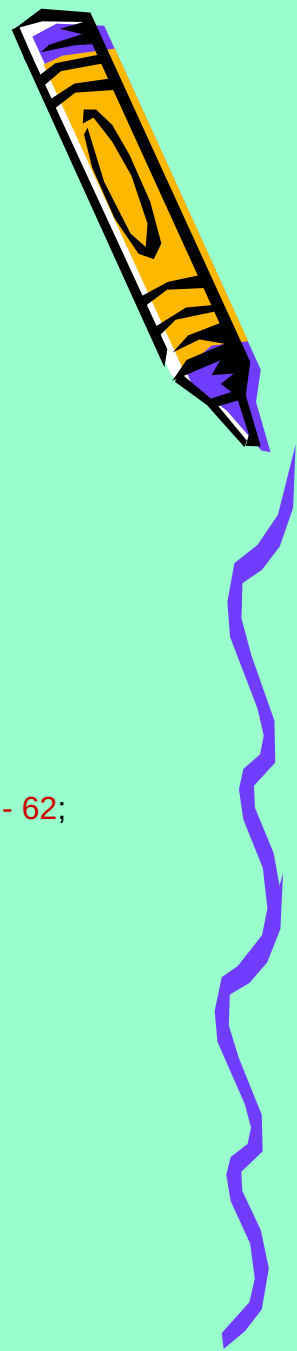
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} = -15 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -5 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 15$$



$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-15}{-15} = 1 \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{-15} = 0 \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -1$$

Відповідь (1;0;-1)

Розв'язати систему



$$a) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -7; \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -31$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -31;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -7 & -3 \end{vmatrix} = 31;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -7 \end{vmatrix} = -62;$$

$$x_1 = \frac{-31}{-31} = 1;$$

$$x_2 = \frac{31}{-31} = -1;$$

$$x_3 = \frac{-62}{-31} = 2;$$



БАЖАЮ



УСПІХІВ!!!

