Элементы комбинаторики

Комбинаторика – это раздел математики, посвящённый задачам выбора и расположения предметов из раздела множеств.

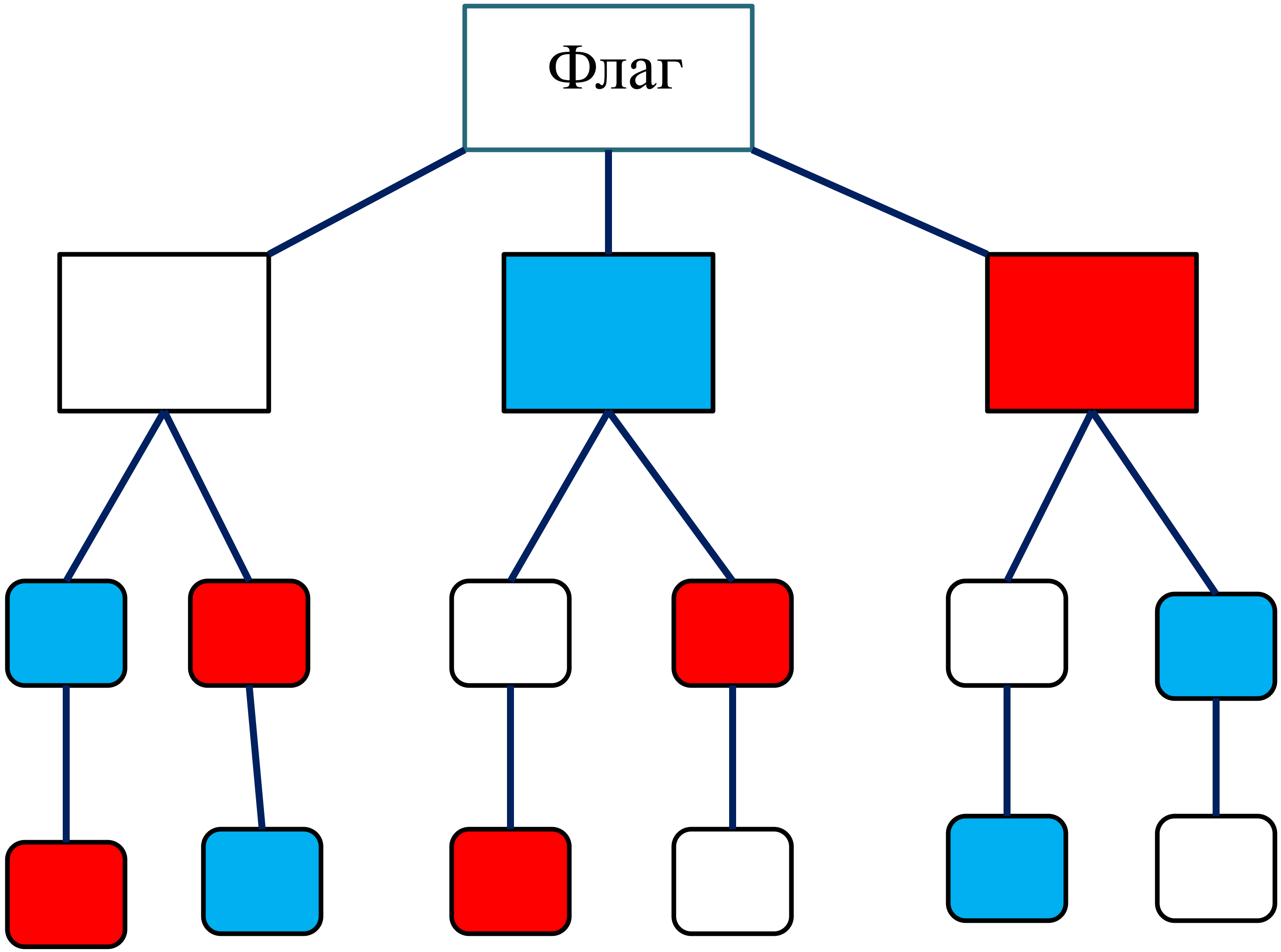
Типичной задачей *комбинаторики* является задача *перечисления комбинаций*, составленных из нескольких предметов.

Примеры комбинаторных задач

<u>Пример</u>

Несколько стран в качестве символа своего государства решили использовать флаг в виде 3-х горизонтальных полос одинаковых по ширине и цвету: синий, красный и белый.

Сколько стран могут испытать такую символику при условии, что у каждой страны свой отличный от других флаг?

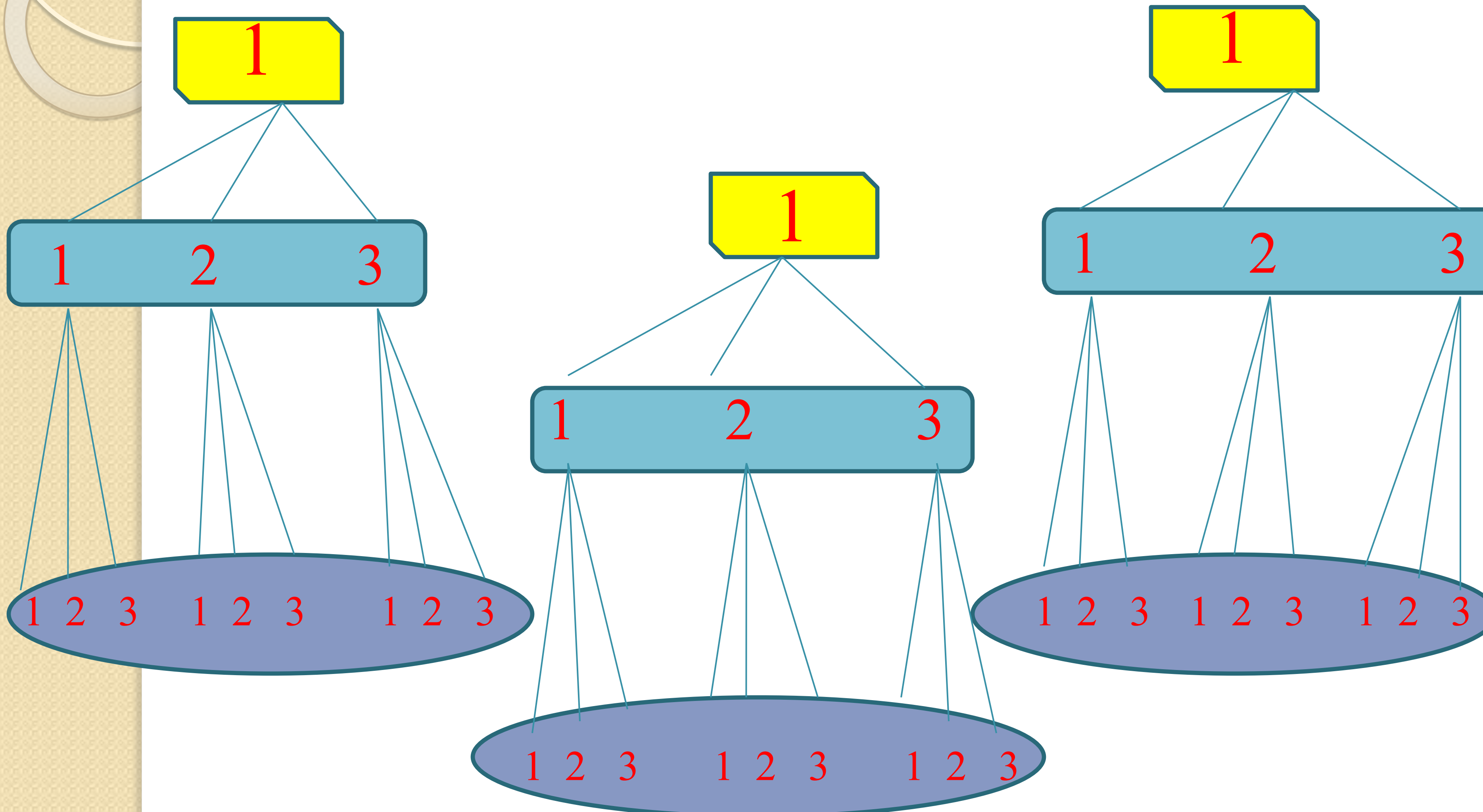


Ответ . 6 комбинаций

Пример

Сколько трехзначных чисел можно составить из 3 цифр: 1, 2, 3?

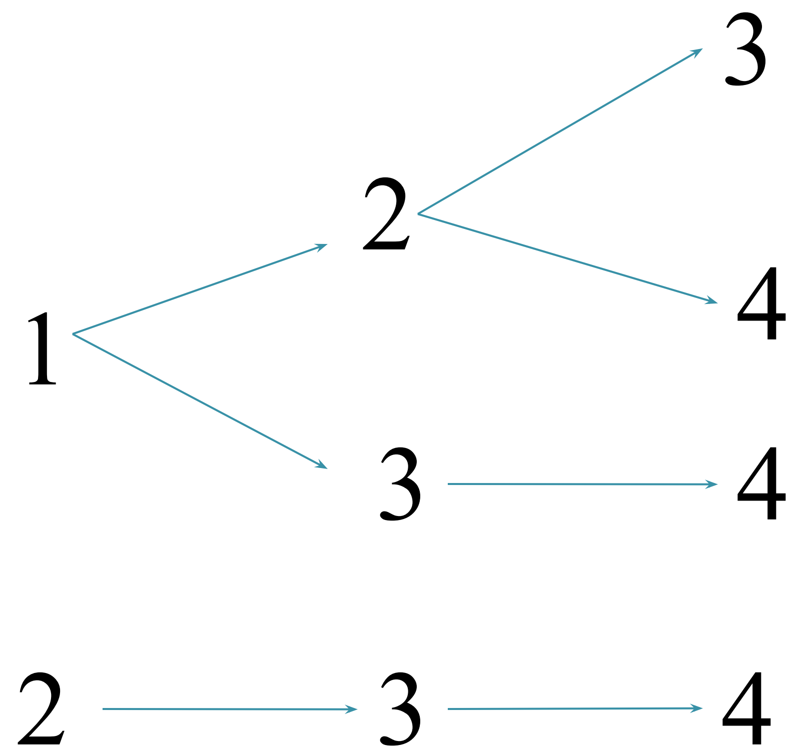
Перечислим с помощью схемы все возможные числа



Пример

Сколько трехэлементных подмножеств, различающихся хотя бы одним элементом друг от друга и без учета порядка в подмножестве, можно составить из 4 цифр: 1, 2, 3, 4?

Перечислим все полученные подмножества:



(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 4), (2, 3, 4).

Таким образом, получается 4 подмножества.

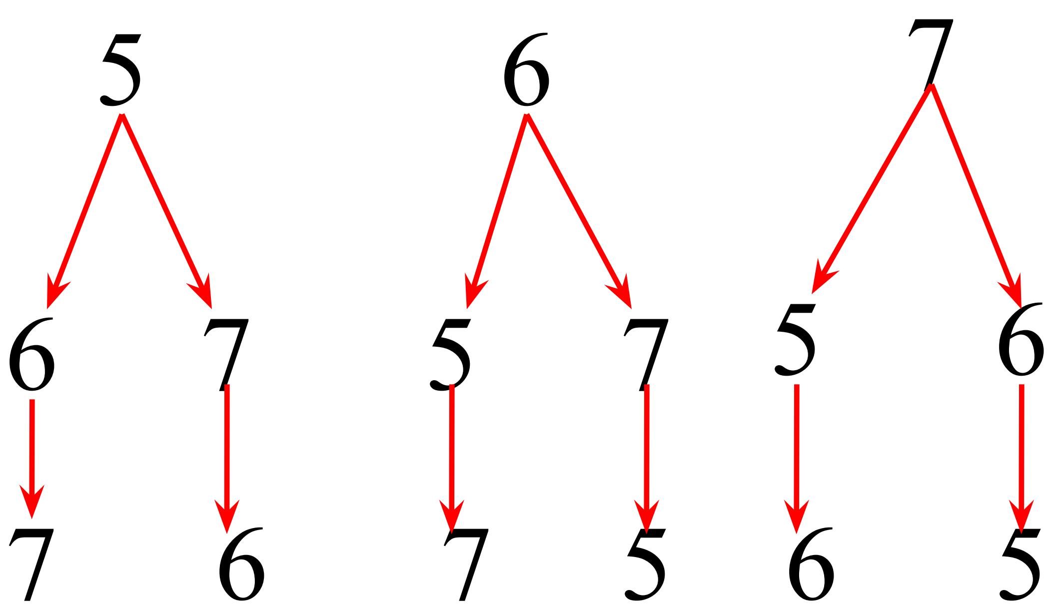
Размещениями

из n элементов по k элементов называется упорядоченный набор из k различных элементов из некоторого множества различных n элементов

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Пример

Сколько трёхзначных чисел, в которых цифры не повторяются, можно составить из 3 цифр 5, 6, 7?



Ответ: 6 трёхзначных чисел

<u>Пример</u>

Из команды в 10 человек нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

$$A_{10}^{2} = \frac{10!}{(10-2)!} = 90$$

Пример

Антон, Борис и Василий купили три билета на 1-е, 2-е и 3-е места первого ряда на футбольный матч. Сколькими способами они могут занять имеющиеся места?

Может быть такая последовательность:

А Б В   А В Б

Может быть и так:

Б В А   Б А В

А может быть и так:

В А Б   В Б А

Заметим, что 3!=6

Ответ: 6 вариантов

Пример

Сколько существует двузначных чисел, в которых цифра десятков и цифра единиц различны и нечетны?

$$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = 4 \cdot 5 = 20$$

Размещениями с повторениями из ***n*** элементов по ***k*** называются *упорядоченные* ***k***-элементные выборки, в которых элементы могут ***повторяться***.

$$\tilde{A}_n^k = n^k$$

Пример

Возьмем буквы ***Б, А, Р***. Какие размещения из этих букв, взятых по две, можно получить? Сколько таких наборов получиться, если буквы могут повторяться?

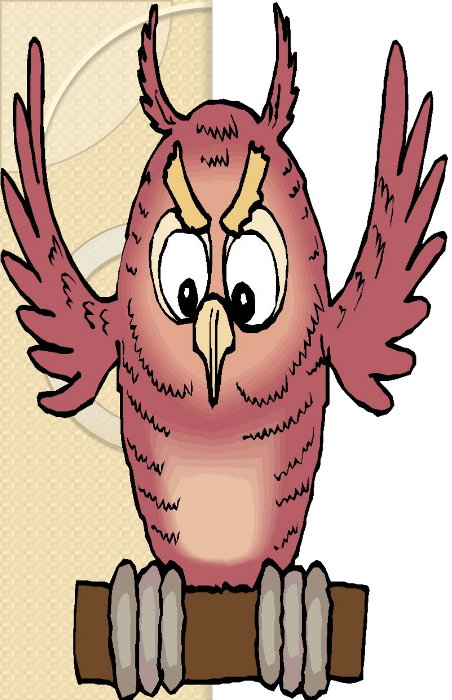
Получаем наборы: ***ББ, БА, БР, АА, АБ, АР, РР, РБ, РА***

$$\tilde{A}_3^2 = 3^2 = 9$$

Запомните

Размещением называется расположение “предметов” на некоторых “местах” при условии, что каждое место занято в точности одним предметом и все предметы различны.

В размещении *учитывается порядок следования предметов*. Так, например, наборы (2,1,3) и (3,2,1) являются различными



Перестановки -

это множество из ***n*** различных элементов, записанных в определённом ***порядке***

$$P(n) = n!$$

Формула перестановок с повторениями

Отображение множества **k** первых натуральных чисел 1, 2,…, k в данное множество $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, называется перестановкой с повторениями, составленным из данных **n** элементов по **k**

$$P_n(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_n!}$$

где $k_1 + k_2 + \dots + k_n = n$

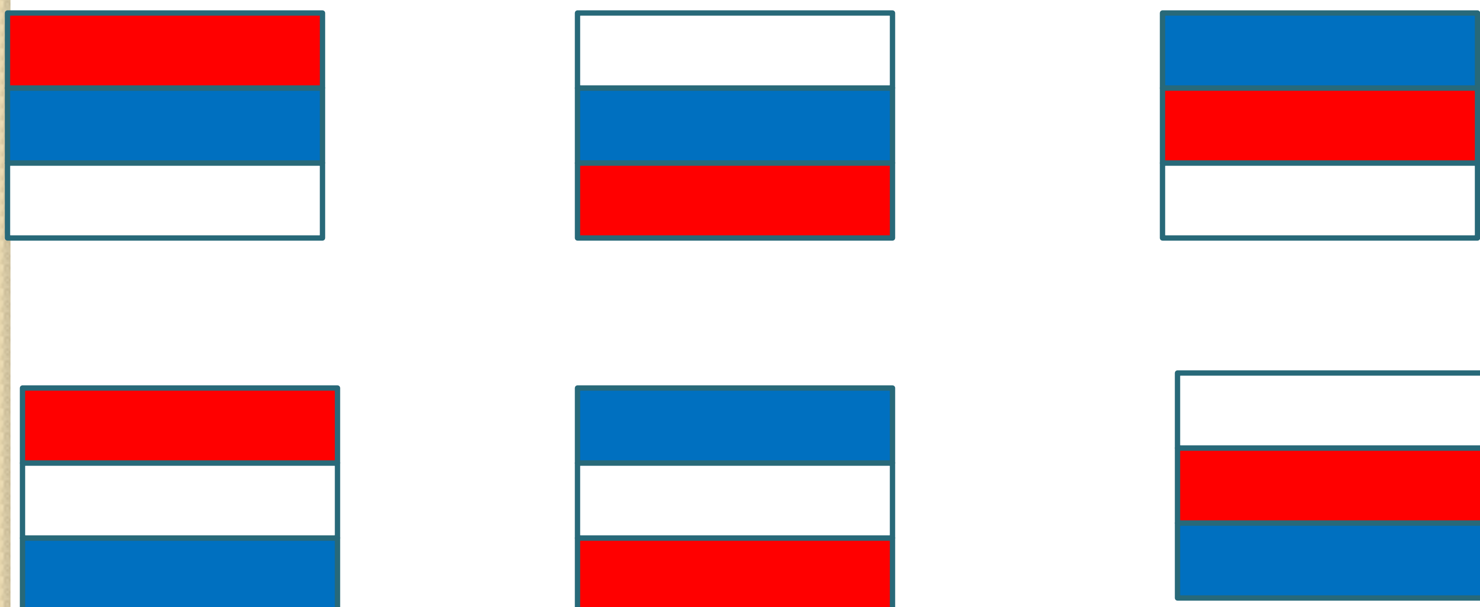
<u>Пример</u>

Сколькими способами можно нанизать на нить 4 зеленых, 5 синих и 6 красных бус?

$$P(4,5,6)=\frac{(4+5+6)!}{4!\cdot 5!\cdot 6!}=\frac{15!}{4!\cdot 5!\cdot 6!}=630630$$

Пример

Найдите количество всех способов, которыми можно составить трехцветный флаг из горизонтальных полос красного, белого и синего цветов.



$3! = 6$

Сочетаниями

из ***n*** элементов по ***k*** в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Пример

На 5 сотрудников выделено 3 путевки в санаторий. Сколькими способами можно распределить эти путевки, если все путевки одинаковые?

$$C_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!\cdot 3!} = 10$$

Сочетанием с повторениями
из *n* элементов по *k* называется **неупорядоченный** набор, содержащий *k* элементов, каждый из которых может быть одного из *n* типов

$$\tilde{C}_n^k = C_{k+n-1}^k$$

Пример

Сколько будет костей в игре домино, если использовать, только четыре цифры 1, 2, 3, 4?

$$\widetilde{C}_4^2 = \frac{(4+2-1)!}{(4-1)!\cdot 2!} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 2} = 10$$

Запомните

Если при выборе **не важен** порядок расстановки между ними, то такие комбинации называются **сочетаниями**

Простейшие комбинации

Перестановки	Размещения	Сочетания
n элементов n клеток	n элементов k клеток	n элементов k клеток
Порядок имеет значение	Порядок имеет значение	Порядок не имеет значения
$P_n = n!$ $P_n = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_n!}$	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ $\tilde{A}_n^k = n^k$	$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$ $\tilde{C}_n^k = C_{k+n-1}^k$

Спасибо за внимание!