

Правильные многогранники

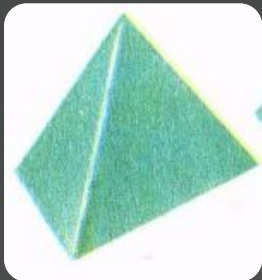
Подготовили:
Калинин Александр
Булатов Семён

Определение

Многогранник – это часть пространства, ограниченная совокупностью конечного числа плоских многоугольников, соединённых таким образом, что каждая сторона любого многогранника является стороной ровно одного многоугольника. Многоугольники называются гранями, их стороны – рёбрами, а вершины – вершинами.

Правильным называется многогранник, у которого все грани являются правильными многоугольниками, и все многогранные углы при вершинах равны.

Существует 5 типов правильных многогранников



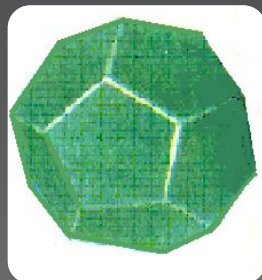
Правильный
тетраэдр



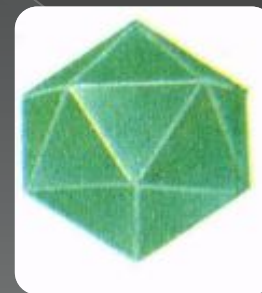
Правильный
гексаэдр



Правильный
октаэдр



Правильный
додекаэдр



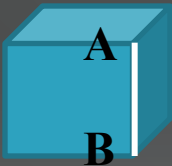
Правильный
икосаэдр

Многоугольники, из которых составлен многогранник, называются гранями.



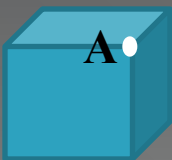
Гранью куба является квадрат

Стороны граней называются рёбрами.



AB является ребром куба

А концы рёбер называют вершинами многоугольника.



A является вершиной куба

В каждой вершине многогранника должно сходиться столько правильных n – угольников, чтобы сумма их углов была меньше 360^0 . Т.е. должна выполняться формула $\beta k < 360^0$ (β – градусная мера угла многоугольника, являющегося гранью многогранника, k – число многоугольников, сходящихся в одной вершине многогранника.)

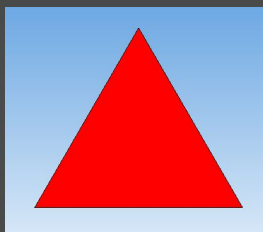
| название | β | k | Сумма плоских углов |
|-----------|---------|-----|----------------------------|
| тетраэдр | 60 | 3 | 180 |
| октаэдр | 60 | 4 | 240 |
| икосаэдр | 60 | 5 | 300 |
| гексаэдр | 90 | 3 | 270 |
| додекаэдр | 108 | 3 | 324 |

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

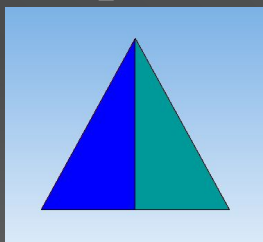
Тетраэдр

$$S_{\text{полн}} = a^2\sqrt{3}$$

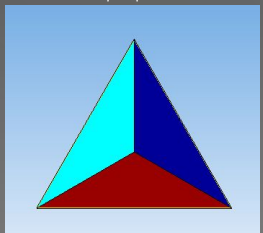
Правильный многогранник, у которого грани правильные треугольники и в каждой вершине сходится по три ребра и по три грани. У тетраэдра: 4 грани, четыре вершины и 6 ребер.



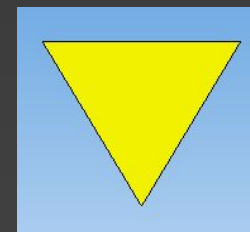
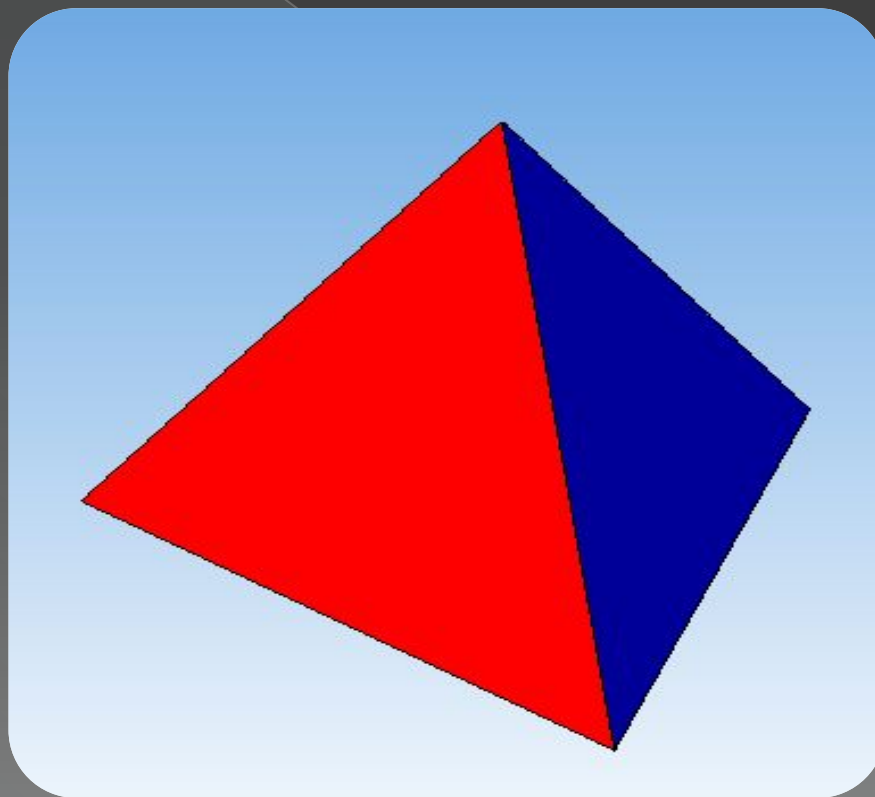
спереди



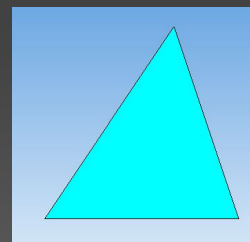
сзади



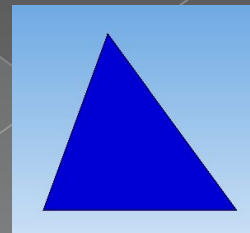
сверху



снизу

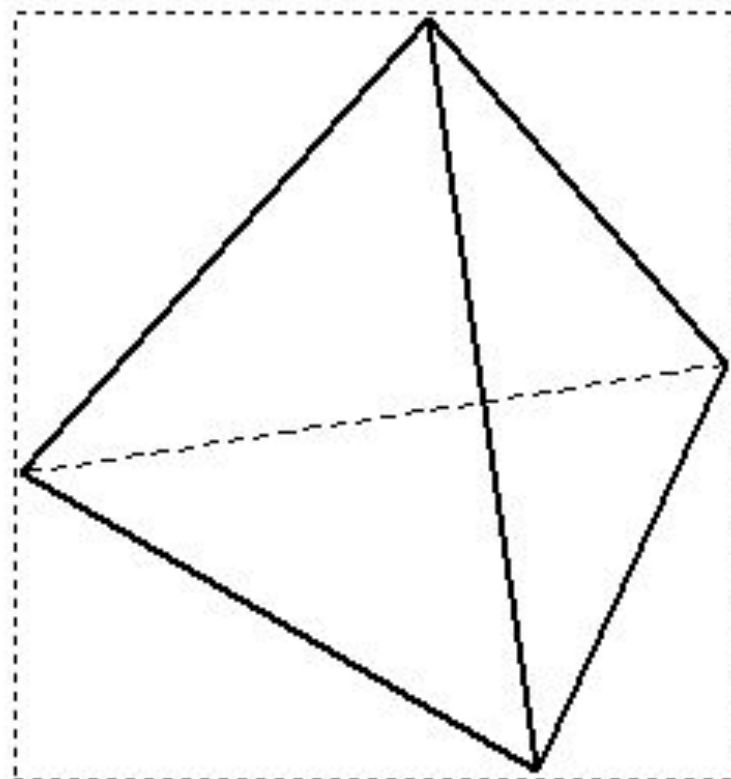
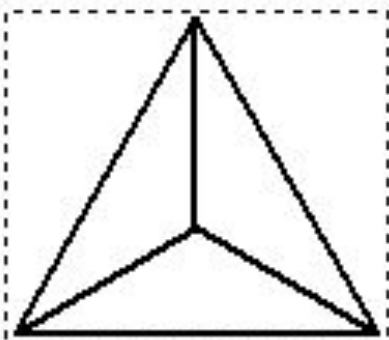
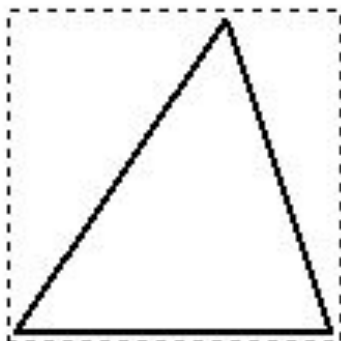
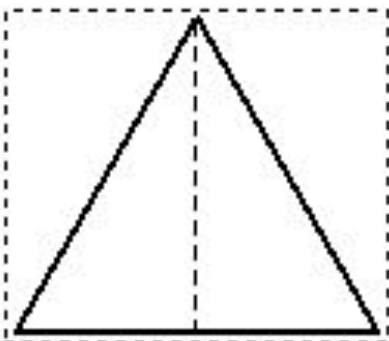


слева



справа

Чертёж и технический рисунок тетраэдра



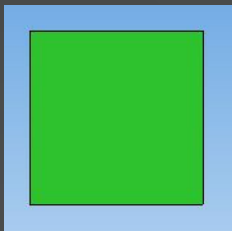
$$V=a^3$$

Куб или гексаэдр

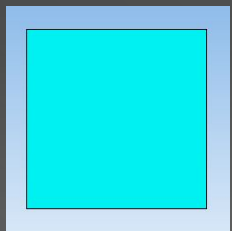
$$S_{\text{полн}}=6a^2$$

$$S_{\text{бок}}=4a^2$$

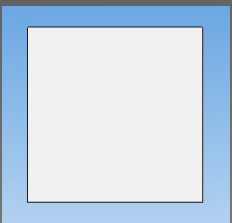
Правильный многогранник, у которого грани – квадраты и в каждой вершине сходится по три ребра и три грани. У него: 6 граней, 8 вершин и 12 ребер.



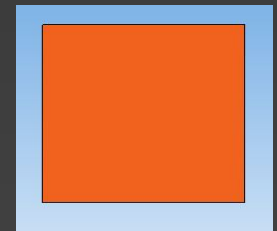
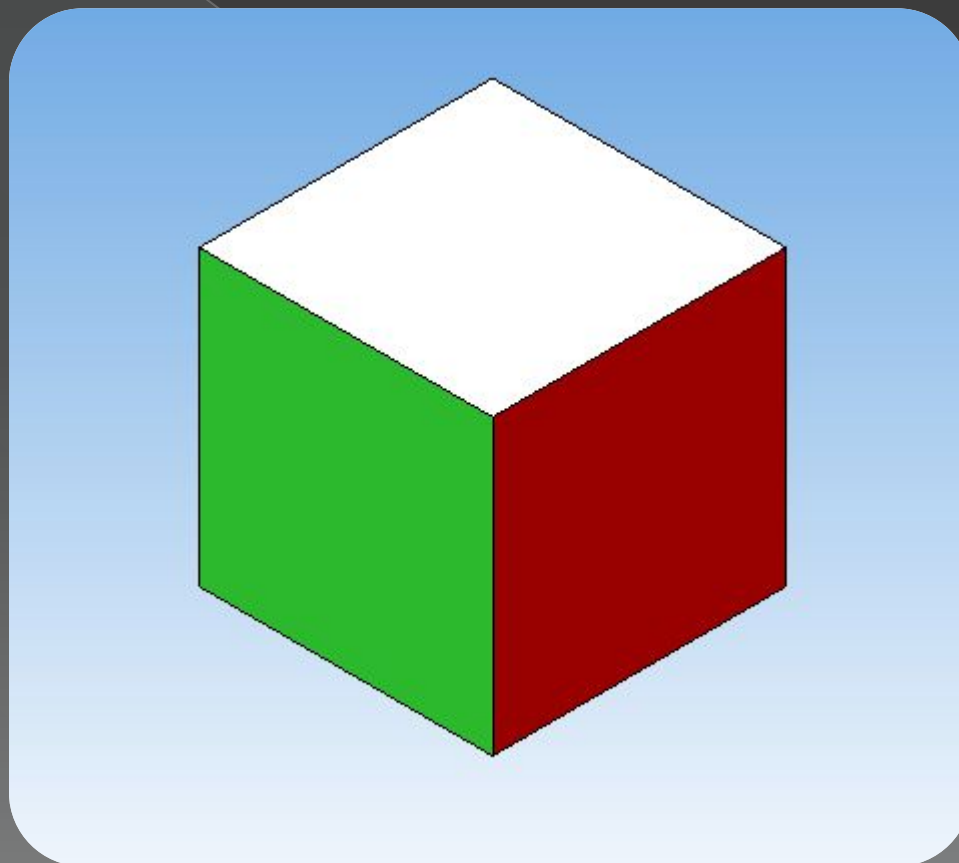
спереди



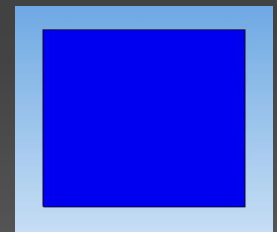
сзади



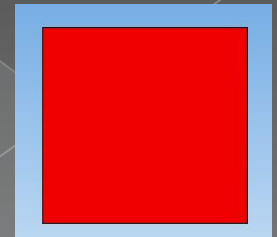
сверху



снизу

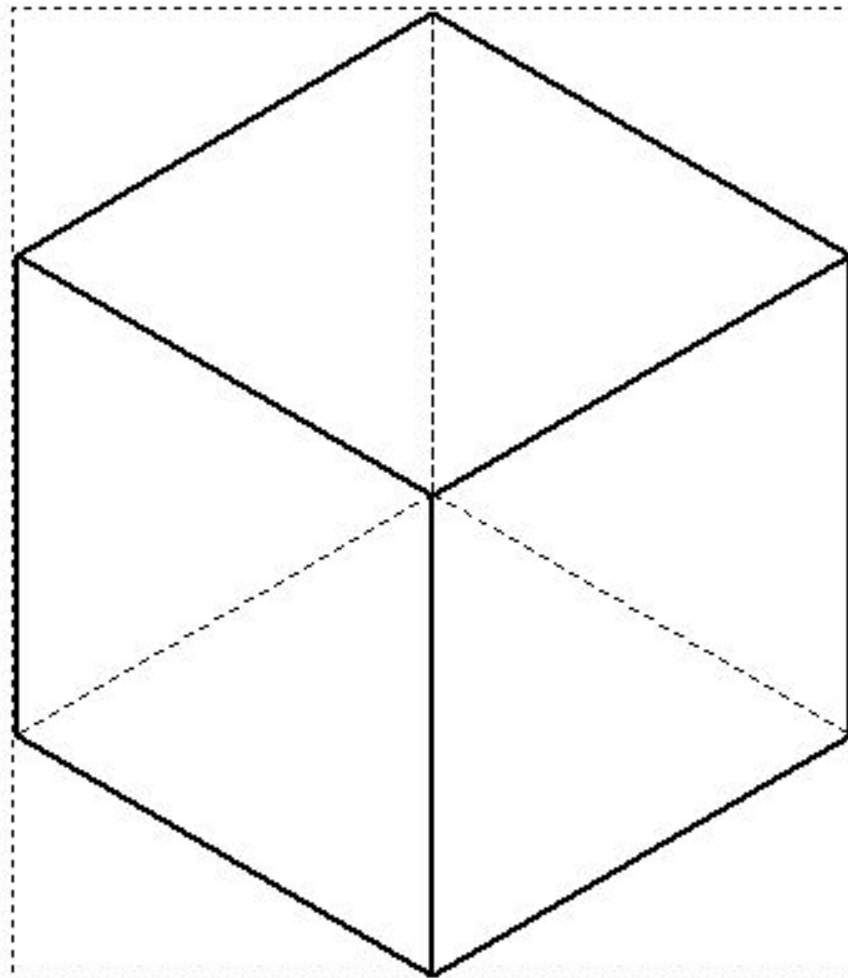
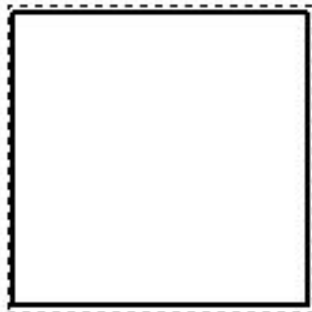
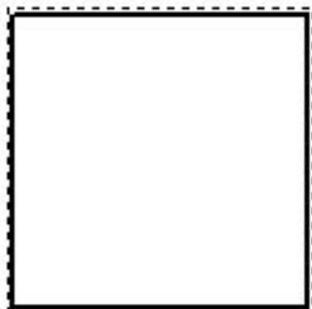
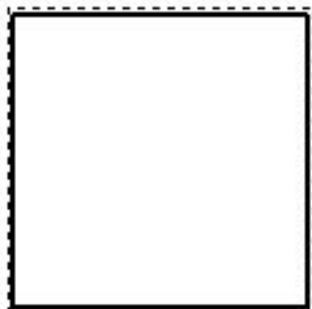


слева



справа

Чертёж и технический рисунок гексаэдра

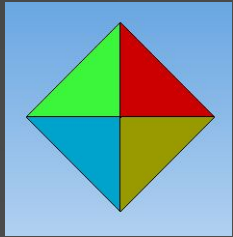


$$V = \frac{1}{3} \sqrt{2} a^3$$

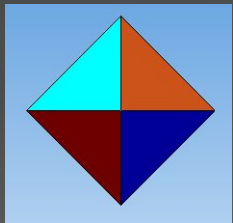
Октаэдр

$$S = 2a^2 \sqrt{3}$$

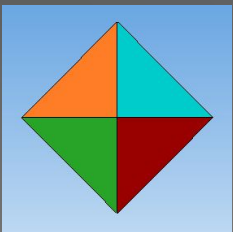
Правильный многогранник, у которого грани - правильные треугольники и в каждой вершине сходится по четыре ребра и по четыре грани. У октаэдра: 8 граней, 6 вершин и 12 ребер.



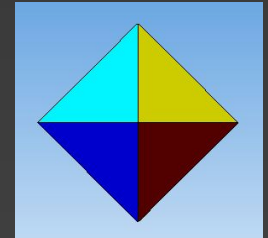
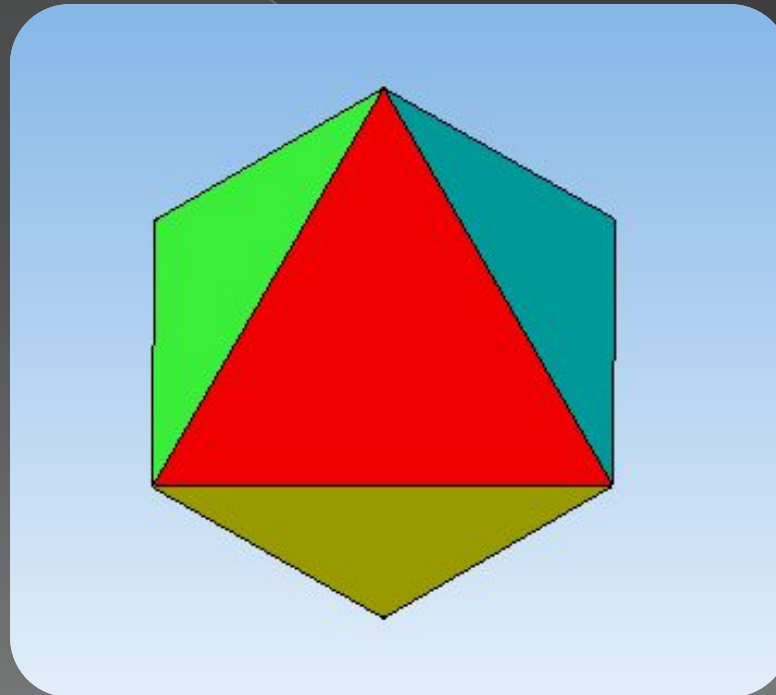
спереди



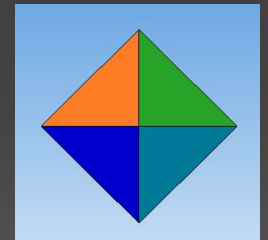
сзади



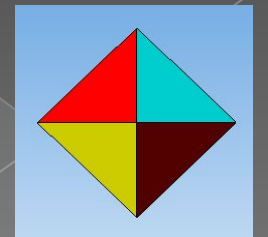
сверху



снизу

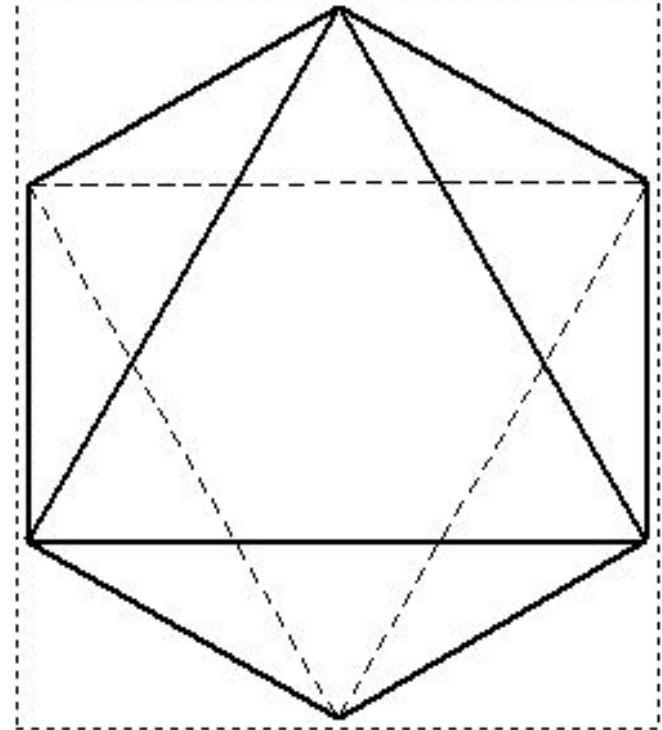
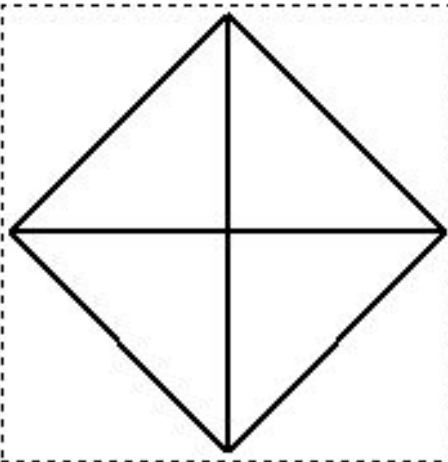
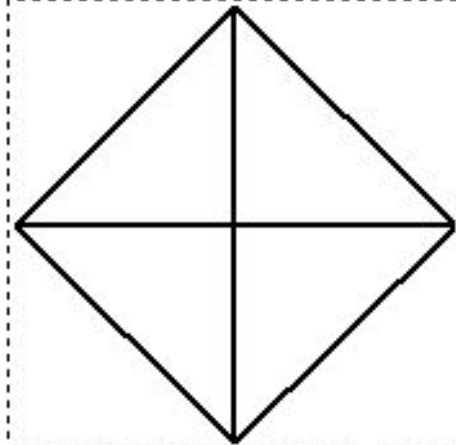
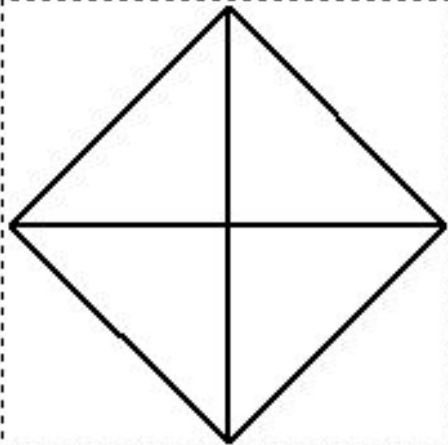


слева



справа

Чертёж и технический рисунок октаэдра

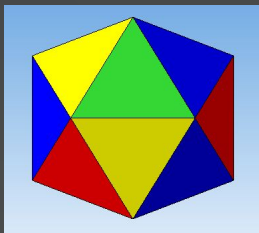


$$V = \frac{5}{12} (3 + \sqrt{5}) a^3$$

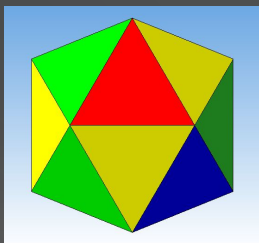
Икосаэдр

$$S = 5a^2\sqrt{3}$$

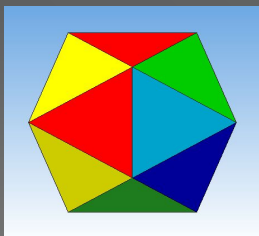
Правильный многогранник, у которого грани - правильные треугольники и в вершине сходится по пять рёбер и граней. У икосаэдра: 20 граней, 12 вершин и 30 ребер.



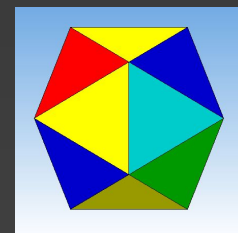
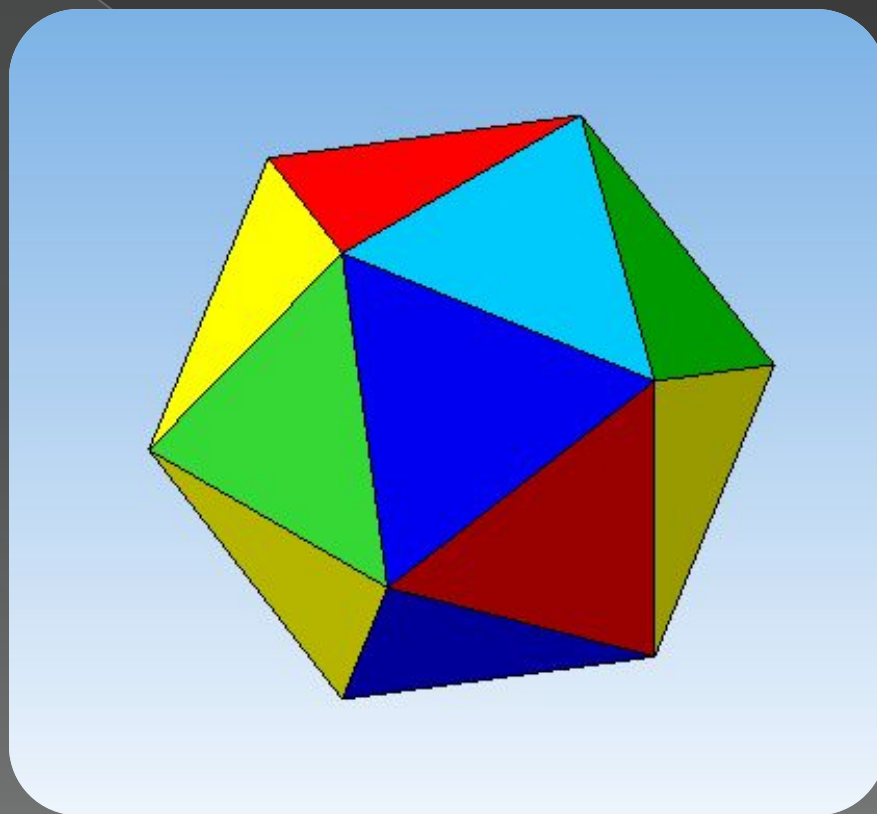
спереди



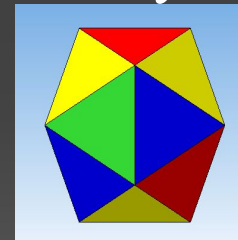
сзади



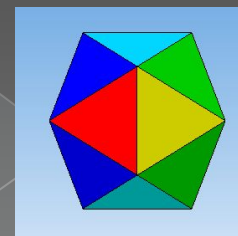
сверху



снизу

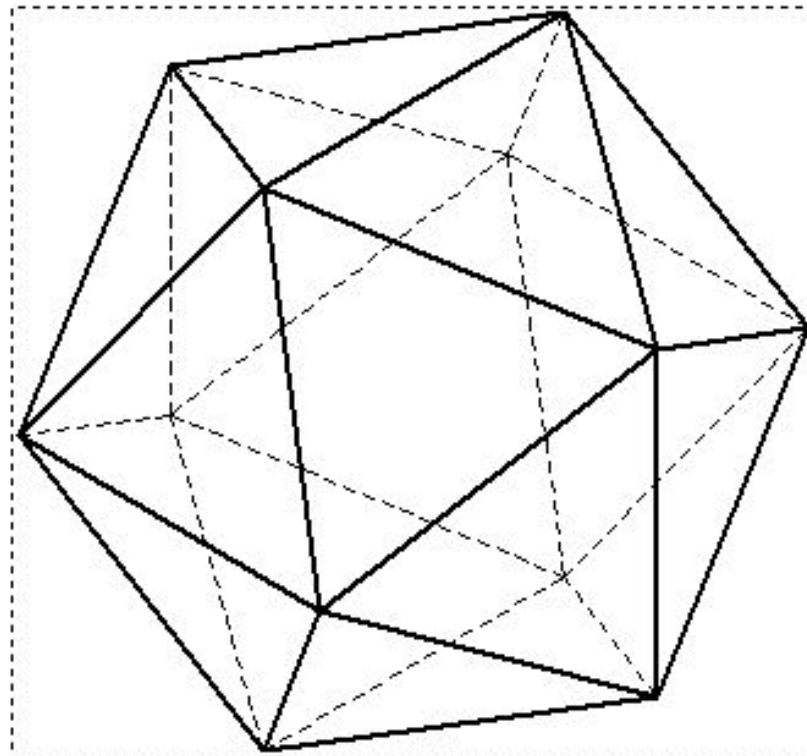
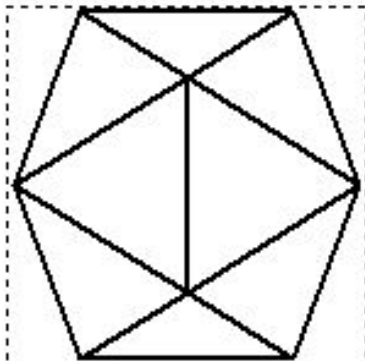
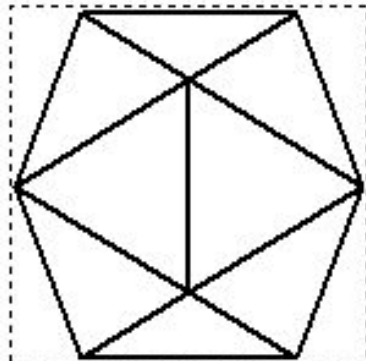
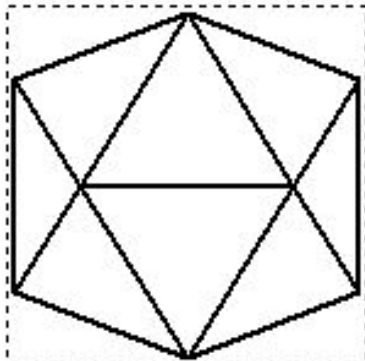


слева



справа

Чертёж и технический рисунок икосаэдра

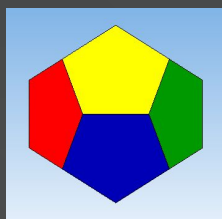


$$V = \frac{a^3}{4} (15 + 7\sqrt{5}) \approx 7.66a^3$$

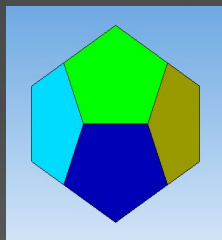
Додекаэдр

$$S = 3a^2 \sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})} \approx 20.65a^2$$

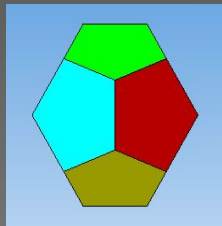
Правильный многогранник, у которого грани правильные пятиугольники и в каждой вершине сходится по три ребра и три грани. У додекаэдра: 12 граней, 20 вершин и 30 ребер.



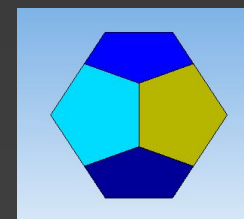
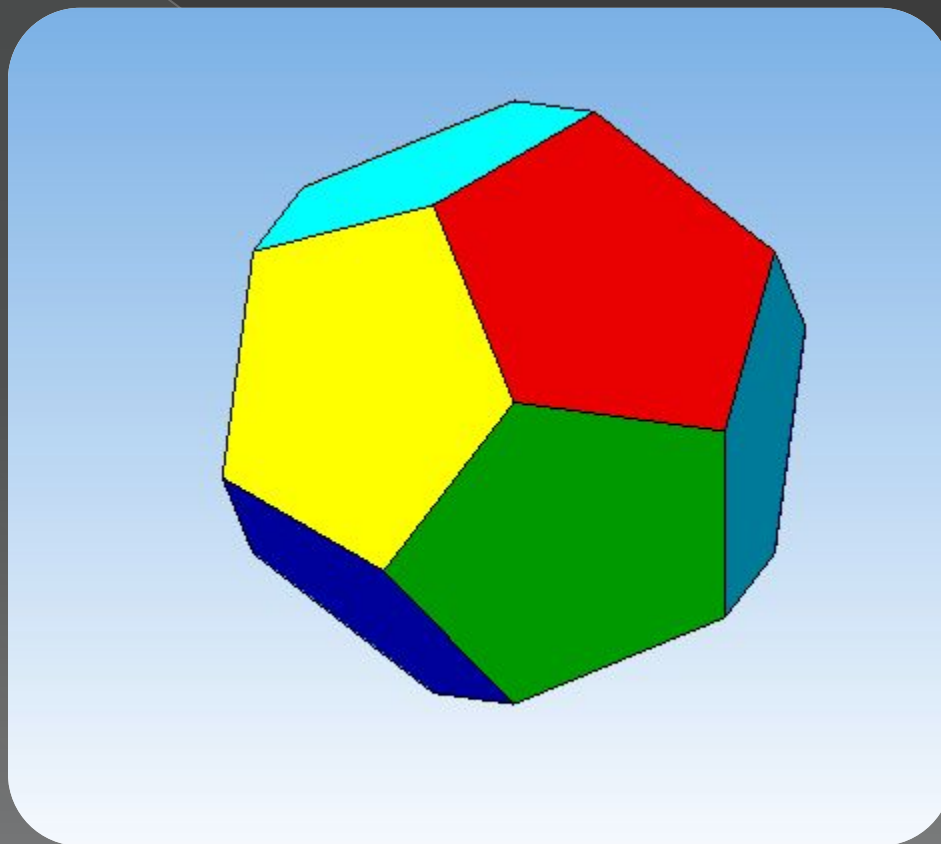
спереди



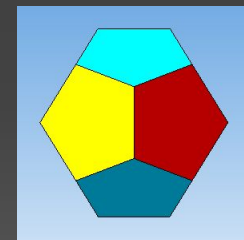
сзади



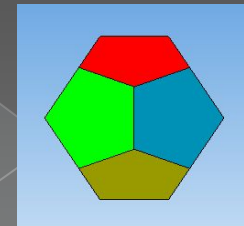
сверху



снизу

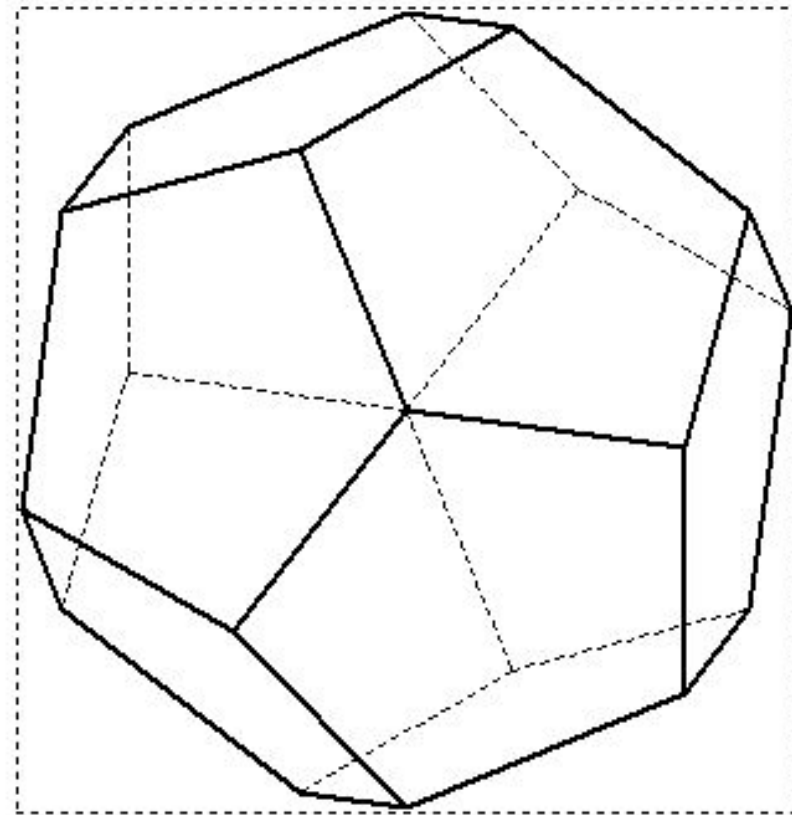
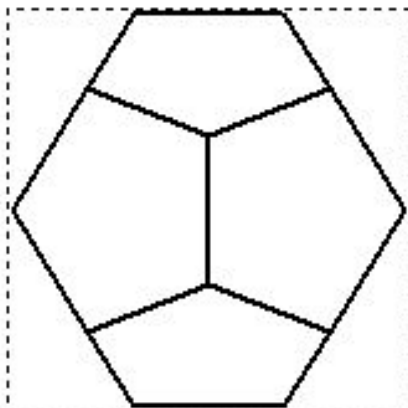
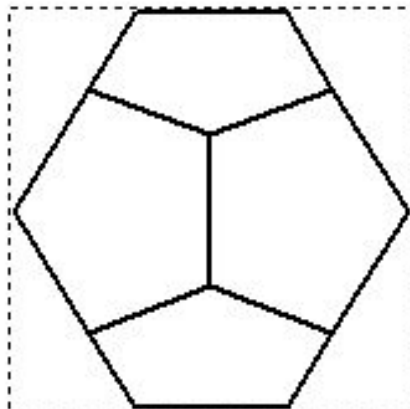
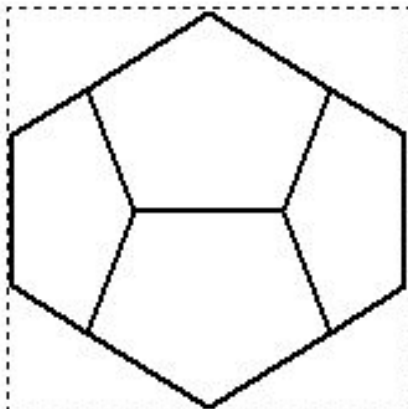


слева



справа

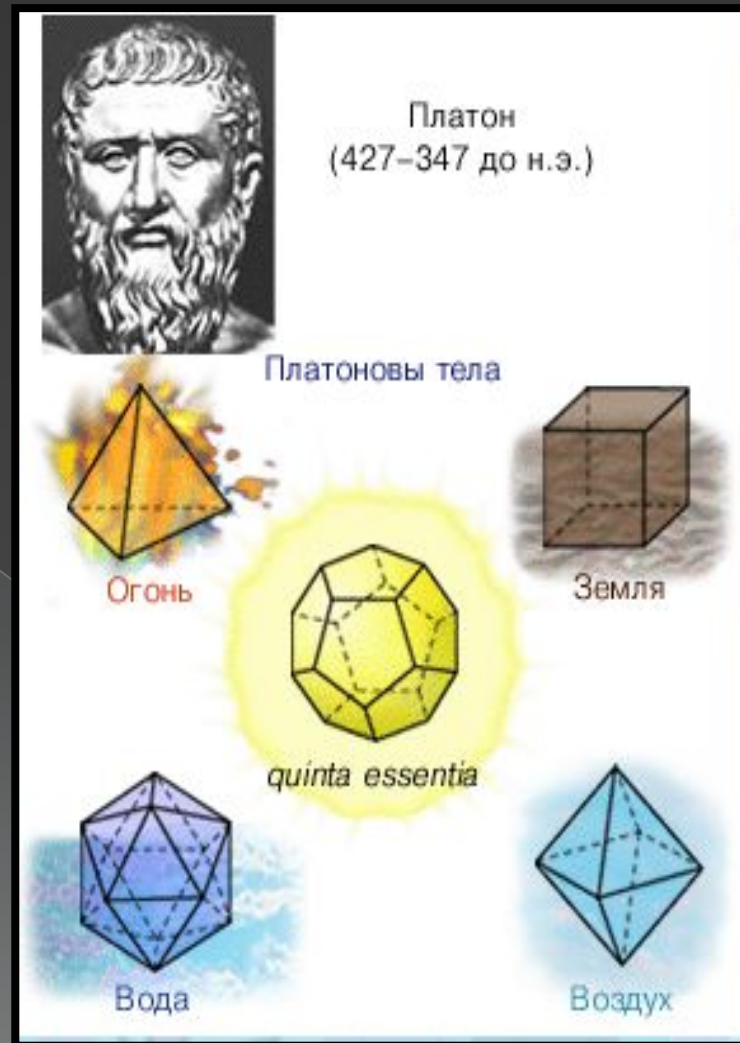
Чертёж и технический рисунок додекаэдра



Историческая справка

О существовании всего лишь пяти правильных многогранников знали еще в Древней Греции. Великий древнегреческий мыслитель Платон считал, что четыре из них олицетворяют четыре «стихии»: тетраэдр – огонь, куб – землю, икосаэдр – воду, октаэдр – воздух. Пятый же многогранник, додекаэдр, символизировал собой все мироздание, представлял собой образ всей Вселенной, почитался главнейшим и его стали называть *quinta essentia* (квинта эссенция) или «пятая сущность».

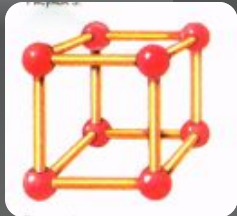
Правильные многогранники называют иногда Платоновыми телами, им посвящена последняя книга «Начал» Евклида. Её считают венцом стереометрии у древних греков.



Применение в кристаллографии

Тела Платона нашли широкое применение в кристаллографии, так как многие кристаллы имеют форму правильных многогранников.

Например, куб - монокристалл поваренной соли (NaCl), октаэдр - монокристалл алюмокалиевых квасцов, одна из форм кристаллов алмаза — октаэдр.



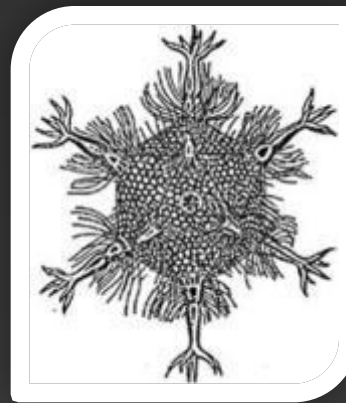
Кристаллы бывают самой различной формы: 1 — берилл, 2 — аметист, 3 — рубин, 4 — кристалл металла германия — денорит, 5 — горный хрусталь, 6 — испанский шпат, 7 — поваренная соль, 8 — ограненный алмаз—бриллиант, вправленный в кольцо.

В колбе с перенасыщенным раствором на конце проволоочки, опущенной в раствор, растет кристалл поваренной соли.





Поваренная соль состоит из кристаллов в форме куба



Скелет одноклеточного организма феоцита представляет собой икосаэдр.



Молекулы воды имеют форму тетраэдра.



Кристаллы пирита имеют форму додекаэдра.



Минерал сильвин также имеет кристаллическую решетку в форме куба.



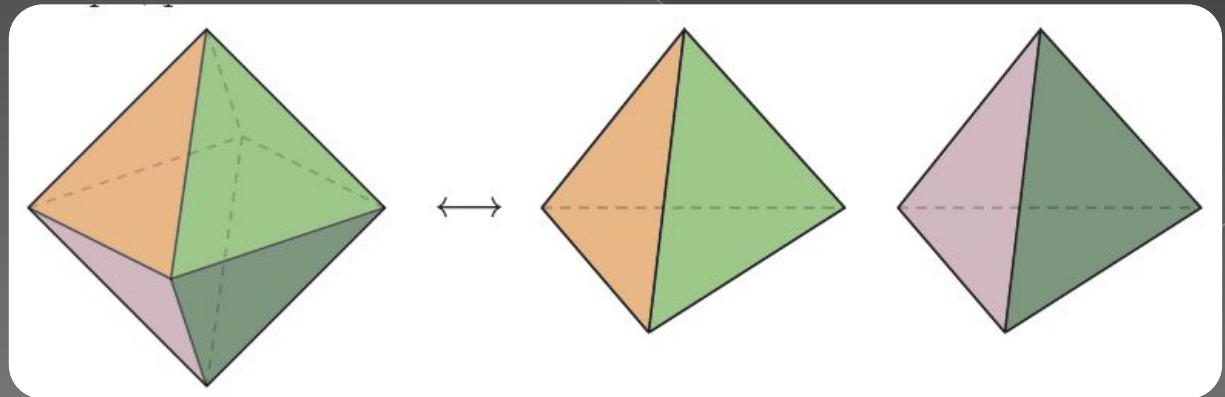
Минерал куприт образует кристаллы в форме октаэдров.

Задача №1

В набор "Юный геометр" входит несколько плоских граней, из которых можно собрать выпуклый многогранник. Юный геометр Семён разделил эти грани на две кучки. Могло ли случиться, что из граней каждой кучки тоже можно собрать выпуклый многогранник? (И в начале, и в конце каждая из граней набора должна являться гранью многогранника.)

Решение

Например, из граней правильного октаэдра можно сложить два правильных тетраэдра.

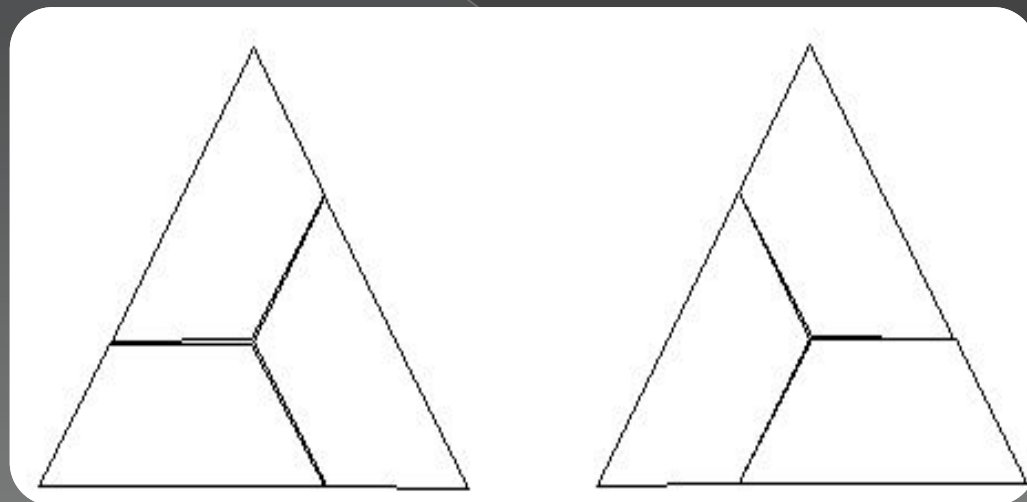


Задача № 2

Можно ли поверхность октаэдра оклеить несколькими правильными шестиугольниками без наложений и пробелов?

Решение

Окрасим 8 граней октаэдра в шахматном порядке. Белые грани разрежем на половинки шестиугольников, как показано на левом рисунке, а черные – как на правом. При любой стыковке соседних граней половинки шестиугольников склеиваются в целые шестиугольники.



Спасибо за просмотр