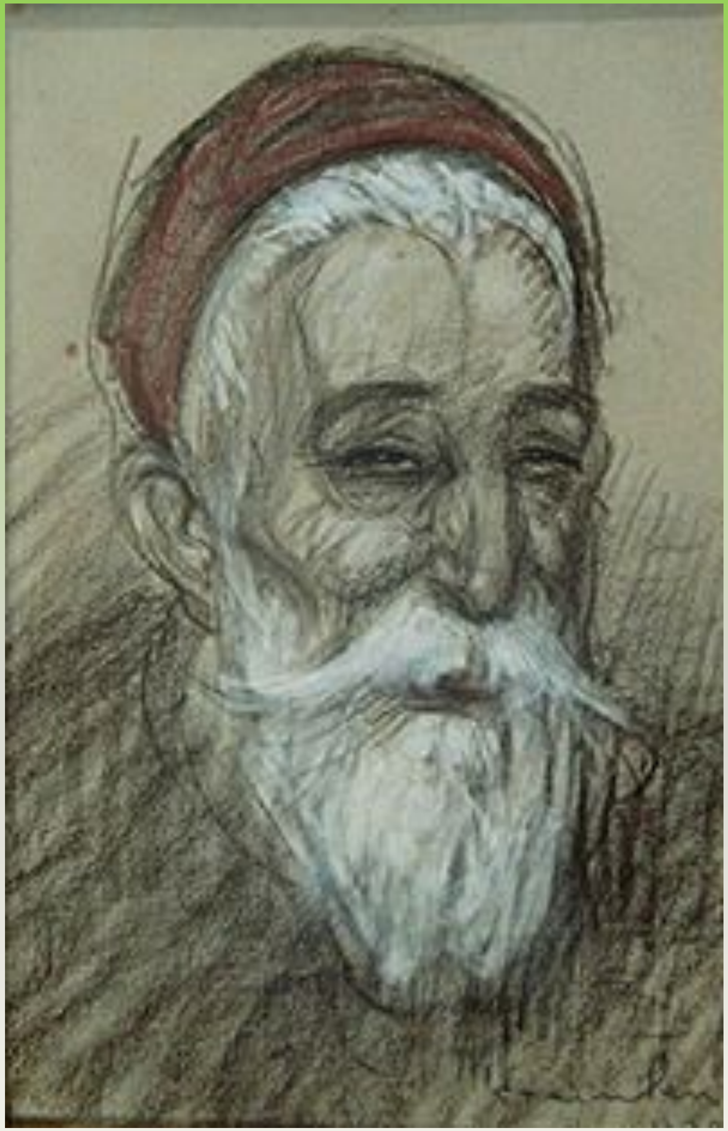
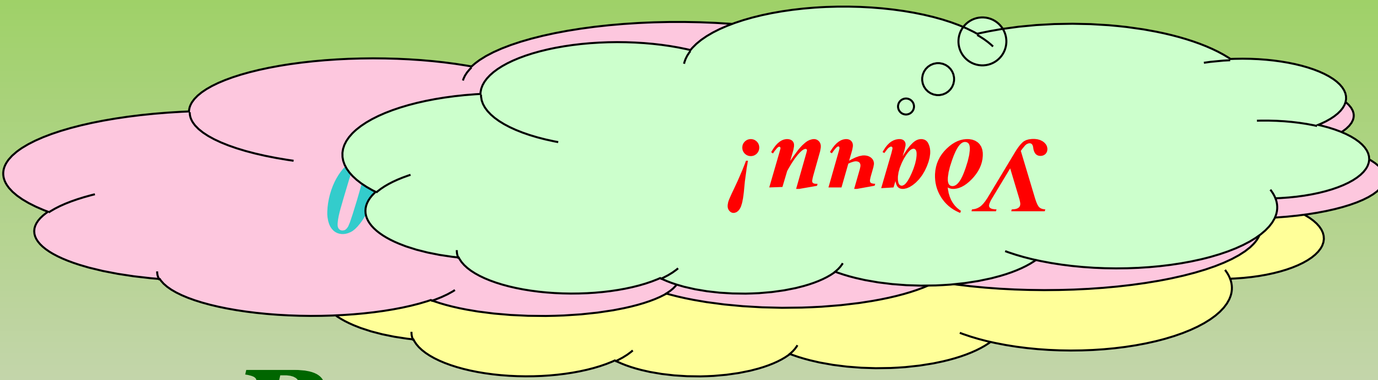


Учиться можно только весело...
Чтобы переваривать знания, надо поглощать их с аппетитом.

Анатоль Франс

1844 - 1924



Решение простейших тригонометрических уравнений.

ГОУ НПО ПУ № 50
с. Кичкасс

Тригономе́трия (от греч. trigonon — треугольник, metro — измерять) — микрораздел математики, в котором изучаются зависимости между величинами углов и длинами сторон треугольников, а также алгебраические тождества тригонометрических функций.

Тригонометрические вычисления применяются практически во всех областях *геометрии, физики и инженерного дела.*

Большое значение имеет техника триангуляции, позволяющая измерять расстояния до недалёких звёзд в астрономии, между ориентирами в географии, контролировать системы навигации спутников. Также следует отметить применение тригонометрии в таких областях, как техника навигации, теория музыки, акустика, оптика, анализ финансовых рынков, электроника, теория вероятностей, статистика, биология, медицина (включая ультразвуковое исследование (УЗИ) и компьютерную томографию), фармацевтика, химия, теория чисел (и, как следствие, криптография), сейсмология, метеорология, океанология, картография, многие разделы физики, топография и геодезия, архитектура, фонетика, экономика, электронная техника, машиностроение, компьютерная графика, кристаллография.

Возникновение тригонометрии связано с землемерением, астрономией и строительным делом . Впервые способы решения треугольников, основанные на зависимостях между сторонами и углами треугольника, были найдены древнегреческими астрономами Гиппархом (2 в. до н .э.) и Клавдием Птолемеем (2 в. н. э.).

Значительный вклад в развитие тригонометрии внесли арабские ученые Аль-Батани (850-929) и Абу-ль-Вефа Мухамед-бен Мухамед (940-998), который составил таблицы синусов и тангенсов через 10’ с точностью до 1/604. Теорему синусов уже знали индийский ученый Бхаскара (р. 1114, год смерти неизвестен) и азербайджанский астроном и математик Насиреддин Туси Мухамед (1201-1274). Кроме того, Насиреддин Туси в своей работе Трактат о полном четырехстороннике изложил плоскую и сферическую тригонометрию как самостоятельную дисциплину. Теорему тангенсов доказал Региомонтан (латинизированное имя немецкого астронома и математика Иоганна Мюллера (1436-1476)). Региомонтан составил также подробные тригонометрические таблицы; благодаря его трудам плоская и сферическая тригонометрия стала самостоятельной дисциплиной и в Европе. Дальнейшее развитие тригонометрия получила в трудах выдающихся астрономов Николая Коперника (1473-1543) – творца гелиоцентрической системы мира, Тихо Браге (1546-1601) и Иогана Кеплера (1571-1630), а также в работах математика Франсуа Виета (1540-1603), который полностью решил задачу об определениях всех элементов плоского или сферического треугольника по трем данным.

Проверочная работа.

Вариант 1.	Вариант 2.
1. Каково будет решение уравнения $\cos x = a$ при $a > 1$	1. Каково будет решение уравнения $\sin x = a$ при $a > 1$
2. При каком значении a уравнение $\cos x = a$ имеет решение?	2. При каком значении a уравнение $\sin x = a$ имеет решение?
3. Какой формулой выражается это решение?	3. Какой формулой выражается это решение?
4. На какой оси откладывается значение a при решении уравнения $\cos x = a$?	4. На какой оси откладывается значение a при решении уравнения $\sin x = a$?

Проверочная работа.

Вариант 1.	Вариант 2.
5. В каком промежутке находится arccos a ?	5. В каком промежутке находится arcsin a ?
6. В каком промежутке находится значение a?	6. В каком промежутке находится значение a?
7. Каким будет решение уравнения $\cos x = 1$?	7. Каким будет решение уравнения $\sin x = 1$?
8. Каким будет решение уравнения $\cos x = -1$?	8. Каким будет решение уравнения $\sin x = -1$?

Проверочная работа.

Вариант 1.	Вариант 2.
9. Каким будет решение уравнения $\cos x = 0$?	9. Каким будет решение уравнения $\sin x = 0$?
10. Чему равняется $\arccos(-a)$?	10. Чему равняется $\arcsin(-a)$?
11. В каком промежутке находится $\operatorname{arctg} a$?	11. В каком промежутке находится $\operatorname{arcctg} a$?
12. Какой формулой выражается решение уравнения $\operatorname{tg} x = a$?	12. Какой формулой выражается решение уравнения $\operatorname{ctg} x = a$?

№	Вариант 1.	Вариант 2.
1.	*Нет решения*	*Нет решения*
2.	$\lvert a \rvert \le 1$	$\lvert a \rvert \le 1$
3.	$x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi k,\ k \in Z$
4.	*На оси Ох*	*На оси Оу*
5.	$[0;\ \pi]$	$[-\pi/2;\ \pi/2]$
6.	$[-1;\ 1]$	$[-1;\ 1]$
7.	$x = 2\pi n,\quad n \in Z$	$x = \pi/2 + 2\pi k,\ k \in Z$
8.	$x = \pi + 2\pi n,\quad n \in Z$	$x = -\pi/2 + 2\pi k,\ k \in Z$
9.	$x = \pi/2 + \pi n,\ n \in Z$	$x = \pi k,\quad k \in Z$
10.	$n - \arccos a$	$-\arcsin a$
11.	$(-\pi/2;\ \pi/2)$	$(0;\ \pi)$
12.	$x = arctg\, a + \pi n,\ n \in Z$	$x = arcctg\, a + \pi k,\ k \in Z$

Установите соответствие:

1	$\sin x = 0$
2	$\cos x = -1$
3	$\sin x = 1$
4	$\cos x = 1$
5	$tg\, x = 1$
6	$\sin x = -1$
7	$\cos x = 0$

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z$$

$$2\pi k, \quad k \in Z$$

$$\pi k, \quad k \in Z$$

$$\frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z$$

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z$$

$$\pi + 2\pi k, \quad k \in Z$$

$$\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z$$

Установите соответствие:

1. $\sin x = 0$
2. $\cos x = -1$
3. $\sin x = 1$
4. $\cos x = 1$
5. $\mathrm{tg}\, x = 1$
6. $\sin x = -1$
7. $\cos x = 0$

$\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z$

$2\pi k, \quad k \in Z$

$\pi k, \quad k \in Z$

$\frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z$

$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z$

$\pi + 2\pi k, \quad k \in Z$

$\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z$

Молодцы!

Найди ошибку.

$$\cancel{\arccos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}} \longrightarrow \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = 45^0 = \frac{\pi}{4}$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

Верно

$$\cancel{arctg\, 60^0 = \sqrt{3}} \longrightarrow arctg\sqrt{3} = 60^0 = \frac{\pi}{3}$$

$$\cancel{arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{3\pi}{6}} \longrightarrow arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

$$arcctg(-1) = \frac{3\pi}{4}$$

Верно

Решение тригонометрических уравнений

ВАРИАНТ №1

1.	$\cos x = \frac{1}{2}$	А.	$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$
2.	$\cos\frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$	Б.	$\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$
3.	$\sin 4x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	В.	$\pm\frac{2\pi}{3} + 8\pi n$
4.	$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	Г.	Корней нет
5.	$\cos 2x = \sqrt{3}$	Д.	$\pm 2\pi + 6\pi n$
6.	$\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	Е.	$\frac{\pi}{3} + \pi n$
7.	$tgx = \frac{\sqrt{3}}{3}$	Ж.	$\frac{\pi}{6} + \pi n$
8.	$tg\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$	З.	$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$
9.	$\cos\frac{x}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	И.	$(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$
10.	$\sin\frac{x}{2} = -\sqrt{2}$	К.	$(-1)^n\frac{\pi}{3} + \pi n$
		Л.	$(-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4}$
		М.	$2\pi n$

ВАРИАНТ №2

1.	$\sin x = \frac{1}{2}$	А.	$\frac{7\pi}{12} + \pi n$
2.	$\sin 2x = \frac{1}{2}$	Б.	$(-1)^n\frac{\pi}{3} + 2\pi n$
3.	$\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$	В.	$(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$
4.	$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	Г.	$-\frac{\pi}{4} + \pi n$
5.	$\cos\frac{x}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	Д.	Корней нет
6.	$\cos\frac{x}{2} = -\sqrt{2}$	Е.	$\frac{\pi}{4} + \pi n$
7.	$tgx = 1$	Ж.	$\pm\frac{3\pi}{8} + \pi n$
8.	$tg\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$	З.	$\pm\frac{3\pi}{4} + 6\pi n$
9.	$\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	И.	$\pi + 2\pi n$
10	$\sin 3x = 2$	К.	$\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$
		Л.	$(-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$
		М.	$\pm\frac{3\pi}{4} + \pi n$

ОТВЕТЫ

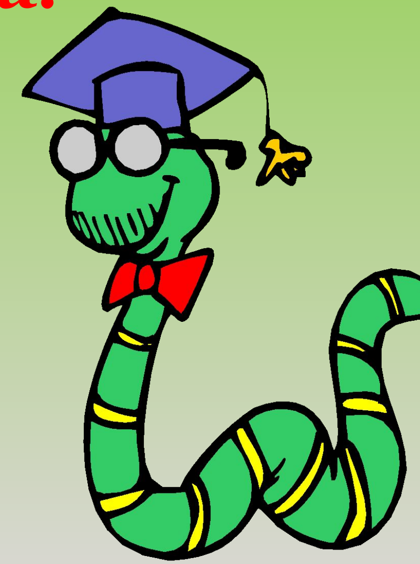
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Вариант №1	Б	Д	Л	К	Г	И	Ж	Е	В	Г
Вариант №2	В	Л	Б	К	З	Д	Е	А	Ж	Д

Оценка «отлично» за 10 верно выполненных заданий;

Оценка «хорошо» за 8-9 верно выполненных заданий;

Оценка « удовлетворительно» за 6-7 верно выполненных заданий.

Два основных метода решения простейших тригонометрических уравнений.



1. Метод введения новой переменной.

2. Метод разложения на множители.

$$2\sin^2 t - 5\sin t + 2 = 0$$

Введём новую переменную $z = \sin t$,перепишем уравнение в виде

$$2z^2 - 5z + 2 = 0$$

Квадратное уравнение,
решим через дискриминант.

$$D = b^2 - 4ac$$

$$z_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$D = 25 - 4 \bullet 2 \bullet 2 = 9$$

$$z_1 = \frac{5+3}{2*2} = 2 \qquad z_2 = \frac{5-3}{2*2} = \frac{1}{2}$$

Вернёмся к подстановке, у нас получиться два уравнения

$$\sin t = 2 \qquad \sin t = \frac{1}{2}$$

Решений нет, т.к

$$|t| \le 1$$

$$t = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n \quad n \in Z$$

Ответ: $t = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$

$$\cos^2 t - \sin^2 t - \cos t = 0$$

Замечаем , что $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$

$$\cos^2 t - \left(1 - \cos^2 t\right) - \cos t = 0$$

$$\cos^2 t - 1 + \cos^2 t - \cos t = 0$$

$$2\cos^2 t - \cos t - 1 = 0$$

Введём подстановку $\cos t = z$

$$2z^2 - z - 1 = 0$$

Получили квадратное уравнение, решим его через дискриминант.

$$z_2 = -\frac{1}{2} \qquad z_1 = 1$$

Вернёмся к подстановке, получим два тригонометрических уравнения :

$$\cos t = 1$$

$$t = 2\pi n \quad n \in Z$$

$$\cos t = -\frac{1}{2}$$

$$t = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \quad n \in Z$$

Смысл этого метода вам знаком: если уравнение f(x)=0 удаётся преобразовать к виду: $$f_1(x)\cdot f_2(x)=0$$ то задача сводиться к решению двух уравнений

$$f_1(x)=0 \qquad f_2(x)=0$$

Решим пример методом разложения на множители

$$\left(\sin x-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\cos x+\frac{2}{5}\right)=0$$

$$\sin x=\frac{1}{3} \qquad \cos x=-\frac{2}{5}$$

$$x=(-1)^n\cdot\arcsin\frac{1}{3}+\pi n \qquad x=\pm\arccos\left(-\frac{2}{5}\right)+2\pi n$$

$$2\sin x\cdot\cos 5x-\cos 5x=0$$

$$\cos 5x(2\sin x-1)=0$$

$$\cos 5x=0$$

$$5x=\frac{\pi}{2}+\pi n$$

$$x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}\quad n\in Z$$

$$2\sin x=1$$

$$\sin x=\frac{1}{2}$$

$$x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n\ \ n\in Z$$

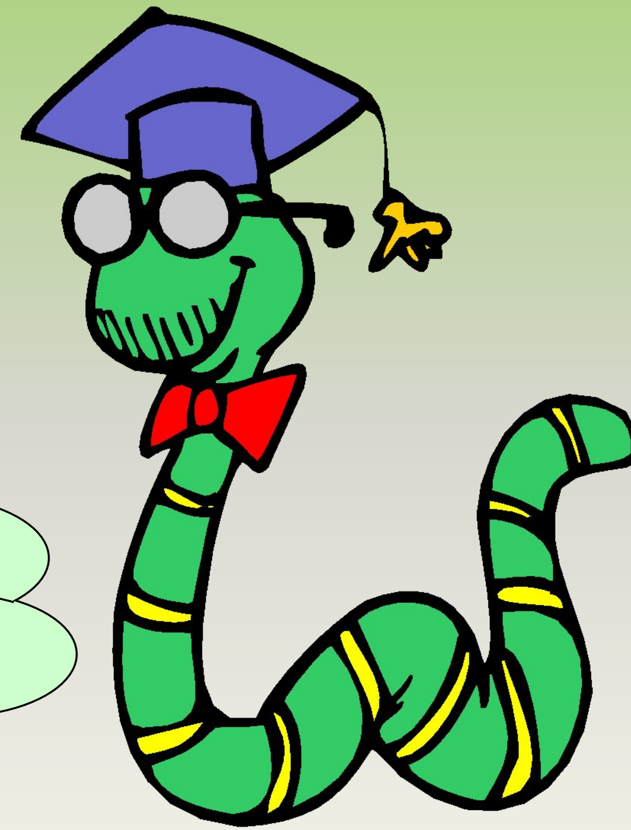
Самостоятельная работа

$$8\sin^2 2x + 10\sin 2x + 3 = 0$$

$$(1 + \cos x)\cdot\left(\sqrt{2}\cdot\sin x - 1\right) = 0$$

Домашнее задание:

№ 356(а), 357(г),
358(в) Стр. 99



Спасибо за урок!