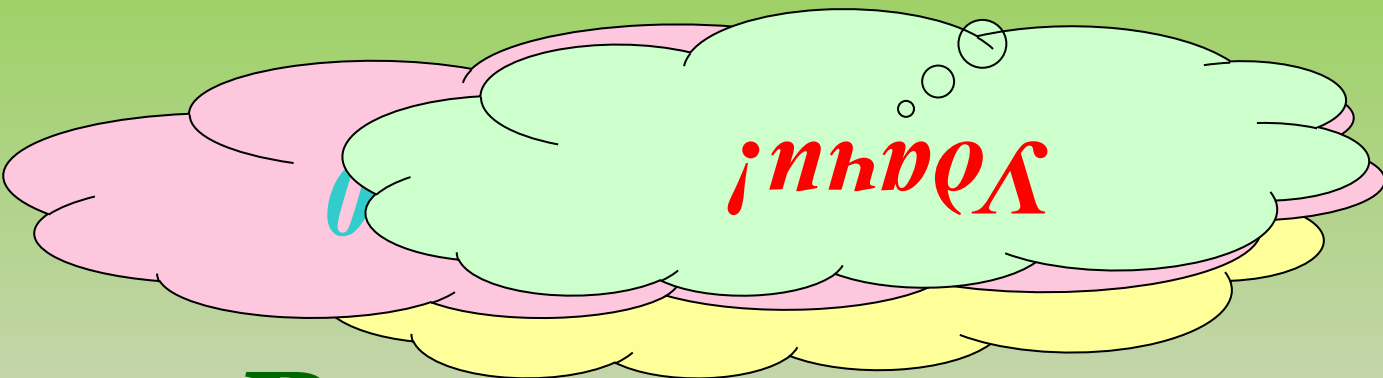


*Учиться можно только  
весело...  
Чтобы переваривать  
знания, надо поглощать  
их с аппетитом.*

**Анатоль Франс**  
**1844 - 1924**



# *Решение простейших тригонометрических уравнений.*

**ГОУ НПО ПУ № 50  
с. Кичкасс**

**Тригонометрия** (от греч. *trigonon* — треугольник, *metro* — измерять) — микрораздел математики, в котором изучаются зависимости между величинами углов и длинами сторон треугольников, а также алгебраические тождества тригонометрических функций.

**Тригонометрические вычисления** применяются практически во всех областях геометрии, физики и инженерного дела.

Большое значение имеет техника триангуляции, позволяющая измерять расстояния до недалёких звёзд в астрономии, между ориентирами в географии, контролировать системы навигации спутников. Также следует отметить применение тригонометрии в таких областях, как техника навигации, теория музыки, акустика, оптика, анализ финансовых рынков, электроника, теория вероятностей, статистика, биология, медицина (включая ультразвуковое исследование (УЗИ) и компьютерную томографию), фармацевтика, химия, теория чисел (и, как следствие, криптография), сейсмология, метеорология, океанология, картография, многие разделы физики, топография и геодезия, архитектура, фонетика, экономика, электронная техника, машиностроение, компьютерная графика, кристаллография.

Возникновение тригонометрии связано с землемерием, астрономией и строительным делом. Впервые способы решения треугольников, основанные на зависимостях между сторонами и углами треугольника, были найдены

древнегреческими астрономами **Гиппархом** (2 в. до н. э.) и

**Клавдием Птолемеем** (2 в. н. э.).

Значительный вклад в развитие тригонометрии внесли арабские ученые Аль-Батани (850-929) и Абу-ль-Вефа Мухамед-бен Мухамед (940-998), который составил таблицы синусов и тангенсов через  $10'$  с точностью до  $1/604$ . Теорему синусов уже знали индийский ученый Бхаскара (р. 1114, год смерти неизвестен) и азербайджанский астроном и математик Насиреддин Туси Мухамед (1201-1274). Кроме того, Насиреддин Туси в своей работе Трактат о полном четырехстороннике изложил плоскую и сферическую тригонометрию как самостоятельную дисциплину. Теорему тангенсов доказал Региомонтан (латинизированное имя немецкого астронома и математика Иоганна Мюллера (1436-1476)). Региомонтан составил также подробные тригонометрические таблицы; благодаря его трудам плоская и сферическая тригонометрия стала самостоятельной дисциплиной и в Европе. Дальнейшее развитие тригонометрия получила в трудах выдающихся астрономов Николая Коперника (1473-1543) – творца гелиоцентрической системы мира, Тихо Браге (1546-1601) и Иогана Кеплера (1571-1630), а также в работах математика Франсуа Виета (1540-1603), который полностью решил задачу об определениях всех элементов плоского или сферического треугольника по трем данным.

# Проверочная работа.

## Вариант 1.

1. Каково будет решение уравнения  $\cos x = a$  при  $a >$

1

2. При каком значении  $a$  уравнение  $\cos x = a$  имеет решение?

3. Какой формулой выражается это решение?

4.

На какой оси откладывается значение  $a$  при решении уравнения  $\cos x = a$ ?

## Вариант 2.

1. Каково будет решение уравнения  $\sin x = a$  при  $a >$   
1

2. При каком значении  $a$  уравнение  $\sin x = a$  имеет решение?

3. Какой формулой выражается это решение?

4.

На какой оси откладывается значение  $a$  при решении уравнения  $\sin x = a$ ?

# Проверочная работа.

## Вариант 1.

5. В каком промежутке находится  $\arccos a$  ?

6. В каком промежутке находится значение  $a$  ?

7. Каким будет решение уравнения  $\cos x = 1$  ?

8. Каким будет решение уравнения  $\cos x = -1$  ?

## Вариант 2.

5. В каком промежутке находится  $\arcsin a$  ?

6. В каком промежутке находится значение  $a$  ?

7. Каким будет решение уравнения  $\sin x = 1$  ?

8. Каким будет решение уравнения  $\sin x = -1$  ?

# Проверочная работа.

## Вариант 1.

9. Каким будет решение уравнения  $\cos x = 0$ ?

10. Чему равняется  $\arccos(-a)$ ?

11. В каком промежутке находится  $\operatorname{arctg} a$ ?

12. Какой формулой выражается решение уравнения  $\operatorname{tg} x = a$ ?

## Вариант 2.

9. Каким будет решение уравнения  $\sin x = 0$ ?

10. Чему равняется  $\arcsin(-a)$ ?

11. В каком промежутке находится  $\operatorname{arcctg} a$ ?

12. Какой формулой выражается решение уравнения  $\operatorname{ctg} x = a$ ?

<b>№</b>	<b>Вариант 1.</b>	<b>Вариант 2.</b>
<b>1.</b>	<i>Нет решения</i>	<i>Нет решения</i>
<b>2.</b>	$ a  \leq 1$	$ a  \leq 1$
<b>3.</b>	$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi k, k \in Z$
<b>4.</b>	<i>На оси Ox</i>	<i>На оси Oy</i>
<b>5.</b>	$[0; \pi]$	$[-\pi / 2; \pi / 2]$
<b>6.</b>	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$
<b>7.</b>	$x = 2\pi n, n \in Z$	$x = \pi / 2 + 2\pi k, k \in Z$
<b>8.</b>	$x = \pi + 2\pi n, n \in Z$	$x = -\pi / 2 + 2\pi k, k \in Z$
<b>9.</b>	$x = \pi / 2 + \pi n, n \in Z$	$x = \pi k, k \in Z$
<b>10.</b>	$n - \arccos a$	$-\arcsin a$
<b>11.</b>	$(-\pi / 2; \pi / 2)$	$(0; \pi)$
<b>12.</b>	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in Z$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi k, k \in Z$



## Установите соответствие:

1  $\sin x = 0$

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z$$

2  $\cos x = -1$

$$2\pi k, \quad k \in Z$$

3  $\sin x = 1$

$$\pi k, \quad k \in Z$$

4  $\cos x = 1$

$$\frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z$$

5  $\operatorname{tg} x = 1$

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z$$

6  $\sin x = -1$

$$\pi + 2\pi k, \quad k \in Z$$

7  $\cos x = 0$

$$\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z$$

# Установите съответствие:

1  $\sin x = 0$

2  $\cos x = -1$

3  $\sin x = 1$

4  $\cos x = 1$

5  $\operatorname{tg} x = 1$

6  $\sin x = -1$

7  $\cos x = 0$

$\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$\frac{\pi}{2} - \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$\frac{\pi}{2} - 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

**Найди ошибку.**

~~$\arccos 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$~~   $\longrightarrow$   $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = 45^{\circ} = \frac{\pi}{4}$

$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$

**Верно**

~~$\arctg 60^{\circ} = \sqrt{3}$~~   $\longrightarrow$   $\arctg \sqrt{3} = 60^{\circ} = \frac{\pi}{3}$

~~$\arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{3\pi}{6}$~~   $\longrightarrow$   $\arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$

$\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$

**Верно**

# Решение тригонометрических уравнений

## ВАРИАНТ №1

- $\cos x = \frac{1}{2}$  А.  $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$
- $\cos \frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$  Б.  $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$
- $\sin 4x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  В.  $\pm \frac{2\pi}{3} + 8\pi n$
- $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  Г. Корней нет
- $\cos 2x = \sqrt{3}$  Д.  $\pm 2\pi + 6\pi n$
- $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  Е.  $\frac{\pi}{3} + \pi n$
- $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$  Ж.  $\frac{\pi}{6} + \pi n$
- $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$  З.  $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$
- $\cos \frac{x}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  И.  $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$
- $\sin \frac{x}{2} = -\sqrt{2}$  К.  $(-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n$   
Л.  $(-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4}$   
М.  $2\pi n$

## ВАРИАНТ №2

- $\sin x = \frac{1}{2}$  А.  $\frac{7\pi}{12} + \pi n$
- $\sin 2x = \frac{1}{2}$  Б.  $(-1)^n \frac{\pi}{3} + 2\pi n$
- $\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$  В.  $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$
- $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  Г.  $-\frac{\pi}{4} + \pi n$
- $\cos \frac{x}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  Д. Корней нет
- $\cos \frac{x}{2} = -\sqrt{2}$  Е.  $\frac{\pi}{4} + \pi n$
- $\operatorname{tg} x = 1$  Ж.  $\pm \frac{3\pi}{8} + \pi n$
- $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$  З.  $\pm \frac{3\pi}{4} + 6\pi n$
- $\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  И.  $\pi + 2\pi n$
- $\sin 3x = 2$  К.  $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$   
Л.  $(-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$   
М.  $\pm \frac{3\pi}{4} + \pi n$

# ОТВЕТЫ

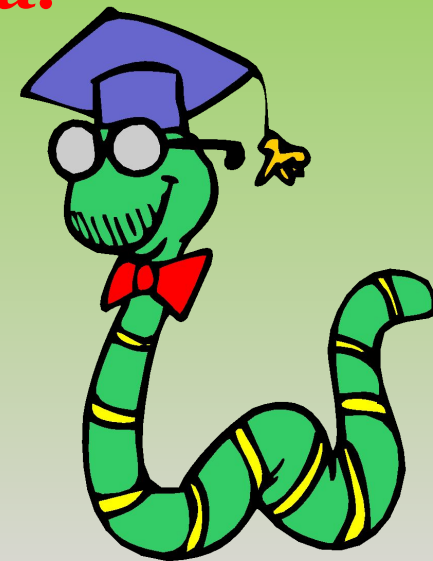
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Вариант №1	Б	Д	Л	К	Г	И	Ж	Е	В	Г
Вариант №2	В	Л	Б	К	З	Д	Е	А	Ж	Д

Оценка **«отлично»** за 10 верно выполненных заданий;

Оценка **«хорошо»** за 8-9 верно выполненных заданий;

Оценка **«удовлетворительно»** за 6-7 верно выполненных заданий.

# Два основных метода решения простейших тригонометрических уравнений.



1. Метод введения новой переменной. ★

2. Метод разложения на множители. ★



$$2\sin^2 t - 5\sin t + 2 = 0$$

Введём новую переменную  $z = \sin t$ , перепишем уравнение в виде

*Квадратное уравнение,  
решим через дискриминант.*

$$D = b^2 - 4ac$$

$$z_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$2z^2 - 5z + 2 = 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$$

$$z_1 = \frac{5+3}{2 \cdot 2} = 2 \quad z_2 = \frac{5-3}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

Вернёмся к подстановке, у нас  
получится два уравнения

$$\sin t = 2$$

$$\sin t = \frac{1}{2}$$

Решений нет, т.к

$$|t| \leq 1$$

$$t = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n \quad n \in Z$$

➔ **Ответ:**  $t = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$

$$\cos^2 t - \sin^2 t - \cos t = 0$$

Замечаем, что  $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$

$$\cos^2 t - (1 - \cos^2 t) - \cos t = 0$$

$$\cos^2 t - 1 + \cos^2 t - \cos t = 0$$

Введём подстановку  $\cos t = z$

$$2\cos^2 t - \cos t - 1 = 0$$

$$2z^2 - z - 1 = 0$$

Получили квадратное уравнение, решим его через дискриминант.

$$z_2 = -\frac{1}{2} \quad z_1 = 1$$

Вернёмся к подстановке, получим два тригонометрических уравнения :

$$\cos t = 1$$

$$t = 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos t = -\frac{1}{2}$$

$$t = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$





Смысл этого метода вам знаком: если уравнение  $f(x)=0$  удаётся преобразовать к виду:

$$f_1(x) \cdot f_2(x) = 0 \quad \text{то задача сводится к решению двух уравнений}$$

$$f_1(x) = 0 \quad f_2(x) = 0$$

*Решим пример методом разложения на множители*

$$\left( \sin x - \frac{1}{3} \right) \cdot \left( \cos x + \frac{2}{5} \right) = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{3}$$

$$\cos x = -\frac{2}{5}$$

$$x = (-1)^n \cdot \arcsin \frac{1}{3} + \pi n$$

$$x = \pm \arccos \left( -\frac{2}{5} \right) + 2\pi n$$



$$2 \sin x \cdot \cos 5x - \cos 5x = 0$$

$$\cos 5x(2 \sin x - 1) = 0$$

$$\cos 5x = 0$$

$$2 \sin x = 1$$

$$5x = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

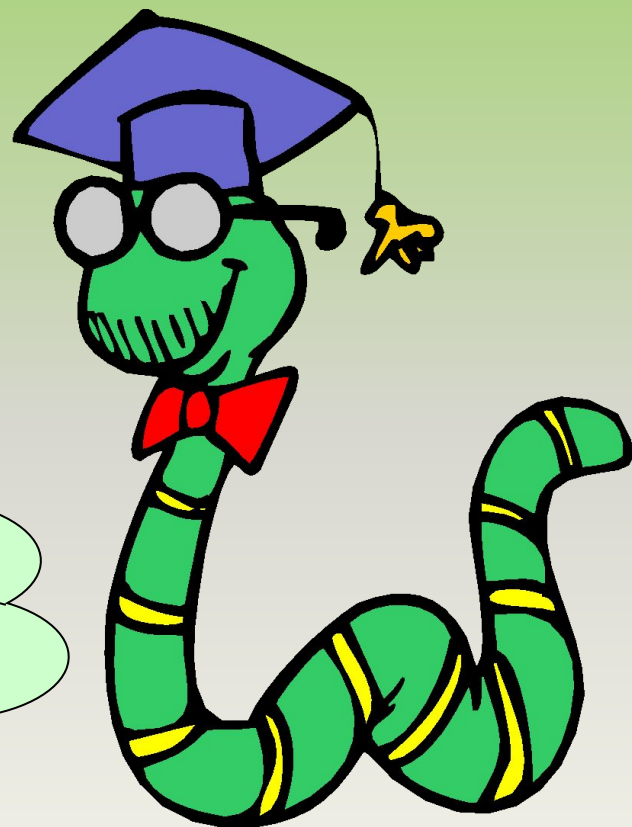


## *Самостоятельная работа*

$$8 \sin^2 2x + 10 \sin 2x + 3 = 0$$

$$(1 + \cos x) \cdot (\sqrt{2} \cdot \sin x - 1) = 0$$

# Домашнее задание:



№ 356(а), 357(з),  
358(в) Стр. 99

Спасибо за урок!