

Двойственные функции

Булевы функции

Двойственные функции

- Булева функция $f^*(x_1, \dots, x_n)$ называется *двойственной булевой функции* $f(x_1, \dots, x_n)$, если она получена из $f(x_1, \dots, x_n)$ инверсией всех аргументов и самой функции, то есть

$$f^*(x_1 x_2 \dots x_n) = \overline{f(\overline{x_1} \overline{x_2} \dots \overline{x_n})}$$

Пример

Построим функцию, двойственную стрелке Пирса.
*Значения двойственной функции можно получить
переворотом и инверсией столбца значений исходной
функции*

| x | y | $x \downarrow y$ | $\overline{\overline{x} \downarrow \overline{y}}$ |
|-----|-----|------------------|---|
| 0 | 0 | 1 | $\overline{\overline{0} \downarrow \overline{0}} = 1$ |
| 0 | 1 | 0 | $\overline{\overline{0} \downarrow \overline{1}} = 1$ |
| 1 | 0 | 0 | $\overline{\overline{1} \downarrow \overline{0}} = 1$ |
| 1 | 1 | 0 | $\overline{\overline{1} \downarrow \overline{1}} = 0$ |

Пары двойственных элементарных функций:

- 0 - 1
- Дизъюнкция – конъюнкция
- Штрих Шеффера – стрелка Пирса
- Эквивалентность – антиэквивалентность

Пример.

Покажем, что дизъюнкция двойственна конъюнкции (применив законы де Моргана и двойного отрицания):

$$(x \vee y)^* = \overline{(\overline{x} \vee \overline{y})} = \overline{\overline{x}} \overline{\overline{y}} = xy.$$

Двойственная формула

Определение

- Формула F^* называется *двойственной формуле* F , если она получена из F заменой символов функций на символы двойственных им функций.

Пример

$$F = x \downarrow (y \oplus (\bar{x} \vee y z)) \longrightarrow (y \sim \bar{x}),$$
$$F^* = x / (y \sim \bar{x} (y \vee z)) \longleftarrow (y \oplus \bar{x}).$$

Пример

- Рассмотрим формулу $F = \overline{x \vee y}$ задающую булеву функцию НЕ-ИЛИИ, то есть стрелку Пирса.
- Двойственная ей формула должна задавать функцию, двойственную стрелке Пирса – это штрих Шеффера

$$F^* = \overline{x y}$$

это функция НЕ-И, то есть штрих Шеффера.

Самодвойственная функция

- Функция, совпадающая со своей двойственной, называется **самодвойственной**.

$$F^* = F$$

Следствие из принципа двойственности.

- Если формулы F_1 и F_2 равносильны, то двойственные им формулы F_1^* и F_2^* , также равносильны.

Способы получения двойственной функции

- по определению двойственной функции – инверсией в формуле F_f всех аргументов и самой функции;
- по определению двойственной формулы и принципу двойственности – заменой в формуле F_f символов функций на символы двойственных им функций;
- построением таблицы истинности исходной функции по заданной формуле F_f , а затем переходом к таблице истинности двойственной функции (переворотом и инверсией столбца значений исходной функции).

Упражнение 1

Построить формулы для функций, двойственных данным, пользуясь двумя разными способами: определением двойственной функции и принципом двойственности. Сравнить таблицы истинности, построенные по полученным формулам.

$$F_1 = x y \vee y z \vee x t \vee z t,$$

$$F_2 = x \oplus 1 \vee y (z t \vee 0) \vee \bar{x} y z,$$

Упражнение 2

Двойственны ли формулы F_f и G_g ?
Функции f и g ?

$$1) F_f = xy \oplus xz \oplus yz$$

$$2) F_f = xy \downarrow xz,$$

$$G_g = \overline{\overline{xy} \vee \overline{xz} \vee \overline{yz}},$$

$$G_g = (x \vee y) / (x \vee z),$$