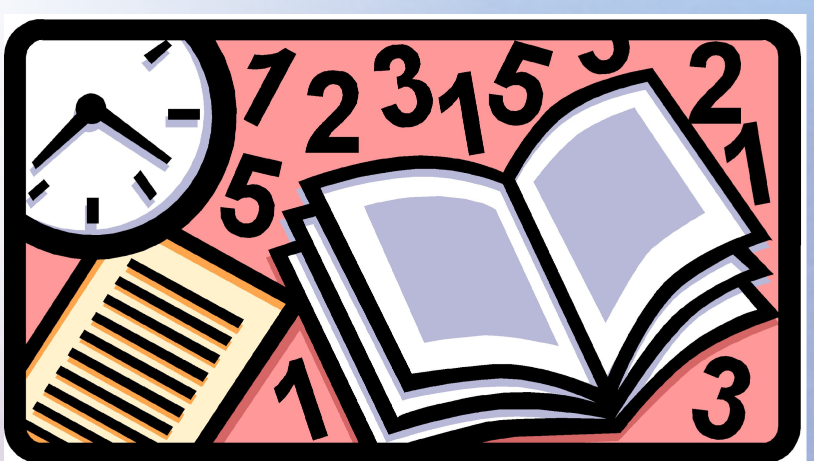
Комплексные числа и квадратные уравнения.



СОДЕРЖАНИЕ:

1. Действительные числа. Комплексные числа.
2. Арифметические действия над комплексными числами.
3. Решение квадратных уравнений во множестве комплексных чисел.

Q

Рациональные числа

(1, 2, 0, -1, -2, 34,5; $-\frac{3}{4}$.)

Иррациональные Числа (π, $\sqrt{2}$, ...)

Действительные числа R

Квадратное уравнение с действительными коэффициентами

$$ax^2 + \boldsymbol{b}x + c = \mathbf{0},\ a \neq \mathbf{0}$$

$$D = b^2 - 4ac,$$

<u>если $D = 0$,</u>

то уравнение имеет единственный корень,

<u>если $D > 0$,</u>

то уравнение имеет два различных действительных корня,

<u>если $D < 0$,</u>

то корней (действительных)нет.

?

На множестве

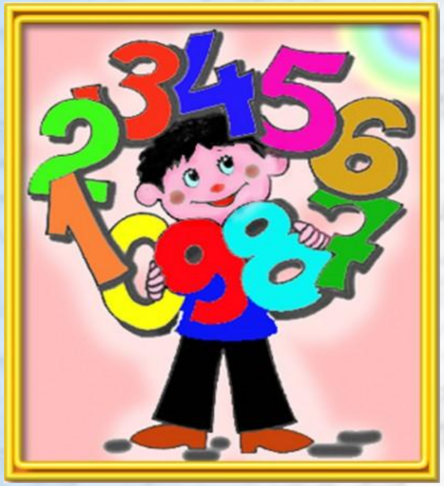
С – комплексных чисел

можно находить корни любых квадратных уравнений!

Важное условие комплексного числа

Существует число, квадрат которого = -1.

Элемент, квадрат которого равен -1 называется мнимой единицей. Обозначается i (переводится «мнимый», «воображаемый»)



Общий вид:

КОМПЛЕКСНОЕ ЧИСЛО
Z = x + yi

x - действительная часть числа

yi-мнимая часть комплексного числа

$$i^2 = -1$$

Например:

$4 + 3i$; $7 - 2i$;

Равенство комплексных чисел

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА РАВНЫ, КОГДА РАВНЫ ИХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ И МНИМЫЕ ЧАСТИ.

$a+bi=c+di$, если $a=c$, $b=d$

Сопряжённые числа

СОПРЯЖЕННЫМ ЧИСЛОМ ДЛЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА НАЗЫВАЕТСЯ КОМПЛЕКСНОЕ ЧИСЛО, ОТЛИЧАЮЩЕЕСЯ ОТ ДАННОГО ЗНАКОМ МЕЖДУ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ И МНИМОЙ ЧАСТЯМИ.

Например: $a+bi$ и $a-bi$ – сопряженные числа.

$2\pm3i$, $1\pm5i$

Сложение и вычитание комплексных чисел

Пример 1

Сложить два комплексных числа $z_1 = 1+3i$, $z_2 = 4 - 5i$

Для того чтобы сложить два комплексных числа нужно сложить их действительные и мнимые части:

$$\boldsymbol{z_1 + z_2 = 1+3i+4-5i = 5-2i.}$$

Пример 2

Найти разности комплексных чисел z_1 и z_2, если $z_1=-2+i$, $z_2 = \sqrt{3} + 5i$

Действие аналогично сложению, единственная особенность состоит в том, что вычитаемое нужно взять в скобки, а затем – стандартно раскрыть эти скобки со сменой знака:

$z_1 - z_2 = -2+i - (\sqrt{3} + 5i) = -2 - \sqrt{3} - 4i.$

Умножение и деление комплексных чисел

Пример 3

Умножить два комплексных числа $2 - 3i$ *и* $1 + i$.

Что напрашивается? Напрашивается раскрыть скобки по правилу умножения многочленов. Так и нужно сделать! Все алгебраические действия нам знакомы, главное, помнить, что $\boldsymbol{i^2 = -1}$

и быть внимательным.

$$(2 - 3i)\,(1 + i) = 2 + 2i - 3i - 3i^2 = (2 + 3) + (2 - 3)i = 5 - i$$

Пример 4

Деление комплексных чисел , кроме деления на нуль , определяется как действие , обратное умножению . Конкретное правило деления получим , записав частное в виде дроби и умножив числитель и знаменатель этой дроби на число , сопряжённое со знаменателем :

$$(a + bi):(c + di) = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{ac+bd+bci-adi}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \cdot i.$$

Как извлечь квадратный корень из отрицательных действительных чисел?

Определение: квадратным корнем(корнем второй степени) из комплексного числа z называют комплексное число, квадрат которого равен z.

$$\sqrt{-1} = ?$$

$$z^2 = -1, (x + iy)^2 = -1;\ x, y \in R$$

$$(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = -1 + 0 \cdot i$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -1 \\ 2ixy = 0 \end{cases} \longrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, -y^2 = -1, y^2 = 1, y = \pm 1 \\ y = 0, x^2 = -1, \text{действительных корней нет} \end{array}\right.$$

$$(0; 1) <=> \boxed{z = i} \text{ или } (0; -1) <=> \boxed{z = -i}$$

Формула извлечения квадратного корня из отрицательных действительных чисел

если $d < 0, d \in R$, то $\sqrt{d} = \pm\sqrt{-d} \cdot i$

$$\sqrt{-4} = \pm\sqrt{-(-4)} \cdot i = \pm 2i$$

$$\sqrt{-10} = \pm\sqrt{-(-10)} \cdot i = \pm\sqrt{10} \cdot i$$

$$\sqrt{-36} = \pm\sqrt{-(-36)} \cdot i = \pm 6i$$

Решение квадратных уравнений с действительными коэффициентами и D<0.

<u>Важно знать!</u>

Если у уравнения есть комплексный корень, то и сопряжённое ему число – тоже является корнем этого уравнения!

$$z^2 - 3z + 8{,}5 = 0$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8{,}5 = -25$$

$$z_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{-25}}{2} = \frac{3 \pm 5i}{2} = \boxed{1{,}5 \pm 2{,}5}$$

Сопряжённые числа

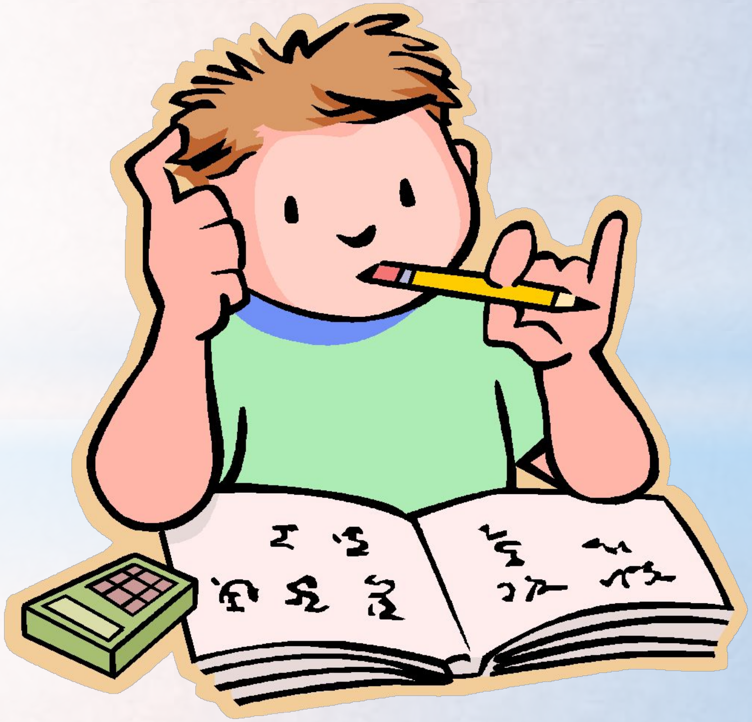
* Решим уравнение

$$z^2 - 4z + 13 = 0.$$

$$z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} =$$

$$\frac{4 \pm i\sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i.$$

Ответ: $2 \pm 3i$



Полезные следствия для формулы корней квадратного уравнения:

- (теорема Виета)

Если Z_1 и Z_2 –корни квадратного уравнения

$$az^2 + bz + c = 0$$

то

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a};\ z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

- (формула разложения квадратного трёхчлена на линейные множители)

Если Z_1 и Z_2 –корни квадратного уравнения

$$az^2 + bz + c = 0$$

то

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$$

Минимальные условия комплексного числа

1) Существует число, квадрат которого = -1.

2) Множество комплексных чисел содержит все действительные числа.

3) Операции сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел удовлетворяет обычным законом арифметических действий.

На множестве С можно находить корни любых квадратных уравнений!

Заключительный вывод

Велик мир чисел, бесконечен. Всякий, кто входит в математику, встречается с миром чисел. А ведь всего 10 цифр и 6 арифметических действий создали его

Давайте жить в мире с жителями этого мира!