КОМБИНАТОРИКА

Размещения, перестановки,

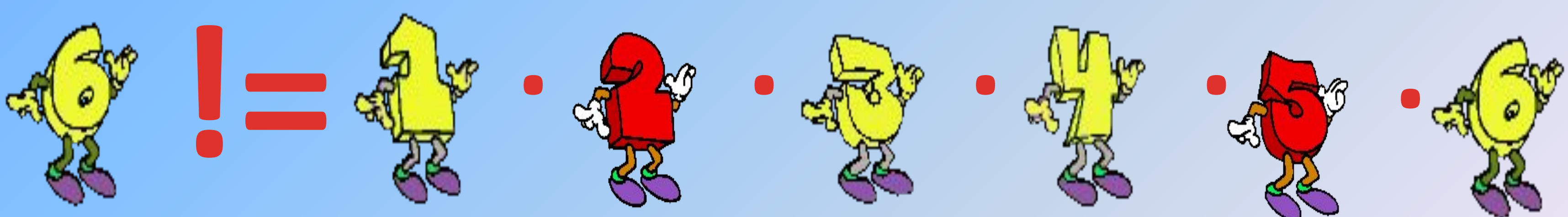
Определение 1:

Произведение подряд идущих первых *n* натуральных чисел обозначают *n*! и называют «эн факториал»:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$$

Наприме
р:

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$



Теорема 1:

n **различных элементов можно расставить по одному на *n* различных мест ровно *n*! способами.**

$$\boxed{P_n = n!}$$

- перестановки

Например:

6 слонят

Сколькими способами можно их расставить?

$$6!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6=720$$

Задача 1:

К хозяину дома пришли гости A,B,C,D. За круглым столом – пять разных стульев.

а) Сколькими способами можно рассадить гостей за столом?

б) Сколькими способами можно рассадить гостей за столом, если место хозяина дома уже известно?





A B хозяи C D

Решение:

а) На 5 стульев должны сесть 5 человек (включая хозяина дома). Значит, всего имеется P_5 способов их рассаживания:

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

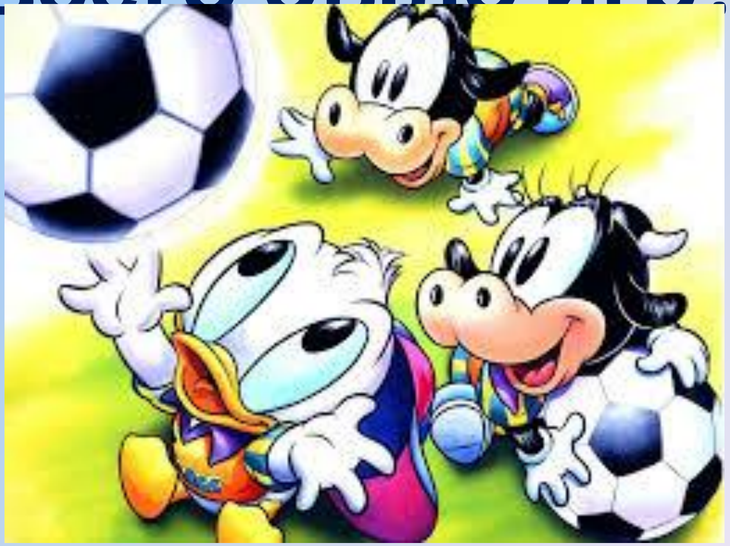
Решени

б) е: Так как место хозяина фиксировано, то следует рассадить четырех гостей на четыре места. Это можно сделать P_4 способами:

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

Задача 2:

В чемпионате по футболу участвовало 7 команд. Каждая команда сыграла по одной игре с каждой командой. Сколько всего было игр?



Решение:

Первый способ:

Рассмотрим таблицу 7х7, в которой вписаны результаты игр. В ней 49 клеток:

	1	2	3	4	5	6	7
1		3:1	0:5	2:2	0:0	1:0	1:3
2			4:3	1:0	1:0	0:0	1:1
3				1:3	1:0	1:2	0:0
4					1:1	1:1	1:4
5						1:0	0:0
6							2:2
7							

По диагонали клетки закрашены, т.к. никакая команда не играет сама с собой. Если убрать диагональные клетки, их

Решение:

	1	2	3	4	5	6	7
1		3:1	0:5	2:2	0:0	1:0	1:3
2	1:3		4:3	1:0	1:0	0:0	1:1
3				1:3	1:0	1:2	0:0
4					1:1	1:1	1:4
5						1:0	0:0
6							2:2
7							

В нижней части таблицы результатов нет, т.к. все они получаются отражением уже имеющихся результатов из верхней части таблицы.

Поэтому количество всех проведенных игр равно половине от 42, т.е. 21.

Второй способ:

Произвольно пронумеруем команды №1, №2,…, №7 и посчитаем число игр поочередно. Команда №1 встречается с командами №2-7 – это 6 игр. Команда №2 тоже проведет 6 встреч, но одну игру , с командой №1, мы уже посчитали. Получается 5 новых игр. Команда №3 проведет 6 встреч, из которых две, с №1 и №2 мы посчитали, значит, добавится ещ… …учим:

	1	2	3	4	5	6	7
1		3:1	0:5	2:2	0:0	1:0	1:3
2			4:3	1:0	1:0	0:0	1:1
3				1:3	1:0	1:2	0:0
4					1:1	1:1	1:4
5						1:0	0:0
							2:2

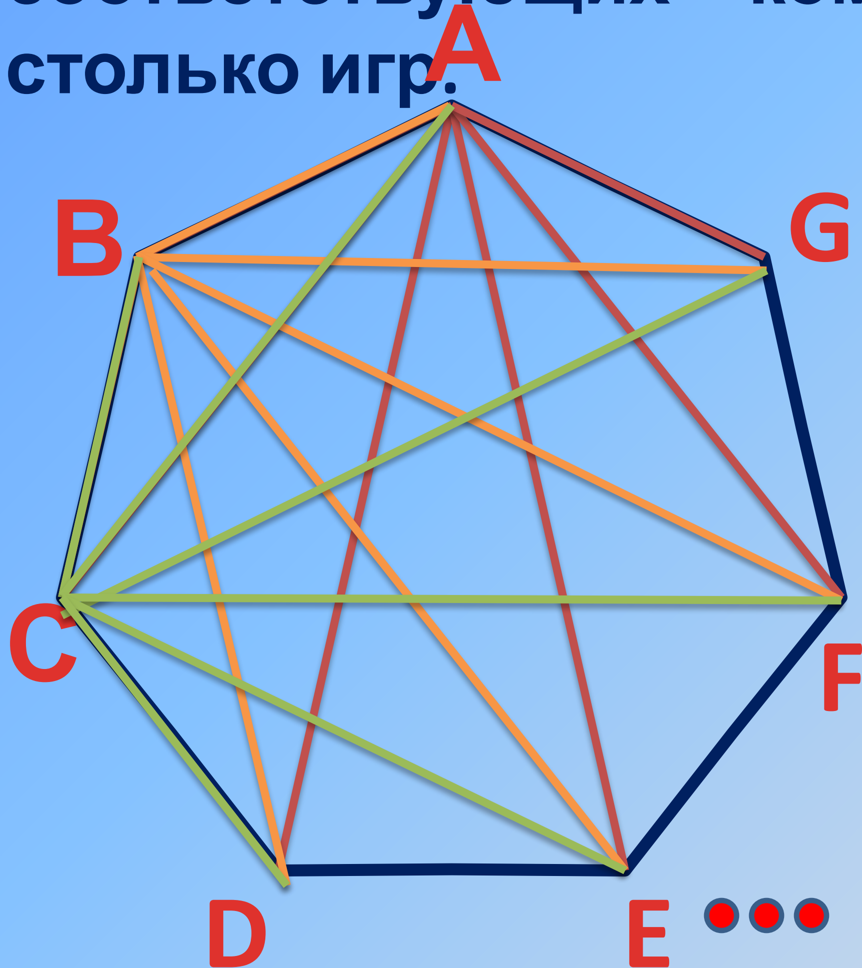
6 игр
5 игр
4 игры
3 игры
2 игры
1 игра

21 игра

6+5+4+3+2+1=21

Третий способ:

Используем геометрическую модель: 7 команд – это вершины выпуклого семиугольника, а отрезок между двумя вершинами – это встреча двух соответствующих команд: сколько отрезков, столько игр.



Из каждой вершины выходит 6 отрезков. Получается 7·6 отрезков, каждый из которых посчитан дважды: как AB, так и BA. Значит, всего проведен (7·6):2=42:2=21 отрезок.

Выводы:

Состав игры определен, как только мы выбираем две команды. Значит, количество всех игр в турнире для *n* команд – это количество всех ***выборов двух элементов из n данных*** элементов. При этом порядок выбора **не важен**.

Теорема 2:

Если множество состоит из *n* элементов и требуется выбрать два элемента без учета их порядка, то такой выбор можно произвести

$$\boxed{\frac{n(n-1)}{2}}$$

способами.

Определение 2:

Число всех выборов двух элементов <u>без учета их порядка</u> из n данных элементов называют **числом сочетаний из n элементов по 2** и обозначают C_n^2 [«цэ из эн по два»]

Задача 3:

Встретились 11 футболистов и 6 хоккеистов и каждый стал по одному разу играть с каждым в шашки, которые они «давненько не брали в руки». Сколько встреч было:

а) между футболистами

б) между хоккеистами

в) всего?

Решение:

а) $C_{11}^2 = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55$

б) $C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$

в) $C_{17}^2 = \frac{17 \cdot 16}{2} = 136$

А что получится, если мы будем учитывать порядок двух выбираемых элементов?

Теорема 3:

Если множество состоит из *n* элементов и требуется выбрать два элемента учитывая их порядок, то такой выбор можно произвести

$$\boxed{n(n-1)}$$

способами.

Определение 3:

Число всех выборов двух элементов <u>с учетом их порядка</u> из n данных элементов называют **числом размещений из n элементов по 2** и обозначают A_n^2 [«а из эн по два»]

Задача 4:

В классе 27 учеников. К доске нужно вызвать двоих. Скольким способами это можно сделать, если:

а) первый ученик должен решить задачу по алгебре, а второй – по геометрии;

б) они должны быстро стереть с доски?

Решение:

В случае а) порядок важен, а в случае б) – нет. Значит,

а) $A_{27}^{2} = 27 \cdot 26 = 702;$ б) $C_{27}^{2} = \dfrac{27 \cdot 26}{2} = 351.$

А как будут выглядеть формулы, если в них верхний индекс заменить на 5, 7, 10 и т.д.? Сколькими способами можно выбрать 5 учеников из 30 для дежурства в столовой; 7 монет из 10 данных; 10 карт из колоды в 32 карты?

Определение 4:

Число всех выборов *k* элементов из *n* данных без учета порядка называют **числом сочетаний из n элементов по k** и обозначают C_n^k

Число всех выборов *k* элементов из *n* данных с учетом их порядка называют **числом размещений из n элементов по k** и обозначают A_n^k

Теорема 4:

Для любых натуральных чисел *n* и *k* таких, что *k*<*n*, справедливы соотношения:

$$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}}$$

ЗАДАЧИ

Задача 5:

В классе 27 учеников, из них нужно выбрать троих. Сколькими способами это можно сделать, если:

а) первый ученик должен решить задачу, второй – сходить за мелом, третий – пойти дежурить в столовую?

б) им следует спеть в хор

Задача 6:

«Проказница Мартышка, Осел, Козел и Косолапый Мишка затеяли сыграть квартет». Мишке поручили выбрать 4 любых инструмента из имеющихся 11.

а) найти число всевозможных выборов инструментов;

б) найти число всевозможных рассаживаний участников квартета с выбранными четырьмя инструментами (инструменты, как в басне Крылова, занимают четко отведенные позиции).