Неопределенный интеграл

Элементы интегрального исчисления

1. Первообразная и неопределенный интеграл
2. Основные приемы вычисления неопределенных интегралов
3. Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен
4. Интегрирование дробно-рациональных функций
5. Интегрирование тригонометрических функций
6. Интегрирование некоторых иррациональностей

Первообразная и неопределенный интеграл

Определение. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$, определенных на некотором промежутке, называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на этом промежутке и обозначается $\int f(x)dx$.

Свойства интеграла, вытекающие из определения

Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, а его дифференциал-подынтегральному выражению. Действительно:

$$1. \left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x);$$

$$2. d\int f(x)dx = \left(\int f(x)dx\right)'dx = f(x)dx.$$

ВГУЭС

Свойства интеграла, вытекающие из определения

Неопределенный интеграл от дифференциала непрерывно дифференцируемой функции равен самой этой функции с точностью до постоянной:

3. $\int d\varphi(x) = \int \varphi'(x)dx = \varphi(x) + C,$

так как $\varphi(x)$ является первообразной для $\varphi'(x)$.

Свойства интеграла

Сформулируем далее следующие свойства неопределенного интеграла:

4. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют первообразные, то функция $f_1(x)+f_2(x)$ также имеет первообразную, причем $\int [f_1(x)+f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$;

5. $\int Kf(x)dx = K\int f(x)dx$;

6. $\int f'(x)dx = f(x)+C$;

7. $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F[\varphi(x)]+C$.

ВГУЭС

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int dx = x + C$.
2. $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1)$.
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.
5. $\int e^x dx = e^x + C$.
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.
8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.
9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.
10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$.

Таблица неопределенных интегралов

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$ ..

14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

15. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$.

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C$.

17. $\int shxdx = chx + C$.

18. $\int chxdx = shx + C$.

19. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$.

20. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$.

Свойства дифференциалов

При интегрировании удобно пользоваться свойствами:

$$1.\ dx = \frac{1}{a} d(ax)$$

$$2.\ dx = \frac{1}{a} d(ax+b),$$

$$3.\ xdx = \frac{1}{2} dx^2,$$

$$4.\ x^2dx = \frac{1}{3} dx^3.$$

Примеры

Пример . Вычислить $\int \cos 5x dx$.

Решение. В таблице интегралов найдем $\int \cos x dx = \sin x + C$.

Преобразуем данный интеграл к табличному, воспользовавшись тем, что $d(ax) = a dx$.

Тогда:

$$\int \cos 5x dx = \int \cos 5x \frac{d(5x)}{5} = \frac{1}{5} \int \cos 5x d(5x) =$$

$$= \frac{1}{5} \sin 5x + C .$$

Примеры

Пример. Вычислить $\int\left(x^2+3x^3+x+1\right)dx$.

Решение. Так как под знаком интеграла находится сумма четырех слагаемых, то раскладываем интеграл на сумму четырех интегралов:

$$\int\left(x^2+3x^3+x+1\right)dx=\int x^2dx+3\int x^3dx+\int xdx+\int dx=.$$

$$=\frac{x^3}{3}+3\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+x+C$$

Независимость от вида переменной

При вычислении интегралов удобно пользоваться следующими свойствами интегралов:

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$\int f(x+b)dx = F(x+b) + C$.

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C .$$